이 책의

정답과 해설

대수

Ⅰ 지수함수와 로그함수

1 지수 002
2 로그 017
3 지수함수 037
4 로그함수 059

Ⅱ 삼각함수

5 삼각함수 084
6 삼각함수의 그래프 100
7 사인법칙과 코사인법칙 123

Ⅲ 수열

8 등차수열과 등비수열 140
9 수열의 합 163
10 수학적 귀납법 177

1 지수

본책 8~23쪽

STEP 1 개념 마스터

0001

$a^2b^5\times a^3b^2\times ab^4=a^{2+3+1}b^{5+2+4}=a^6b^{11}$ 답 a^6b^{11}

0002

$(a^2b^3)^3=a^{2\times3}b^{3\times3}=a^6b^9$ 답 a^6b^9

0003

$$(a^2b)^5\times\left(\frac{a}{b}\right)^3=a^{2\times5}b^5\times\frac{a^3}{b^3}$$
$$=a^{10+3}b^{5-3}=a^{13}b^2$$ 답 $a^{13}b^2$

0004

$$6a^7b^3\div(a^2b)^2=6a^7b^3\div a^{2\times2}b^2$$
$$=6a^{7-4}b^{3-2}=6a^3b$$ 답 $6a^3b$

0005

$$4a^9b\div\left(\frac{2a}{b^2}\right)^3\times3ab^3=4a^9b\div\frac{8a^3}{b^{2\times3}}\times3ab^3$$
$$=4a^9b\times\frac{b^6}{8a^3}\times3ab^3$$
$$=\frac{1}{2}a^6b^7\times3ab^3$$
$$=\frac{3}{2}a^{6+1}b^{7+3}=\frac{3}{2}a^7b^{10}$$ 답 $\frac{3}{2}a^7b^{10}$

0006

$$2a^4b^3\div a^5b^9\div\left(\frac{2b}{a^2}\right)^2=2a^4b^3\div a^5b^9\div\frac{4b^2}{a^{2\times2}}$$
$$=\frac{2}{a^{5-4}b^{9-3}}\times\frac{a^4}{4b^2}$$
$$=\frac{2}{ab^6}\times\frac{a^4}{4b^2}$$
$$=\frac{a^3}{2b^8}$$ 답 $\frac{a^3}{2b^8}$

0007

$$12a^2b^7\times\left(\frac{a}{b^3}\right)^3\div\left(\frac{2a^4}{b^2}\right)^2=12a^2b^7\times\frac{a^3}{b^{3\times3}}\div\frac{4a^{4\times2}}{b^{2\times2}}$$
$$=12a^2b^7\times\frac{a^3}{b^9}\times\frac{b^4}{4a^8}$$
$$=\frac{12a^5}{b^2}\times\frac{b^4}{4a^8}$$
$$=\frac{3b^2}{a^3}$$ 답 $\frac{3b^2}{a^3}$

0008

-1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 답 -1, $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

0009

16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$ 답 2, -2, $2i$, $-2i$

0010

-27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ 답 -3, $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$

0011

256의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=256$이므로

$x^4-256=0$, $(x^2-16)(x^2+16)=0$

$(x-4)(x+4)(x^2+16)=0$

$\therefore x=\pm4$ 또는 $x=\pm4i$ 답 4, -4, $4i$, $-4i$

0012

$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$ 답 5

0013

$\sqrt[5]{(-7)^5}=-7$ 답 -7

0014

$\sqrt[4]{0.0016}=\sqrt[4]{0.2^4}=0.2$ 답 0.2

0015

$\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

0016

$\sqrt[5]{-3^5}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$ 답 -3

00017

$-\sqrt[6]{\left(-\frac{4}{5}\right)^6}=-\sqrt[6]{\left(\frac{4}{5}\right)^6}=-\frac{4}{5}$ 답 $-\frac{4}{5}$

0018

64의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ 답 4

0019

$\frac{1}{16}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{2}$, $-\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=-\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=-\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

0020

-216의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$ 답 -6

0021

-81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. 답 없다.

0022

$\{\sqrt[3]{(-3)^2}\}^3=(-3)^2=9$ 답 9

0023

$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$ 답 3

0024

$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0025

$(\sqrt[4]{121})^2=\sqrt[4]{121^2}=\sqrt[4]{(11^2)^2}=\sqrt[4]{11^4}=11$ 답 11

0026

$\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt{\sqrt[3]{27}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0027

$\sqrt[12]{49^4}\times\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[3\times4]{49^{1\times4}}\times\sqrt[3\times2]{7^{1\times2}}=\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7}$

$=\sqrt[3]{343}=\sqrt[3]{7^3}=7$ 답 7

0028

$\sqrt{\sqrt[4]{36}}+\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{\sqrt{6^2}}+\sqrt[4]{3\times2}$

$=\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{6}=2\sqrt[4]{6}$ 답 $2\sqrt[4]{6}$

0029

$\sqrt[3]{40}-\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{2^3\times5}-\sqrt[3]{\frac{35}{7}}$

$=2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}$ 답 $\sqrt[3]{5}$

0030

$6^0=1$ 답 1

0031

$\left(-\frac{1}{5}\right)^0=1$ 답 1

0032

$7^{-2}=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$ 답 $\frac{1}{49}$

0033

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ 답 2

0034

$(-4)^{-3}=\frac{1}{(-4)^3}=-\frac{1}{64}$ 답 $-\frac{1}{64}$

0035

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

0036

$\sqrt[5]{a}=a^{\frac{1}{5}}$ 답 $a^{\frac{1}{5}}$

0037

$\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$ 답 $a^{\frac{3}{4}}$

0038

$\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}=\frac{1}{a^{\frac{4}{5}}}=a^{-\frac{4}{5}}$ 답 $a^{-\frac{4}{5}}$

0039

$\frac{1}{\sqrt[6]{a^{-5}}}=\frac{1}{a^{-\frac{5}{6}}}=a^{\frac{5}{6}}$ 답 $a^{\frac{5}{6}}$

0040

$5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$ 답 $\sqrt[3]{5}$

0041

$10^{0.5}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

0042

$a^{-\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{a^{-1}}=\sqrt[10]{\frac{1}{a}}$ 답 $\sqrt[10]{\frac{1}{a}}$

0043

$a^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{a^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}}$ 답 $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$

0044

$8^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=2^0=1$ 답 1

0045

$2^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{2})^2\div(2^{\frac{1}{6}})^3=2^{\frac{3}{2}}\times2\div2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}+1-\frac{1}{2}}=2^2=4$ 답 4

0046

$\left\{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{2}{3}}=\left[\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{2}{3}}=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}$

$=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0047

$(\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2})^{12}=(a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}})^{12}=(a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}})^{12}$

$=(a^{\frac{17}{12}})^{12}=a^{17}$ 답 a^{17}

0048

$(a^3b^2)^{\frac{1}{6}}\div(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}=b$ 답 b

0049

$2^{\sqrt{8}}\times 2^{\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}=2^{3\sqrt{2}}$ 답 $2^{3\sqrt{2}}$

0050

$5^{\sqrt{3}}\times 5^{\sqrt{48}}\div 5^{\sqrt{27}}=5^{\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=5^{2\sqrt{3}}$ 답 $5^{2\sqrt{3}}$

0051

$3^{\sqrt{6}+1}\div 3^{\sqrt{6}-1}=3^{\sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-1)}=3^2=9$ 답 9

0052

$(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=a^2$ 답 a^2

0053

$(a^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\times b^{\sqrt{\frac{3}{2}}})^{\sqrt{6}}=(a^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\times b^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}})^{\sqrt{6}}$

$=a^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{6}}\times b^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{6}}=a^2b^3$ 답 a^2b^3

STEP 2 유형 마스터

유형 01 거듭제곱근 개념 02

n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

0054

① $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$이므로 2의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이다.

② 5의 세제곱근은 방정식 $x^3=5$의 근이므로 3개이다.

③ -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

④ n이 짝수일 때, -8의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

⑤ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$으로 1개뿐이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0055

ㄱ. $4^3=64$이므로 4는 64의 세제곱근 중 하나이다. (참)

ㄴ. -36의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (거짓)

ㄷ. 27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$뿐이다. (참)

ㄹ. $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$이므로 $\sqrt[3]{-27}$의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0056

16의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$이므로

$a=2$ 또는 $a=-2$

-125의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$이므로

$b=-5$

따라서 $a-b=2-(-5)=7$ 또는 $a-b=-2-(-5)=3$이므로

$a-b$의 최댓값은 7이다. 답 7

0057

$\sqrt[3]{-512}=\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$ … ❶

-8의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$이므로

$a=-2$ … ❷

$-a=2$의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[4]{2}$이므로

$b=\sqrt[4]{2}$ … ❸

$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a^4}{b^4}=\frac{(-2)^4}{(\sqrt[4]{2})^4}=\frac{16}{2}=8$ … ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ $\sqrt[3]{-512}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\left(\frac{a}{b}\right)^4$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0058

9는 홀수이므로 10의 9제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[9]{10}$의 1개이다.

$\therefore f(10, 9)=1$

10은 짝수이고 9는 양수이므로 9의 10제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[10]{9}$, $-\sqrt[10]{9}$의 2개이다.

$\therefore f(9, 10)=2$

9는 홀수이므로 -10의 9제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[9]{-10}$의 1개이다.

$\therefore f(-10, 9)=1$

10은 짝수이고 -9는 음수이므로 -9의 10제곱근 중 실수인 것은 없다.

$\therefore f(-9, 10)=0$

$\therefore f(10, 9)+f(9, 10)-f(-10, 9)-f(-9, 10)$

$=1+2-1-0=2$ 답 ④

0059

(i) $n=2$일 때

$2n^2-7n=2\cdot2^2-7\cdot2=-6$

-6의 제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$f(2)=0$

(ii) $n=3$일 때

$2n^2-7n=2\cdot3^2-7\cdot3=-3$

-3의 3제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-3}$의 1개이므로

$f(3)=1$

(iii) $n=4$일 때

$2n^2-7n=2\cdot4^2-7\cdot4=4$

4의 4제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{4}$, $-\sqrt[4]{4}$의 2개이므로

$f(4)=2$

(iv) $n=5$일 때

$2n^2-7n=2\cdot5^2-7\cdot5=15$

15의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{15}$의 1개이므로

$f(5)=1$

(i)~(iv)에서

$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0+1+2+1=4$ 답 ④

0060

$A=\{-3, -2, 2, 3\}$이고

$(-2)^2=2^2=4$, $(-3)^2=3^2=9$이므로 $B=\{4, 9\}$

(i) $y=4$일 때

$\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[4]{-2}$는 실수가 아니고, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$은 실수이다.

(ii) $y=9$일 때

$\sqrt[9]{-3}$, $\sqrt[9]{-2}$, $\sqrt[9]{2}$, $\sqrt[9]{3}$은 모두 실수이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$(2, 4)$, $(3, 4)$, $(-3, 9)$, $(-2, 9)$, $(2, 9)$, $(3, 9)$의 6이다.

답 ③

0061

(i) n이 홀수일 때

$-n^2+11n-28$의 n제곱근 중 음수가 존재하려면

$-n^2+11n-28<0$이어야 한다.

$-n^2+11n-28<0$에서 $n^2-11n+28>0$

$(n-4)(n-7)>0$ $\therefore n<4$ 또는 $n>7$

이때 $2\le n\le12$이므로 $2\le n<4$ 또는 $7<n\le12$

즉, 조건을 만족시키는 홀수 n의 값은 3, 9, 11이다.

(ii) n이 짝수일 때

$-n^2+11n-28$의 n제곱근 중 음수가 존재하려면

$-n^2+11n-28>0$이어야 한다.

$-n^2+11n-28>0$에서 $n^2-11n+28<0$

$(n-4)(n-7)<0$ $\therefore 4<n<7$

즉, 조건을 만족시키는 짝수 n의 값은 6이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+6+9+11=29$ 답 ②

유형 02 거듭제곱근의 계산 개념 03

근호 안의 수를 소인수분해한 다음 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

⇨ $a>0, b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

0062

ㄱ. $(\sqrt[4]{2})^4=2$, $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$이므로

$(\sqrt[4]{2})^4\ne(\sqrt[3]{-2})^3$ (거짓)

ㄴ. $\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[3\times2]{3}=\sqrt[6]{3}$ (참)

ㄷ. $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5\times2}=\sqrt[3]{10}$ (참)

ㄹ. $\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[2\times6]{2^{1\times6}}=\sqrt{2}\ne\sqrt[4]{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0063

① $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

② $\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

③ $(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt[4]{9^2}=\sqrt[4]{(3^2)^2}=\sqrt[4]{3^4}=3$

④ $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^5}}{\sqrt[4]{3^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^5}{3^2}}=\sqrt[4]{3^3}$

⑤ $\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{243}=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{3^5}=\sqrt[6]{3\times3^5}=\sqrt[6]{3^6}=3$

따라서 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다. 답 ④

0064

$(\sqrt[5]{32})^2\div\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[5]{32^2}\div\sqrt[3]{(2^2)^3}\times\sqrt[6]{64}$

$=\sqrt[5]{(2^2)^5}\div\sqrt[3]{(2^2)^3}\times\sqrt[6]{2^6}$

$=4\div4\times2=2$ 답 2

0065

$\sqrt[4]{(-4)^4}-\sqrt[5]{(-7)^5}-\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{15}}}+\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

$=\sqrt[4]{4^4}-\sqrt[5]{(-7)^5}-\sqrt[15]{2^{15}}+\sqrt[3]{\dfrac{81}{3}}$

$=4-(-7)-2+\sqrt[3]{3^3}$

$=4+7-2+3=12$ 답 ⑤

0066

$\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{5^5}}{\sqrt[3]{7}}}\times\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[n]{5^9}}}=\dfrac{\sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[12]{7}}\times\dfrac{\sqrt[12]{7}}{\sqrt[6n]{5^9}}=\dfrac{\sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[6n]{5^9}}$

$\dfrac{\sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[6n]{5^9}}=\sqrt[8]{25}=\sqrt[8]{5^2}$에서

$\sqrt[6n]{5^9}=\dfrac{\sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^2}}=\sqrt[8]{\dfrac{5^5}{5^2}}=\sqrt[8]{5^3}=\sqrt[24]{5^9}$

따라서 $6n=24$이므로 $n=4$ 답 ②

0067

$$(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{\frac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}$$
$$=\{(\sqrt[4]{6})^2-(\sqrt[4]{2})^2\}(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{\frac{(3^2)^7+3^{11}}{(3^2)^4+3^5}}$$
$$=(\sqrt[4]{6^2}-\sqrt[4]{2^2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{\frac{3^{14}+3^{11}}{3^8+3^5}}$$
$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{\frac{3^{11}(3^3+1)}{3^5(3^3+1)}}$$
$$=\{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2\}+\sqrt{3^6}$$
$$=(6-2)+3^3$$
$$=4+27=31$$

답 31

유형 03 문자를 포함한 거듭제곱근의 계산 개념 03

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때
$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (p는 자연수)
임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

0068

$$\sqrt{a^4b}\times\sqrt[6]{a^4b}\div\sqrt[3]{a^5b^2}=\frac{\sqrt[6]{a^{12}b^3}\times\sqrt[6]{a^4b}}{\sqrt[6]{a^{10}b^4}}=\sqrt[6]{\frac{a^{16}b^4}{a^{10}b^4}}$$
$$=\sqrt[6]{a^6}=a$$

답 ①

0069

$$\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[8]{a}}=\frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[8]{a^2}}=\frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a}}$$
$$=\frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[12]{a^3}}=\sqrt[12]{a^2}=\sqrt[6]{a}$$

따라서 $m=6, n=1$이므로
$m+n=6+1=7$

답 7

0070

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[10]{x}}}\div\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}=\frac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[20]{x}}\div\frac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[20]{x}}$$
$$=\frac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[20]{x}}\times\frac{\sqrt[20]{x}}{\sqrt[15]{x}}=1$$

답 ②

0071

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[24]{a}=\sqrt[24]{a^{12}}\times\sqrt[24]{a^8}\times\sqrt[24]{a}$$
$$=\sqrt[24]{a^{12}\times a^8\times a}=\sqrt[24]{a^{21}}=\sqrt[8]{a^7}$$

따라서 $m=8, n=7$이므로
$m+n=8+7=15$

답 ②

0072

ㄱ. $R(2,4)=\sqrt[2]{4}=\sqrt[4]{16}=R(4,16)$ (참)
ㄴ. $R(5,a)\cdot R(5,b)=\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{ab}=R(5,ab)$ (참)
ㄷ. $R(a,a)=R(3a,27)$에서 $\sqrt[a]{a}=\sqrt[3a]{27}=\sqrt[a]{3}$
$\therefore a=3$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

유형 04 거듭제곱근의 대소 비교 개념 03, 04

$a>0, b>0, n$은 2 이상의 자연수일 때
$a<b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

0073

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}, B=\sqrt{3}, C=\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[6]{16}$
6, 2의 최소공배수가 6이므로 $A=\sqrt[6]{10}, B=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}, C=\sqrt[6]{16}$
$10<16<27$이므로 $\sqrt[6]{10}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[6]{27}$
$\therefore A<C<B$

답 ②

다른 풀이 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=10^{\frac{1}{6}}, B=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}, C=\sqrt{\sqrt[3]{16}}=16^{\frac{1}{6}}$
세 수의 지수 $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$에서 분모의 최소공배수 6으로 통분하여 지수를 같게 하면 $A=10^{\frac{1}{6}}, B=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}, C=16^{\frac{1}{6}}$
$10<16<27$이므로 $10^{\frac{1}{6}}<16^{\frac{1}{6}}<27^{\frac{1}{6}}$ $\therefore A<C<B$

0074

$\sqrt[3]{\sqrt{7}}=\sqrt[6]{7}$이고, 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로
$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}, \sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}, \sqrt[6]{7}=\sqrt[12]{7^2}=\sqrt[12]{49}$ … ❶
$49<81<125$이므로 $\sqrt[3]{\sqrt{7}}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$ … ❷
따라서 $a=\sqrt[4]{5}, b=\sqrt[3]{\sqrt{7}}$이므로
$a^{12}-b^{12}=(\sqrt[4]{5})^{12}-(\sqrt[3]{\sqrt{7}})^{12}=(\sqrt[12]{125})^{12}-(\sqrt[12]{49})^{12}$
$=125-49=76$ … ❸

답 76

채점 기준	비율
❶ 3, 4, 6의 최소공배수를 이용하여 세 수를 제곱근의 형태로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 세 수의 대소 관계를 알아낼 수 있다.	30 %
❸ $a^{12}-b^{12}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0075

$A-B=(2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-(\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3})=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$
$=\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}<0$
$\therefore A<B$ …… ㉠
$B-C=(\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3})-(2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2})=2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5})$
$=2(\sqrt[12]{3^4}-\sqrt[12]{5^3})=2(\sqrt[12]{81}-\sqrt[12]{125})<0$
$\therefore B<C$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $A<B<C$

답 ①

Lecture
두 수 또는 두 식의 대소 관계를 판정할 때는 다음을 이용한다.
(1) $a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$
(2) $a^2-b^2>0 \Longleftrightarrow a^2>b^2 \Longleftrightarrow a>b$ (단, $a>0, b>0$)
(3) $\frac{a}{b}>1 \Longleftrightarrow a>b$ (단, $a>0, b>0$)

0076

n이 자연수이므로 $n<\sqrt[4]{2025}<n+1$에서
$\sqrt[4]{n^4}<\sqrt[4]{2025}<\sqrt[4]{(n+1)^4}$, 즉 $n^4<2025<(n+1)^4$
이때 $6^4=1296, 7^4=2401$이므로 $n=6$

답 6

유형 05 지수가 정수인 식의 계산 개념 04

(1) $a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$a^0=1,\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) $a\neq0,\ b\neq0$이고 $m,\ n$이 정수일 때

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^n b^n$

0077

$$\frac{3^{-5}+27^{-2}}{4}\times\frac{5}{4^3+16^2}=\frac{3^{-5}+(3^3)^{-2}}{4}\times\frac{5}{(2^2)^3+(2^4)^2}$$
$$=\frac{3^{-6}(3+1)}{4}\times\frac{5}{2^6(1+2^2)}$$
$$=3^{-6}\times2^{-6}=6^{-6}$$

$\therefore k=-6$ 답 ①

0078

$$f(x)=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+\cdots+x^{-12}}$$
$$=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{x^{-12}(x^{10}+x^9+x^8+\cdots+1)}$$
$$=\frac{1}{x^{-12}}=x^{12}$$

$\therefore f(\sqrt[6]{3})=(\sqrt[6]{3})^{12}=3^2=9$ 답 ③

0079

자연수 n에 대하여 $\dfrac{1}{2^{-n}+1}=\dfrac{2^n}{1+2^n}$이므로

$$\frac{1}{2^{-n}+1}+\frac{1}{2^n+1}=\frac{2^n}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+1}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2^{-5}+1}+\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^{-3}+1}+\cdots+\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2+1}+\cdots+\frac{1}{2^5+1}$$
$$=\left(\frac{1}{2^{-5}+1}+\frac{1}{2^5+1}\right)+\left(\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots+\frac{1}{2^0+1}$$
$$=1+1+1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$$ 답 ④

0080

$$\frac{a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}+a^{-12}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$$
$$=\frac{a^{-14}(a^{10}+a^8+a^6+a^4+a^2)}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$$
$$=a^{-14}$$
$$=(\sqrt[7]{1+\sqrt{2}})^{-14}=(1+\sqrt{2})^{-2}$$
$$=\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$
$$=3-2\sqrt{2}$$ 답 $3-2\sqrt{2}$

유형 06 지수가 실수인 식의 계산 개념 04

$a>0,\ b>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

(1) $a^x a^y=a^{x+y}$ (2) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y=a^{xy}$ (4) $(ab)^x=a^x b^x$

0081

$$\left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3^3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3^3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3^{-\frac{3}{2}}\times3^{\frac{3}{2}}}{5^{-\frac{3}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{1}{5^{-1}}=5$$ 답 5

0082

$$10^{\frac{5}{2}}\times(25^2)^{\frac{3}{4}}\div(20\times4^{-3})$$
$$=(2\times5)^{\frac{5}{2}}\times(5^4)^{\frac{3}{4}}\div\{(2^2\times5)\times2^{-6}\}$$
$$=(2^{\frac{5}{2}}\times5^{\frac{5}{2}})\times5^3\div(2^{-4}\times5)$$
$$=2^{\frac{5}{2}-(-4)}\times5^{\frac{5}{2}+3-1}$$
$$=2^{\frac{13}{2}}\times5^{\frac{9}{2}}$$

따라서 $p=\dfrac{13}{2},\ q=\dfrac{9}{2}$이므로

$p+q=\dfrac{13}{2}+\dfrac{9}{2}=11$ 답 ④

0083

$$(a^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{3}}\div a^{3\sqrt{6}}\times(\sqrt[3]{a})^{6\sqrt{6}}=a^{2\sqrt{6}}\div a^{3\sqrt{6}}\times(a^{\frac{1}{3}})^{6\sqrt{6}}$$
$$=a^{2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}}=a^{\sqrt{6}}$$

$\therefore k=\sqrt{6}$ 답 ③

0084

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{a+3b}{a-b}}\times\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2a}{a-b}}\times\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2b}{a-b}}$$
$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{a+3b}{a-b}}\times\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2a}{a-b}}\times\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2b}{a-b}}$$
$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{a+3b}{a-b}+\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{a-b}}$$
$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}=\frac{a+b}{a-b}$$ 답 ②

유형 07 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기 개념 03, 04

$a>0$이고 $m,\ n\ (n\geq2)$이 정수일 때, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

0085

$$\sqrt{\sqrt[4]{3}}=(3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}$$
$$3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3\times\{3\times(3\times3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=3\times\{3\times(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=3\times(3\times3^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=3\times(3^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=3\times3^{\frac{7}{8}}=3^{\frac{15}{8}}$$

(좌변)$=3^{\frac{1}{8}}\times3^{\frac{15}{8}}=3^{\frac{1}{8}+\frac{15}{8}}=3^2$

$\therefore k=2$ 답 2

0086

$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{6}\times\sqrt[9]{9}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times(2\times3)^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{9}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{2}{9}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{13}{18}}$

따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{13}{18}$이므로

$p+q=\frac{2}{3}+\frac{13}{18}=\frac{25}{18}$ 답 ③

0087

이차방정식 $3x^2-9x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$ … ❶

$\sqrt[3]{7^\alpha}\times\sqrt[3]{7^\beta}=7^{\frac{\alpha}{3}}\times7^{\frac{\beta}{3}}=7^{\frac{\alpha+\beta}{3}}$, $(343^\alpha)^\beta=7^{3\alpha\beta}$ … ❷

$\therefore\ \frac{\sqrt[3]{7^\alpha}\times\sqrt[3]{7^\beta}}{(343^\alpha)^\beta}=\frac{7^{\frac{\alpha+\beta}{3}}}{7^{3\alpha\beta}}=\frac{7}{7^{-1}}=7^2=49$ … ❸

답 49

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식을 α, β를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{\sqrt[3]{7^\alpha}\times\sqrt[3]{7^\beta}}{(343^\alpha)^\beta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0088

$\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^k}}=(a\times a^{\frac{k}{5}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{5+k}{5}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5+k}{15}}$

$a^{\frac{5+k}{15}}=a^{\frac{3}{2}}$이므로

$\frac{k+5}{15}=\frac{3}{2}$, $k+5=\frac{45}{2}$ $\therefore\ k=\frac{35}{2}$ 답 ⑤

0089

$\sqrt{\sqrt{a}}=\{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{8}}$

$\sqrt[4]{a\sqrt{a}}=(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{8}}$

$a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{3}{8}}=a^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}}=a^{\frac{1}{2}}$ $\therefore\ k=\frac{1}{2}$ 답 ④

0090

$\sqrt[4]{a\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{a^2}}=(a\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{11}{6}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{11}{24}}$

$\sqrt[3]{a\sqrt[8]{a^n}}=(a\times a^{\frac{n}{8}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{8+n}{8}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{8+n}{24}}$

$a^{\frac{11}{24}}=a^{\frac{8+n}{24}}$이므로

$\frac{11}{24}=\frac{n+8}{24}$, $n+8=11$ $\therefore\ n=3$ 답 3

0091

$\sqrt[3]{5\sqrt{5}\times\frac{5}{\sqrt[4]{5}}}=\{(5\times5^{\frac{1}{2}})\times(5\div5^{\frac{1}{4}})\}^{\frac{1}{3}}$

$=(5^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(5^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{3}{4}}$

따라서 $m=4$, $n=3$이므로

$mn=4\cdot3=12$ 답 ⑤

0092

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^3}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^n}}{a\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}}{(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}}\times\frac{(a^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}\times\frac{(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}$

$=a^{\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{n}{6}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{3}\right)}=a^{\frac{n-3}{6}}$

$a^{\frac{n-3}{6}}=1$이므로

$\frac{n-3}{6}=0$ $\therefore\ n=3$ 답 ③

유형 08 거듭제곱을 문자로 나타내기 개념 04

$a>0$이고 x가 0이 아닌 정수일 때

$a^x=k\Longleftrightarrow a=k^{\frac{1}{x}}$ (단, $k>0$)

0093

$a=9^4=(3^2)^4=3^8$에서 $3=a^{\frac{1}{8}}$

$b=8^3=(2^3)^3=2^9$에서 $2=b^{\frac{1}{9}}$

$\therefore\ 12^{12}=(2^2\times3)^{12}=2^{24}\times3^{12}=(b^{\frac{1}{9}})^{24}\times(a^{\frac{1}{8}})^{12}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{8}{3}$이므로

$p+q=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{25}{6}$ 답 $\frac{25}{6}$

0094

$a=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$에서 $3=a^2$

$b=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$에서 $5=b^3$

$\therefore\ \sqrt[6]{45}=45^{\frac{1}{6}}=(3^2\times5)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{6}}$

$=(a^2)^{\frac{1}{3}}\times(b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ 답 ②

0095

$a=2^{3x+1}=2\times2^{3x}$에서 $2^{3x}=\frac{a}{2}$

$\therefore\ 64^x=(2^6)^x=(2^{3x})^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$ 답 ②

0096

$a=\sqrt[3]{32}=2^{\frac{5}{3}}$에서 $2=a^{\frac{3}{5}}$

$b=\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$에서 $3=b^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ 144=2^4\times3^2=(a^{\frac{3}{5}})^4\times(b^{\frac{4}{3}})^2=a^{\frac{12}{5}}b^{\frac{8}{3}}$ 답 ⑤

유형 09 거듭제곱이 자연수가 될 조건 개념 04

자연수 a가 소수이고 p, q가 자연수일 때

$a^{\frac{q}{p}}$이 자연수 $\Longleftrightarrow$ q는 p의 배수 (p는 q의 약수)

0097

$\left(\frac{1}{729}\right)^{-\frac{1}{n}}=729^{\frac{1}{n}}=(3^6)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{6}{n}}$

$3^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 6의 약수이어야 한다.

따라서 정수 n의 개수는 1, 2, 3, 6의 4이다. 답 ④

0098

$a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$에서

$a=3^{\frac{1}{6}}$, $b=7^{\frac{1}{5}}$, $c=11^{\frac{1}{2}}$

$(abc)^n=(3^{\frac{1}{6}}\times 7^{\frac{1}{5}}\times 11^{\frac{1}{2}})^n$이 자연수가 되려면 n은 6, 5, 2의 공배수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

답 ②

0099

$(\sqrt{5^n})^{\frac{1}{2}}=(5^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{n}{4}}$

$\sqrt[n]{5^{100}}=5^{\frac{100}{n}}$

$5^{\frac{n}{4}}$과 $5^{\frac{100}{n}}$이 모두 자연수가 되려면 n은 4의 배수이면서 100의 약수이어야 한다.

이때 $100=2^2\times 5^2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은

2^2, $2^2\times 5$, $2^2\times 5^2$이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값의 합은

$4+20+100=124$

답 ③

0100

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=[\{2\times(2^2)^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}]^n=\{(2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^n=2^{\frac{5n}{6}}$ … ❶

$2^{\frac{5n}{6}}$이 자연수가 되려면 n은 6의 배수이어야 한다. … ❷

이때

$n=6$이면 $2^{\frac{5n}{6}}=2^5=32$

$n=12$이면 $2^{\frac{5n}{6}}=2^{10}=1024$

$n=18$이면 $2^{\frac{5n}{6}}=2^{15}=32768$

⋮

따라서 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n$이 네 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 12이다. … ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n$을 2^k 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n$이 자연수가 되기 위한 조건을 찾을 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 10 곱셈 공식을 이용한 식의 전개 개념 04

$a>0$, $b>0$이고 p, q가 실수일 때

(1) $(a^p+b^q)(a^p-b^q)=a^{2p}-b^{2q}$

(2) $(a^p\pm b^q)^2=a^{2p}\pm 2a^pb^q+b^{2q}$ (복호동순)

(3) $(a^p\pm b^q)^3=a^{3p}\pm 3a^{2p}b^q+3a^pb^{2q}\pm b^{3q}$ (복호동순)

0101

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+1)(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}-1)=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-1^2$

$=a+2+a^{-1}-1$

$=a+a^{-1}+1$

답 ⑤

0102

$2^{\frac{1}{3}}=A$, $2^{-\frac{2}{3}}=B$로 놓으면

$(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}})^3+(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{2}{3}})^3$

$=(A+B)^3+(A-B)^3$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3+A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

$=2(A^3+3AB^2)$

$=2\{(2^{\frac{1}{3}})^3+3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot(2^{-\frac{2}{3}})^2\}$

$=2(2+3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}})=2(2+3\cdot 2^{-1})$

$=2\left(2+\frac{3}{2}\right)=7$

답 7

0103

$(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b)(a^{\frac{1}{2}}+b^2)$

$=(a^{\frac{1}{4}}-b)(a^{\frac{1}{4}}+b)(a^{\frac{1}{2}}+b^2)$

$=(a^{\frac{1}{2}}-b^2)(a^{\frac{1}{2}}+b^2)$

$=a-b^4$

$=\sqrt[3]{27}-(\sqrt{3})^4$

$=3-9=-6$

답 ①

0104

$\frac{1}{1-x^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{8}}}=\frac{1+x^{\frac{1}{8}}+1-x^{\frac{1}{8}}}{(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})}=\frac{2}{1-x^{\frac{1}{4}}}$

$\frac{2}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+x^{\frac{1}{4}}}=\frac{2(1+x^{\frac{1}{4}}+1-x^{\frac{1}{4}})}{(1-x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{4}})}=\frac{4}{1-x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{4}{1-x^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+x^{\frac{1}{2}}}=\frac{4(1+x^{\frac{1}{2}}+1-x^{\frac{1}{2}})}{(1-x^{\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})}=\frac{8}{1-x}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{8}{1-x}+\frac{8}{1+x}=\frac{8(1+x+1-x)}{(1-x)(1+x)}$

$=\frac{16}{1-x^2}=\frac{16}{1-(\sqrt{5})^2}=\frac{16}{1-5}=-4$

답 −4

유형 11 $a^x\pm a^{-x}=k$ (k는 상수) 꼴의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기 개념 04

$a>0$일 때

(1) $(a^{\frac{1}{2}}\pm a^{-\frac{1}{2}})^2=a\pm 2+a^{-1}$ (복호동순)

(2) $(a^{\frac{1}{3}}\pm a^{-\frac{1}{3}})^3=a\pm 3(a^{\frac{1}{3}}\pm a^{-\frac{1}{3}})\pm a^{-1}$ (복호동순)

임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

0105

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=9$ $\therefore a+a^{-1}=7$

$a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=49$ $\therefore a^2+a^{-2}=47$

$\therefore \frac{a^2+a^{-2}-7}{a+a^{-1}-3}=\frac{47-7}{7-3}=\frac{40}{4}=10$

답 ①

0106

$5^x+5^{1-x}=6$의 양변을 제곱하면

$5^{2x}+2\cdot5^x\cdot5^{1-x}+5^{2(1-x)}=36$

$25^x+10+25^{1-x}=36$

$\therefore\ 25^x+25^{1-x}=26$ 답 ③

다른 풀이 $5^x=t\,(t>0)$라 하면 $5^{1-x}=\frac{5}{t}$이므로

$5^x+5^{1-x}=6$에서 $t+\frac{5}{t}=6$

$\therefore\ 25^x+25^{1-x}=(5^x)^2+(5^{1-x})^2$

$=t^2+\left(\frac{5}{t}\right)^2$

$=\left(t+\frac{5}{t}\right)^2-10$

$=6^2-10=26$

0107

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a-2+a^{-1}=11-2=9$

그런데 $a>1$이므로

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}>0$ ($=a^{-\frac{1}{2}}(a-1)>0\ (\because a>1)$)

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$ … ❶

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}-3(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-a^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=27+3\cdot3=36$ … ❷

$\therefore\ \frac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+14}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}+2}=\frac{36+14}{3+2}=\frac{50}{5}=10$ … ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0108

$\frac{a^3+a^2}{a+1}-\frac{a^{-3}+a^{-2}}{a^{-1}+1}=\frac{a^2(a+1)}{a+1}-\frac{a^{-2}(a^{-1}+1)}{a^{-1}+1}$

$=a^2-a^{-2}$

$=(a+a^{-1})(a-a^{-1})$

$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$a-2+\frac{1}{a}=2\qquad\therefore\ a+a^{-1}=4$

한편,

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=4^2-4=12$

그런데 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}>0$, 즉 $\frac{a-1}{\sqrt{a}}>0$에서 $a>1$이므로

$a-a^{-1}>0$ ($=a^{-1}(a^2-1)>0\ (\because a>1)$)

$\therefore\ a-a^{-1}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (주어진 식) $=(a+a^{-1})(a-a^{-1})$

$=4\cdot2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 답 $8\sqrt{3}$

유형 12 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기 개념 04

$a^x=k\,(a>0,\ k$는 상수)가 주어질 때, 이를 이용할 수 있도록 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱한다.

0109

주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{(a^{2x})^2-1}{a^{2x}+1}=\frac{25-1}{5+1}=4$ 답 ④

0110

$2^{\frac{1}{x}}=9$에서 $9^x=2\qquad\therefore\ 3^{2x}=2$

주어진 식의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$\frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x(3^{3x}-3^{-3x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\frac{3^{4x}-3^{-2x}}{3^{2x}+1}$

$=\frac{(3^{2x})^2-(3^{2x})^{-1}}{3^{2x}+1}=\frac{4-\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{7}{6}$ 답 ②

0111

주어진 식의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\frac{2^{5x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^x(2^{5x}+2^{-3x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\frac{2^{6x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}$

$=\frac{(2^{2x})^3+(2^{2x})^{-1}}{2^{2x}+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^3+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)+1}$

$=\frac{(2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}$

$=\frac{6+6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{6(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ 답 ①

0112

주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{1}{3}$ … ❶

$3a^{2x}-3=a^{2x}+1,\ 2a^{2x}=4$

$a^{2x}=2\qquad\therefore\ a^x=\sqrt{2}\ (\because a>0)$ … ❷

$\therefore\ \frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ … ❸

답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 곱하여 정리할 수 있다.	20 %
❷ a^{2x}, a^x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 13 $a^x=k$ (k는 상수)의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기 개념 04

$a^x=b^y=k\,(a>0, b>0, xy\neq 0, k$는 상수)일 때
⇨ $a=k^{\frac{1}{x}}, b=k^{\frac{1}{y}}$
⇨ $ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, a\div b=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

0113

$67^x=27$에서 $67=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠
$603^y=81$에서 $603=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡
㉠÷㉡을 하면 $\frac{67}{603}=3^{\frac{3}{x}}\div 3^{\frac{4}{y}}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$
$\frac{1}{9}=3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$ $\therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$ 답 ①

0114

$2^x=36$에서 $2=36^{\frac{1}{x}}=(6^2)^{\frac{1}{x}}=6^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠
$3^y=36$에서 $3=36^{\frac{1}{y}}=(6^2)^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡
㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{2}{x}}\times 6^{\frac{2}{y}}=6^{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$
$1=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0115

$a^x=243$에서 $a=243^{\frac{1}{x}}=(3^5)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠
$b^y=243$에서 $b=243^{\frac{1}{y}}=(3^5)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$ …… ㉡
$c^z=243$에서 $c=243^{\frac{1}{z}}=(3^5)^{\frac{1}{z}}=3^{\frac{5}{z}}$ …… ㉢
㉠×㉡×㉢을 하면 $abc=3^{\frac{5}{x}}\times 3^{\frac{5}{y}}\times 3^{\frac{5}{z}}=3^{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$
$abc=27$이므로 $3^3=3^{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$
$3=5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$
$\therefore \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{5}$ 답 ②

0116

$20^y=2$에서 $20^{-y}=\frac{1}{2}$
이 식의 양변에 20을 곱하면
$20^{1-y}=10$ $\therefore 10^{\frac{1}{1-y}}=20$
$\therefore 10^{\frac{2x}{1-y}}=(10^{\frac{1}{1-y}})^{2x}=20^{2x}=(20^x)^2=3^2=9$ 답 ⑤

발전 유형 14 $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기 개념 04

$a^x=b^y=c^z\,(a>0, b>0, c>0, xyz\neq 0)$과 같이 밑이 서로 다른 경우가 주어지면 새로운 변수를 사용하여 밑을 같게 한다.
⇨ $a^x=b^y=c^z=k\,(k>0)$로 놓는다.

0117

$3^x=5^y=15^z=k\,(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$
$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠
$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡
$15^z=k$에서 $15=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢
㉠×㉡÷㉢을 하면
$3\times 5\div 15=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$
$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$
그런데 $k\neq 1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ 답 ③

0118

$4^x=9^y=25^z=k\,(k>0)$로 놓으면
$4^x=2^{2x}=k$에서 $2=k^{\frac{1}{2x}}$ …… ㉠
$9^y=3^{2y}=k$에서 $3=k^{\frac{1}{2y}}$ …… ㉡
$25^z=5^{2z}=k$에서 $5=k^{\frac{1}{2z}}$ …… ㉢
㉠×㉡×㉢을 하면
$2\times 3\times 5=k^{\frac{1}{2x}}\times k^{\frac{1}{2y}}\times k^{\frac{1}{2z}}$
$\therefore k^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}}=30$
이때 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}=2$이므로 $k^2=30$
$\therefore 16^x=(4^x)^2=k^2=30$ 답 30

0119

$a^x=b^y=3^z=k\,(k>0)$로 놓으면
$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$
$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$
$3^z=k$에서 $3=k^{\frac{1}{z}}$ … ❶
이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로
$ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^2$ … ❷
$\therefore ab=3^2=9$ … ❸
답 9

채점 기준	비율
❶ $a, b, 3$을 k^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ ab의 값을 k에 대한 거듭제곱 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 15 지수의 실생활에의 활용 개념 04

(1) 식이 주어진 경우 ⇨ 주어진 식에 알맞은 값을 대입한다.
(2) 식을 구하는 경우 ⇨ 조건에 맞도록 식을 세우고 지수법칙을 이용한다.

0120

2일 후의 A 성분의 양이 $\frac{1}{2}m_0$이므로
$\frac{1}{2}m_0=m_0\cdot r^{-2}$ $\therefore r^{-2}=\frac{1}{2}$
따라서 8일 후의 A 성분의 양은
$m_8=m_0\cdot r^{-8}=m_0\cdot (r^{-2})^4=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}m_0$
$\therefore k=\frac{1}{16}$ 답 $\frac{1}{16}$

0121

pH=6.3인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소이온의 g이온수는 $10^{-6.3}$

pH=7.7인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소이온의 g이온수는 $10^{-7.7}$

$$\therefore \frac{10^{-6.3}}{10^{-7.7}}=10^{-6.3+7.7}=10^{1.4}=10^{2-0.6}$$

$$=10^2\times\frac{1}{10^{0.6}}=100\times\frac{1}{4}=25$$

따라서 pH=6.3인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소이온의 g이온수는 pH=7.7인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소이온의 g이온수의 25배이다. 답 ①

0122

펌프의 1분당 회전수가 N으로 일정할 때

$S_1=N\times36^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}$

$S_2=N\times12^{\frac{1}{2}}\times15^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times36^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times15^{-\frac{3}{4}}}=\frac{(3\times12)^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{12^{\frac{1}{2}}\times(3\times5)^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times12^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{12^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{3}{4}}\times5^{-\frac{3}{4}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=3^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=3^{\frac{5}{4}}$$ 답 ⑤

0123

A 지역에서는

$H_1=14\,(\mathrm{m}), H_2=28\,(\mathrm{m}), V_1=2\,(\mathrm{m/s}), V_2=6\,(\mathrm{m/s})$이므로

$$6=2\times\left(\frac{28}{14}\right)^{\frac{2}{2-k}} \qquad \therefore 3=2^{\frac{2}{2-k}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

B 지역에서는

$H_1=10\,(\mathrm{m}), H_2=80\,(\mathrm{m}), V_1=a\,(\mathrm{m/s}), V_2=b\,(\mathrm{m/s})$이므로

$$b=a\times\left(\frac{80}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}} \qquad \therefore \frac{b}{a}=8^{\frac{2}{2-k}}$$

이때 A 지역과 B 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같으므로

$$\frac{b}{a}=8^{\frac{2}{2-k}}=(2^3)^{\frac{2}{2-k}}=(2^{\frac{2}{2-k}})^3=3^3=27\ (\because ㉠)$$ 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0124

유형 01 거듭제곱근

|전략| 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각한다.

ㄱ. 0의 n제곱근은 0이다. (거짓)

ㄴ. n이 홀수일 때, $-a$의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-a}$이고 이것은 $-\sqrt[n]{a}$와 같다. (참)

ㄷ. n이 짝수일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{a}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0125

유형 01 거듭제곱근 + 02 거듭제곱근의 계산

|전략| 먼저 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하여 a의 값을 구한다.

a의 네제곱근 중 양수인 것이 $\sqrt[3]{4}$이므로

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{4} \qquad \therefore a=(\sqrt[3]{4})^4=\sqrt[3]{(2^2)^4}=\sqrt[3]{2^8}$$

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

$$a=\sqrt[3]{k}=\sqrt[3]{2^8} \qquad \therefore k=(\sqrt[3]{2^8})^3=2^8=256$$ 답 ⑤

다른 풀이 양수 k의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

$a=\sqrt[3]{k}$

a의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[4]{a}$이므로 $\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{4}$에서

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{k}}=\sqrt[3]{4}, \sqrt[12]{k}=\sqrt[12]{4^4}$

$\therefore k=4^4=256$

0126

유형 02 거듭제곱근의 계산

|전략| $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$임을 이용한다.

$$(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{16})$$

$$=(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{9^2}-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})$$

$$=(\sqrt[3]{9})^3+(\sqrt[3]{4})^3$$

$$=9+4=13$$ 답 ④

0127

유형 03 문자를 포함한 거듭제곱근의 계산

|전략| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 간단히 한다.

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[15]{a}}\times\frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[20]{a}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[20]{a}}$$

$$=\frac{\sqrt[60]{a^5}}{\sqrt[60]{a^3}}=\sqrt[60]{\frac{a^5}{a^3}}$$

$$=\sqrt[60]{a^2}=\sqrt[30]{a}$$

이때 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$이므로 $\sqrt[30]{a}=\sqrt[mn]{a}$

$\therefore mn=30$

그런데 m, n은 2보다 큰 자연수이므로

$$\begin{cases}m=3\\n=10\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}m=5\\n=6\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}m=6\\n=5\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}m=10\\n=3\end{cases}$$

따라서 $m+n$의 최댓값은 13이다. 답 ②

0128

유형 04 거듭제곱근의 대소 비교

|전략| $a>0, b>0$, n은 2 이상의 자연수일 때, $a<b$이면 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$임을 이용한다.

$$\sqrt{2\sqrt[4]{2}}=\sqrt{2}\times\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4}\times\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4\times2}=\sqrt[8]{32}$$

$$\sqrt[4]{4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{4}\times\sqrt[8]{5}=\sqrt[8]{4^2}\times\sqrt[8]{5}=\sqrt[8]{4^2\times5}=\sqrt[8]{80}$$

$$\sqrt[4]{5\sqrt{3}}=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[8]{3}=\sqrt[8]{5^2}\times\sqrt[8]{3}=\sqrt[8]{5^2\times3}=\sqrt[8]{75}$$

$32<75<80$이므로 $\sqrt[8]{32}<\sqrt[8]{75}<\sqrt[8]{80}$

따라서 $a=\sqrt[8]{32}, b=\sqrt[8]{80}$이므로 부등식 $\sqrt[8]{32}<\sqrt[8]{n}<\sqrt[8]{80}$, 즉 $32<n<80$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 33, 34, 35, …, 79의 47이다. 답 ③

0129

유형 06 지수가 실수인 식의 계산

|전략| $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}$을 밑이 3이고 지수가 실수인 식으로 변형한다.

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=\left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{a}{12}}=(3^{-3})^{\frac{a}{12}}=3^{-\frac{a}{4}}$$
$$=(3^a)^{-\frac{1}{4}}=16^{-\frac{1}{4}}=(2^4)^{-\frac{1}{4}}$$
$$=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

답 ②

0130

유형 07 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기

|전략| $a>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$임을 이용한다.

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}=[\{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=\{(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{16}}$$
$$\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}}=\{a\times(a\times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a\times(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{4}}$$
$$=(a\times a^{\frac{5}{16}})^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{21}{16}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{21}{64}}$$

즉, (좌변)$=a^{\frac{1}{16}}\times a^{\frac{21}{64}}=a^{\frac{1}{16}+\frac{21}{64}}=a^{\frac{25}{64}}$이므로

$k=\frac{25}{64}$

답 ③

0131

유형 08 거듭제곱을 문자로 나타내기

|전략| $a=k^{\frac{1}{x}}$이면 $a^x=k$임을 이용한다.

$a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$에서 $2=a^3$

$b=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$에서 $3=b^2$

$$\therefore \sqrt[6]{12}=12^{\frac{1}{6}}=(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$$
$$=(a^3)^{\frac{1}{3}}\times(b^2)^{\frac{1}{6}}=ab^{\frac{1}{3}}$$

답 ⑤

0132

유형 10 곱셈 공식을 이용한 식의 전개

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+2kx+6=0$의 서로 다른 두 양의 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=6$

$$\therefore \frac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{\alpha^{-2}-\beta^{-2}}=\frac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{(\alpha^{-1}+\beta^{-1})(\alpha^{-1}-\beta^{-1})}=\frac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{6}{-2k}=-\frac{3}{k}$$

따라서 $-\frac{3}{k}=\frac{4}{25}$이므로 $k=-\frac{75}{4}$

답 ①

0133

유형 11 $a^x\pm a^{-x}=k$ (k는 상수) 꼴의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| 주어진 등식의 양변을 세제곱한다.

$$x^3=(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})^3=3-3(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})-3^{-1}$$
$$=3-3x-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}-3x$$

$\therefore x^3+3x=\frac{8}{3}$

답 ③

0134

유형 11 $a^x\pm a^{-x}=k$ (k는 상수) 꼴의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| 주어진 등식의 양변을 세제곱한다.

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=1+\sqrt{2}$의 양변을 세제곱하면

$$x+3(\underbrace{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}_{=1+\sqrt{2}})+x^{-1}=1+3\cdot\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+2\sqrt{2}$$
$$=7+5\sqrt{2}$$

$\therefore x+x^{-1}=7+5\sqrt{2}-3(1+\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로

$a+b=4+2=6$

답 ③

0135

유형 12 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기

|전략| 주어진 등식의 분모, 분자에 a^x을 곱한다.

$$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=2$$

$a^{2x}+1=2a^{2x}-2$, $a^{2x}=3$ $\quad\therefore a^x=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x}}{a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}}=\frac{a^{\frac{1}{2}x}(a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{1}{2}x})}{a^{\frac{1}{2}x}(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^x+a^{-x}}$$
$$=\frac{3-1}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

0136

유형 13 $a^x=k$ (k는 상수)의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| 주어진 조건을 이용하여 7^x, 7^y의 값을 구한다.

$7^{2x+y}=32$에서 $7^{2x}\times7^y=32$ ····· ㉠

$7^{x-y}=2$에서 $\frac{7^x}{7^y}=2$이므로 $7^y=\frac{1}{2}\times7^x$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$7^{2x}\times\left(\frac{1}{2}\times7^x\right)=32$, $7^{3x}=64$, $(7^x)^3=4^3$

즉, $7^x=4$이므로 $7=4^{\frac{1}{x}}$

또, $7^x=4$를 ㉡에 대입하면 $7^y=2$이므로 $7=2^{\frac{1}{y}}$

$$\therefore 4^{\frac{x+y}{xy}}=4^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=4^{\frac{1}{x}}\times4^{\frac{1}{y}}=4^{\frac{1}{x}}\times(2^{\frac{1}{y}})^2$$
$$=7\times7^2=343$$

답 ⑤

0137

유형 13 $a^x=k$ (k는 상수)의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| 밑을 통일한 다음 지수법칙을 이용한다.

$a^x=5$에서 $a=5^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$(ab)^y=25$에서 $ab=25^{\frac{1}{y}}=(5^2)^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{2}{y}}$ ····· ㉡

$(abc)^z=125$에서 $abc=125^{\frac{1}{z}}=(5^3)^{\frac{1}{z}}=5^{\frac{3}{z}}$ ····· ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}}=\frac{a\times ab}{abc}=\frac{a}{c}$

답 ②

0138

유형 **14** $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| $2^x=5^{-y}=k\,(k>0)$로 놓고 문자 사이의 관계식을 구한다.

$2^x=5^{-y}=k\,(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^{-y}=k$에서 $5=k^{-\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면

$2\times5=k^{\frac{1}{x}}\times k^{-\frac{1}{y}}$ $\therefore k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=10$ …… ㉢

한편, $5^{-y}=k$에서 $25^y=(5^2)^y=(5^{-y})^{-2}=k^{-2}$이고, $25^y=10^z$이므로

$10^z=k^{-2}$ $\therefore 10=k^{-\frac{2}{z}}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{-\frac{2}{z}}$이고 $k\neq1$이므로

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{z}$

답 ②

0139

유형 **15** 지수의 실생활에의 활용

|전략| B_1, B_2를 각각 I_0, r_1, x_1에 대한 식으로 나타낸 다음 식을 변형하여 B_1, B_2 사이의 비를 구한다.

전류의 세기가 $I_0\,(I_0>0)$으로 일정할 때

$$B_1=\frac{kI_0{r_1}^2}{2({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{kI_0\times9{r_1}^2}{2(9{x_1}^2+9{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{kI_0\times9{r_1}^2}{2\times9^{\frac{3}{2}}({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9}{(3^2)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{kI_0{r_1}^2}{2({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}B_1$$

$\therefore \frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{3}$

답 ②

0140

유형 **01** 거듭제곱근

|전략| n이 홀수일 때와 짝수일 때로 경우를 나누어 $f(n)$의 값을 구한다.

(i) n이 홀수일 때

$n^2-19n+84$의 값에 관계없이 $n^2-19n+84$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

이때 $6\le n\le14$에서 홀수 n의 값은 7, 9, 11, 13이므로

$f(7)=f(9)=f(11)=f(13)=1$ … ❶

(ii) n이 짝수일 때

① $n^2-19n+84<0$이면 $n^2-19n+84$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

$n^2-19n+84<0$에서 $(n-7)(n-12)<0$

$\therefore 7<n<12$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 짝수 n의 값은 8, 10이므로

$f(8)=f(10)=0$

② $n^2-19n+84=0$이면 $n^2-19n+84$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

$n^2-19n+84=0$에서 $(n-7)(n-12)=0$

$\therefore n=7$ 또는 $n=12$

짝수 n의 값은 12이므로

$f(12)=1$

③ $n^2-19n+84>0$이면 $n^2-19n+84$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

$n^2-19n+84>0$에서 $(n-7)(n-12)>0$

$\therefore n<7$ 또는 $n>12$

이때 $6\le n\le14$이므로

$6\le n<7$ 또는 $12<n\le14$ …… ㉡

㉡을 만족시키는 짝수 n의 값은 6, 14이므로

$f(6)=f(14)=2$ … ❷

(i), (ii)에서 $f(n)=f(n+1)$을 만족시키는 n의 값은 11, 12이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$11+12=23$ … ❸

답 23

채점 기준	배점
❶ n이 홀수일 때, $f(n)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ n이 짝수일 때, $f(n)$의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구할 수 있다.	2점

0141

유형 **07** 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기

|전략| m이 1, 2, 3일 때, $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구한다.

(i) $m=1$일 때, $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{1}{3}}$이 자연수가 되려면 n은 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로

$n=1$ 또는 $n=2^3=8$ … ❶

(ii) $m=2$일 때, $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{2}{3}}$이 자연수가 되려면 n은 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로

$n=1$ 또는 $n=2^3=8$ … ❷

(iii) $m=3$일 때, $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{3}{3}}=n$이므로

$n=1, 2, 3, \cdots, 8$ … ❸

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2+2+8=12$ … ❹

답 12

채점 기준	배점
❶ $m=1$일 때, 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $m=2$일 때, 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $m=3$일 때, 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있다.	1점
❹ 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구할 수 있다.	1점

0142

유형 **14** $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

|전략| $243^x=64^y=a^z=k\,(k>0)$로 놓고, 문자 사이의 관계식을 구한다.

조건 (나)에서 $243^x=64^y=a^z=k\,(k>0)$로 놓으면

$xyz\neq0$에서 $a\neq1$, $k\neq1$

$243^x=k$에서 $3^{5x}=k$ $\therefore 3^5=k^{\frac{1}{x}}$

$64^y=k$에서 $2^{6y}=k$ $\therefore 2^6=k^{\frac{1}{y}}$

$a^z=k$에서 $a=k^{\frac{1}{z}}$ … ❶

이때 조건 (가)에서 $\frac{6}{x}+\frac{5}{y}=\frac{10}{z}$이므로

$k^{\frac{6}{x}+\frac{5}{y}}=k^{\frac{10}{z}}$, $k^{\frac{6}{x}}\times k^{\frac{5}{y}}=k^{\frac{10}{z}}$ … ❷

$(k^{\frac{1}{x}})^6\times(k^{\frac{1}{y}})^5=(k^{\frac{1}{z}})^{10}$, $(3^5)^6\times(2^6)^5=a^{10}$

$3^{30}\times2^{30}=a^{10}$, $(3\times2)^{30}=a^{10}$

$6^{30}=a^{10}$, $(6^3)^{10}=a^{10}$

$\therefore a=6^3=216$ ($\because a>0$) … ❸

답 216

채점 기준	배점
❶ 조건 (나)에서 243, 64, a를 k^r 꼴로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 조건 (가)에서 주어진 식을 이용해 k의 거듭제곱 꼴에 대한 등식을 세울 수 있다.	2점
❸ a의 값을 구할 수 있다.	2점

0143

유형 02 거듭제곱근의 계산

|전략| 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

(1) 직육면체의 부피는

$\sqrt{8}\times\sqrt[3]{32}\times\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt{2^3}\times\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[6]{2^7}=\sqrt[6]{2^9}\times\sqrt[6]{2^{10}}\times\sqrt[6]{2^7}$

$=\sqrt[6]{2^{9+10+7}}=\sqrt[6]{2^{26}}=\sqrt[3]{2^{13}}$

(2) 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$x^3=\sqrt[3]{2^{13}}$ $\therefore x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{13}}}=\sqrt[9]{2^{13}}$

(3) $\sqrt[9]{2^{13}}$에서 $m=9$, $n=13$이므로

$m+n=9+13=22$

답 (1) $\sqrt[3]{2^{13}}$ (2) $\sqrt[9]{2^{13}}$ (3) 22

채점 기준	배점
(1) 직육면체의 부피를 구할 수 있다.	4점
(2) 정육면체의 한 모서리의 길이를 구할 수 있다.	3점
(3) $m+n$의 값을 구할 수 있다.	2점

0144

유형 09 거듭제곱이 자연수가 될 조건

|전략| 자연수 a가 소수이고 p, q가 자연수일 때, $a^{\frac{q}{p}}$이 자연수가 되려면 q가 p의 배수이어야 한다.

(1) $(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$이므로 $a=8$일 때

$8^{\frac{3}{n}}=(2^3)^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{9}{n}}$

$2^{\frac{9}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 9의 약수이어야 하므로

2 이상의 자연수 n의 값은 3, 9이다.

$\therefore f(8)=2$

(2) $(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$이므로 $a=25$일 때

$25^{\frac{3}{n}}=(5^2)^{\frac{3}{n}}=5^{\frac{6}{n}}$

$5^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 6의 약수이어야 하므로

2 이상의 자연수 n의 값은 2, 3, 6이다.

$\therefore f(25)=3$

(3) $f(8)+f(25)=2+3=5$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 5

채점 기준	배점
(1) $f(8)$의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $f(25)$의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) $f(8)+f(25)$의 값을 구할 수 있다.	1점

창의·융합 **실력 마스터**

0145

|전략| $(\sqrt[3]{2})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 찾아 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 구한다.

$(\sqrt[3]{2})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}$, $-\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}$

이고 주어진 조건에서 $(\sqrt[3]{2})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -2이므로

$\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}\times\{-\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}\}=-2$

$\{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}\}^2=2$

이때

$\{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^{f(n)}}\}^2=[\{(2^{\frac{1}{3}})^{f(n)}\}^{\frac{1}{4}}]^2$

$=\{(2^{\frac{f(n)}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^2$

$=(2^{\frac{f(n)}{12}})^2=2^{\frac{f(n)}{6}}$

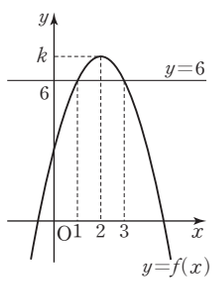
$2^{\frac{f(n)}{6}}=2$에서

$\frac{f(n)}{6}=1$ $\therefore f(n)=6$

즉, $f(n)=6$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이고, 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(n)=6$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 3이다.

따라서 $f(1)=f(3)=6$이므로

$-1+k=6$ $\therefore k=7$



답 7

0146

|전략| $(a, b)\in S$이면 $3^a=5^b$임을 이용한다.

$(a, b)\in S$이므로 $3^a=5^b$

ㄱ. $(3^a)^2=(5^b)^2$이므로 $3^{2a}=5^{2b}$

$\therefore (2a, 2b)\in S$ (참)

ㄴ. $a\neq0$, $b\neq0$이면

$(3^a)^{\frac{1}{ab}}=(5^b)^{\frac{1}{ab}}$이므로 $3^{\frac{1}{b}}=5^{\frac{1}{a}}$

$\therefore \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)\in S$ (참)

ㄷ. $a\neq0$, $b\neq0$이면

$3^a=5^b$에서 $a\neq b$ …… ㉠

$3^a=5^b=k$ ($k\neq1$)로 놓으면

$(3^a)^a=k^a$에서 $3^{a^2}=k^a$

$(5^b)^b=k^b$에서 $5^{b^2}=k^b$

이때 $3^{a^2}=5^{b^2}$이 성립한다고 가정하면 $k^a=k^b$

그런데 $k\neq1$이므로 $a=b$

이것은 ㉠에 모순이므로 $3^{a^2}\neq5^{b^2}$

즉, $a\neq0$, $b\neq0$이면 $3^{a^2}\neq5^{b^2}$

$\therefore (a^2, b^2)\notin S$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0147

| 전략 | 세 수 $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}, \sqrt[4]{\frac{n}{4}}, \sqrt[5]{\frac{n}{5}}$을 $2^p3^q5^r$ 꼴로 나타낸 다음 자연수가 될 조건을 찾는다.

$n=2^a3^b5^c$에서

(i) $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2^a3^b5^c}{3}}=\sqrt[3]{2^a3^{b-1}5^c}=2^{\frac{a}{3}}3^{\frac{b-1}{3}}5^{\frac{c}{3}}$

이므로 $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면

a와 c는 3의 배수, $b=3m_1+1$ (단, m_1은 음이 아닌 정수)

이어야 한다.

(ii) $\sqrt[4]{\frac{n}{4}}=\sqrt[4]{\frac{2^a3^b5^c}{4}}=\sqrt[4]{2^{a-2}3^b5^c}=2^{\frac{a-2}{4}}3^{\frac{b}{4}}5^{\frac{c}{4}}$

이므로 $\sqrt[4]{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되려면

b와 c는 4의 배수, $a=4m_2+2$ (단, m_2는 음이 아닌 정수)

이어야 한다.

(iii) $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}=\sqrt[5]{\frac{2^a3^b5^c}{5}}=\sqrt[5]{2^a3^b5^{c-1}}=2^{\frac{a}{5}}3^{\frac{b}{5}}5^{\frac{c-1}{5}}$

이므로 $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되려면

a와 b는 5의 배수, $c=5m_3+1$ (단, m_3은 음이 아닌 정수)

이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서

a는 3의 배수이고 5의 배수이면서 4로 나눈 나머지가 2인 최소의 자연수이므로 $a=30$

b는 4의 배수이고 5의 배수이면서 3으로 나눈 나머지가 1인 최소의 자연수이므로 $b=40$

c는 3의 배수이고 4의 배수이면서 5로 나눈 나머지가 1인 최소의 자연수이므로 $c=36$

$\therefore a+b+c=30+40+36=106$ 답 106

0148

| 전략 | 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 파악한 다음 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.

함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 $(x^n-81)f(x)=0$에서

$x^n-81=0$ 또는 $f(x)=0$

이므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 방정식 $x^n-81=0$의 실근이 되어야 한다.

(i) n이 짝수일 때

방정식 $x^n-81=0$, 즉 $x^n=3^4$의 실근은

$x=-\sqrt[n]{3^4}$ 또는 $x=\sqrt[n]{3^4}$

$\therefore x=-3^{\frac{4}{n}}$ 또는 $x=3^{\frac{4}{n}}$

즉, 조건 (가)를 만족시키려면

$f(x)=(x+3^{\frac{4}{n}})(x-3^{\frac{4}{n}})=x^2-3^{\frac{8}{n}}$

이어야 한다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $-3^{\frac{8}{n}}$을 갖고, 조건 (나)에 의하여 이 값은 음의 정수이므로 $3^{\frac{8}{n}}$은 자연수이어야 한다.

따라서 n은 8의 약수 중 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 n의 값은 2, 4, 8이다.

(ii) n이 홀수일 때

방정식 $x^n-81=0$, 즉 $x^n=3^4$의 실근은

$x=\sqrt[n]{3^4}$의 1개뿐이다.

이때 방정식 $(x^n-81)f(x)=0$의 실근이 모두 중근일 수 없으므로 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+4+8=14$ 답 14

0149

| 전략 | 먼저 $x=\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})$의 양변을 제곱한다.

$x=\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})$의 양변을 제곱하면

$x^2=\frac{1}{4}(3^{\frac{1}{2}}-2+3^{-\frac{1}{2}})$

$x^2+1=\frac{1}{4}(3^{\frac{1}{2}}-2+3^{-\frac{1}{2}})+1$

$=\frac{1}{4}(3^{\frac{1}{2}}+2+3^{-\frac{1}{2}})=\left\{\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})\right\}^2$

이므로

$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})+\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})\right\}^2}$

$=\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})+\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})$

$=3^{\frac{1}{4}}$

$\therefore (x+\sqrt{x^2+1})^4=(3^{\frac{1}{4}})^4=3$ 답 ③

0150

| 전략 | 주어진 식에 $t=5$일 때와 $t=7$일 때의 값을 각각 대입한다.

$t=5$일 때의 개체수가 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이므로

$N(5)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-5b}}=\frac{1}{2}K$에서

$2=1+c\cdot a^{-5b}$, $c\cdot a^{-5b}=1$ $\therefore c=a^{5b}$

$\therefore N(t)=\frac{K}{1+a^{5b}\cdot a^{-bt}}=\frac{K}{1+a^{b(5-t)}}$

$t=7$일 때의 개체수가 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이므로

$N(7)=\frac{K}{1+a^{-2b}}=\frac{3}{4}K$에서

$\frac{1}{1+a^{-2b}}=\frac{3}{4}$, $4=3+3a^{-2b}$

$3a^{-2b}=1$ $\therefore a^{-2b}=\frac{1}{3}$

따라서 $t=9$일 때의 개체수는

$N(9)=\frac{K}{1+a^{-4b}}=\frac{K}{1+(a^{-2b})^2}$

$=\frac{K}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{K}{\frac{10}{9}}$

$=\frac{9}{10}K$ 답 ④

2 로그

본책 26~45쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0151 답 $5=\log_2 32$

0152 답 $-2=\log_3 \frac{1}{9}$

0153 답 $\frac{1}{2}=\log_{36} 6$

0154 답 $0=\log_5 1$

0155 답 $4^3=64$

0156 답 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}=10$

0157 답 $(\sqrt{7})^4=49$

0158 답 $2^{-3}=\frac{1}{8}$

0159

$\log_3 27=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $3^x=27$

$3^x=3^3$에서 $x=3$ $\therefore \log_3 27=3$ 답 3

0160

$\log_5 \frac{1}{25}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $5^x=\frac{1}{25}$

$5^x=5^{-2}$에서 $x=-2$ $\therefore \log_5 \frac{1}{25}=-2$ 답 -2

0161

$\log_{\frac{1}{10}} 100=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $\left(\frac{1}{10}\right)^x=100$

$10^{-x}=10^2$에서 $x=-2$ $\therefore \log_{\frac{1}{10}} 100=-2$ 답 -2

0162

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$

$3^{-x}=3^{-4}$에서 $x=4$ $\therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}=4$ 답 4

0163

$\log_2 x=3$에서 $2^3=x$ $\therefore x=8$ 답 8

0164

$\log_{\sqrt{2}} x=4$에서 $(\sqrt{2})^4=x$ $\therefore x=4$ 답 4

0165

$\log_x 3=\frac{1}{2}$에서 $x^{\frac{1}{2}}=3$ $\therefore x=3^2=9$ 답 9

0166

$\log_x \frac{1}{16}=2$에서 $x^2=\frac{1}{16}$ $\therefore x=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0167

진수의 조건에서 $x-2>0$ $\therefore x>2$ 답 $x>2$

0168

진수의 조건에서 $-x^2+3x>0$, $x(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$ 답 $0<x<3$

0169

밑의 조건에서 $x-5>0$, $x-5\neq 1$

$x>5$, $x\neq 6$ $\therefore 5<x<6$ 또는 $x>6$ 답 $5<x<6$ 또는 $x>6$

0170

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq 1$

$x>1$, $x\neq 2$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에서 $5-x>0$ $\therefore x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<5$ 답 $1<x<2$ 또는 $2<x<5$

0171

$\log_4 4-\log_2 1=1-0=1$ 답 1

0172

$$\log_5 2+\log_5 \frac{125}{2}=\log_5 2+(\log_5 125-\log_5 2)$$
$$=\log_5 2+\log_5 5^3-\log_5 2$$
$$=3\log_5 5=3$$

답 3

0173

$$\log_{10}\sqrt{10}+\log_{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{5}$$
$$=\log_{10} 10^{\frac{1}{2}}+\log_{10} 5^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\log_{10} 5^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\log_{10} 10+\frac{1}{2}\log_{10} 5-\frac{1}{2}\log_{10} 5=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0174

$$2\log_3\sqrt{12}-\log_3 36=\log_3(\sqrt{12})^2-\log_3 36$$
$$=\log_3\frac{12}{36}=\log_3\frac{1}{3}$$
$$=\log_3 3^{-1}=-1$$

답 -1

0175

$$\log_{10} 72=\log_{10}(2^3\cdot 3^2)=3\log_{10} 2+2\log_{10} 3$$
$$=3a+2b$$

답 $3a+2b$

0176

$$\log_{10} 600=\log_{10}(2\cdot 3\cdot 10^2)=\log_{10} 2+\log_{10} 3+2\log_{10} 10$$
$$=a+b+2$$

답 $a+b+2$

0177

$$\log_{10}\frac{16}{27}=\log_{10}\frac{2^4}{3^3}=4\log_{10} 2-3\log_{10} 3$$
$$=4a-3b$$

답 $4a-3b$

0178

$$\log_{10}\frac{5}{54}=\log_{10}\frac{10}{108}=\log_{10}\frac{10}{2^2\cdot 3^3}$$
$$=\log_{10}10-(2\log_{10}2+3\log_{10}3)$$
$$=1-2a-3b$$

답 $1-2a-3b$

0179

$$\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\frac{b}{a}$$

답 $\frac{b}{a}$

0180

$$\log_{12}24=\frac{\log_5 24}{\log_5 12}=\frac{\log_5(2^3\cdot 3)}{\log_5(2^2\cdot 3)}$$
$$=\frac{3\log_5 2+\log_5 3}{2\log_5 2+\log_5 3}=\frac{3a+b}{2a+b}$$

답 $\frac{3a+b}{2a+b}$

0181

$$\log_2 9\cdot\log_3 8=\log_2 3^2\cdot\log_3 2^3=2\log_2 3\cdot 3\log_3 2$$
$$=6\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=6$$

답 6

0182

$$\log_2 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 16=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{\log_{10}16}{\log_{10}7}$$
$$=\frac{\log_{10}16}{\log_{10}2}=\frac{4\log_{10}2}{\log_{10}2}=4$$

답 4

0183

$$\log_{81}9=\log_{3^4}3^2=\frac{2}{4}\log_3 3=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0184

$$\log_{\frac{1}{10}}\sqrt[4]{1000}=\log_{10^{-1}}10^{\frac{3}{4}}=-\frac{3}{4}\log_{10}10=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

0185

$$4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^{\log_2 2^2}=3^{2\log_2 2}=3^2=9$$

답 9

0186

$$3^{\log_3 2+\log_3 5}=3^{\log_3(2\cdot 5)}=3^{\log_3 10}=10$$

답 10

STEP 2 유형 마스터 1

유형 01 로그의 정의 개념 01

$a>0, a\neq 1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N \iff x=\log_a N$

0187

$\log_a 5=3$에서 $a^3=5$ $\therefore a=\sqrt[3]{5}$

$\log_b 7=3$에서 $b^3=7$ $\therefore b=\sqrt[3]{7}$

$\therefore ab=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{35}$

답 $\sqrt[3]{35}$

0188

⑤ $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\iff\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

0189

$x=\log_3(2+\sqrt{3})$에서

$3^x=2+\sqrt{3}$ … ❶

$3^{-x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$ … ❷

$\therefore\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ … ❸

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x=\log_3(2+\sqrt{3})$에서 3^x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 3^{-x}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0190

$\log_2\{\log_4(\log_3 x)\}=0$에서

$\log_4(\log_3 x)=2^0=1$

$\log_3 x=4^1=4$ $\therefore x=3^4=81$

$\log_4\{\log_3(\log_2 y)\}=0$에서

$\log_3(\log_2 y)=4^0=1$

$\log_2 y=3^1=3$ $\therefore y=2^3=8$

$\therefore x-y=81-8=73$

답 73

유형 02 로그의 밑과 진수의 조건 개념 01

$\log_a N$이 정의되려면

(1) 밑의 조건 ⇨ $a>0, a\neq 1$ (2) 진수의 조건 ⇨ $N>0$

0191

밑의 조건에서 $x-2>0, x-2\neq 1$

$x>2, x\neq 3$ $\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+5x+14>0$

$x^2-5x-14<0, (x+2)(x-7)<0$

$\therefore -2<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<3$ 또는 $3<x<7$

따라서 정수 x의 개수는 4, 5, 6의 3이다.

답 ③

0192

밑의 조건에서 $4-x>0, 4-x\neq 1$

$x<4, x\neq 3$ $\therefore x<3$ 또는 $3<x<4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x+3>0$

$\therefore x>-3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-3<x<3$ 또는 $3<x<4$

따라서 정수 x의 최솟값은 -2이다.

답 ③

0193

밑의 조건에서 $|x+1|>0$, $|x+1|\neq 1$

$\therefore x\neq -1, x\neq 0, x\neq -2$ ····· ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+x+2>0$

$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x<0$ 또는 $0<x<2$

답 $-1<x<0$ 또는 $0<x<2$

0194

밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq 1$

$\therefore 0<a<1$ 또는 $a>1$ ····· ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+a+3>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-ax+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a+3)<0$, $a^2-4a-12<0$

$(a+2)(a-6)<0$ $\therefore -2<a<6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<1$ 또는 $1<a<6$

따라서 정수 a의 값은 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$2+3+4+5=14$ 답 ④

유형 03 로그의 기본 성질 개념 02

$a>0, a\neq 1, M>0, N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

0195

$4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3-\log_2\sqrt{6}$

$=\log_2(\sqrt{2})^4+\log_2 3^{\frac{1}{2}}-\log_2\sqrt{6}=\log_2\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$=\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$ 답 ⑤

0196

$\dfrac{1}{2}\log_2 18+\dfrac{1}{3}\log_2 3-\dfrac{2}{3}\log_2 9$

$=\dfrac{1}{2}\log_2(2\cdot 3^2)+\dfrac{1}{3}\log_2 3-\dfrac{2}{3}\log_2 3^2$

$=\dfrac{1}{2}(\log_2 2+2\log_2 3)+\dfrac{1}{3}\log_2 3-\dfrac{4}{3}\log_2 3$

$=\dfrac{1}{2}+\log_2 3-\log_2 3=\dfrac{1}{2}$ 답 ②

0197

$\log_6 a+\log_6 2b+\log_6 3c=2$에서

$\log_6(a\cdot 2b\cdot 3c)=2$, $\log_6 6abc=2$

$6abc=6^2$ $\therefore abc=6$ 답 ④

0198

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(93)$

$=\log_a\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\log_a\left(1+\dfrac{1}{4}\right)+\log_a\left(1+\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\log_a\left(1+\dfrac{1}{95}\right)$

$=\log_a\dfrac{4}{3}+\log_a\dfrac{5}{4}+\log_a\dfrac{6}{5}+\cdots+\log_a\dfrac{96}{95}$

$=\log_a\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{96}{95}\right)=\log_a\dfrac{96}{3}=\log_a 32$

즉, $\log_a 32=5$이므로 $a^5=32=2^5$

$\therefore a=2$ 답 2

0199

선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\dfrac{m\log_3 20+(1-m)\log_3 5}{m+(1-m)}=m\log_3 20+(1-m)\log_3 5$

이때 $m\log_3 20+(1-m)\log_3 5=2$이므로

$m\log_3 20+\log_3 5-m\log_3 5=2$

$m(\log_3 20-\log_3 5)=\log_3 9-\log_3 5$

$m\log_3\dfrac{20}{5}=\log_3\dfrac{9}{5}$, $\log_3 4^m=\log_3\dfrac{9}{5}$

$\therefore 4^m=\dfrac{9}{5}$ 답 ②

0200

$1000=10^3=2^3\cdot 5^3$이므로 1000의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\cdot(3+1)=16$ $\therefore n=16$

이때 $a_1a_{16}=a_2a_{15}=\cdots=a_8a_9=10^3$이므로

$\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3+\cdots+\log_{10}a_{16}$

$=\log_{10}(a_1a_2a_3\cdots a_{16})$

$=\log_{10}\{(a_1a_{16})(a_2a_{15})\cdots(a_8a_9)\}$

$=\log_{10}(10^3)^8=\log_{10}10^{24}$

$=24\log_{10}10=24$ 답 24

유형 04 로그의 밑의 변환 개념 03

$a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, c>0, c\neq 1$일 때

(1) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

0201

$\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}+\dfrac{1}{\log_5 x}=\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5$

$=\log_x(3\cdot 4\cdot 5)$

$=\log_x 60=\dfrac{1}{\log_{60}x}$

즉, $\dfrac{1}{\log_{60}x}=\dfrac{1}{\log_a x}$이므로 $a=60$ 답 60

0202

$\log_c a : \log_c b = 2 : 5$이므로

$\log_c a = 2k$, $\log_c b = 5k$ $(k \neq 0)$라 하면

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{5k}{2k} = \frac{5}{2}, \log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore 6\log_a b + 10\log_b a = 6 \cdot \frac{5}{2} + 10 \cdot \frac{2}{5} = 19$$ 답 ⑤

0203

$\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$에서 $\log_x a = \frac{1}{3}$, $\log_x b = \frac{1}{4}$

$$\therefore \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{7}$$ 답 ⑤

0204

$\frac{\log_5 4}{a} = \log_5 6$에서 $a = \frac{\log_5 4}{\log_5 6} = \log_6 4$

$\frac{\log_5 9}{b} = \log_5 6$에서 $b = \frac{\log_5 9}{\log_5 6} = \log_6 9$

$\frac{\log_5 36}{c} = \log_5 6$에서 $c = \frac{\log_5 36}{\log_5 6} = \log_6 36$

$$\therefore a + b + c = \log_6 4 + \log_6 9 + \log_6 36$$
$$= \log_6 (4 \cdot 9 \cdot 36) = \log_6 6^4 = 4$$ 답 4

0205

$$\log_6 (\log_2 125) + \log_6 (\log_5 49) + \log_6 (\log_7 64)$$
$$= \log_6 (\log_2 125 \cdot \log_5 49 \cdot \log_7 64)$$
$$= \log_6 \left(\frac{\log_6 5^3}{\log_6 2} \cdot \frac{\log_6 7^2}{\log_6 5} \cdot \frac{\log_6 2^6}{\log_6 7} \right)$$
$$= \log_6 \left(\frac{3\log_6 5}{\log_6 2} \cdot \frac{2\log_6 7}{\log_6 5} \cdot \frac{6\log_6 2}{\log_6 7} \right)$$
$$= \log_6 6^2 = 2$$ 답 ②

0206

$\log_a b = \log_b a$에서 $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

$(\log_a b)^2 = 1$, $\log_a b = \pm 1$

이때 $a \neq b$에서 $\log_a b \neq 1$이므로

$\log_a b = -1$ $\quad \therefore b = \frac{1}{a}$

$a > 0$, $b > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$ (단, 등호는 $a = 1$일 때 성립)

그런데 $a \neq 1$이므로 $a + b > 2$이다.

따라서 $a + b$의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

Lecture

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a = b$일 때 성립)

유형 05 로그의 여러 가지 성질 개념 04

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$일 때

(1) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ (단, m, n은 실수, $m \neq 0$)

(2) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (단, $c > 0$, $c \neq 1$)

(3) $a^{\log_a b} = b$

0207

$$\frac{1}{3}\log_2 36 + \log_4 \sqrt[3]{3^4} + \log_{\frac{1}{8}} 81$$
$$= \frac{1}{3}\log_2 (2^2 \cdot 3^2) + \log_{2^2} 3^{\frac{4}{3}} + \log_{2^{-3}} 3^4$$
$$= \frac{2}{3}\log_2 2 + \frac{2}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2 3 - \frac{4}{3}\log_2 3 = \frac{2}{3}$$ 답 $\frac{2}{3}$

0208

$$(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 - \log_9 8)$$
$$= (\log_2 3 + \log_{2^2} 3^2)(\log_3 2^2 - \log_{3^2} 2^3)$$
$$= (\log_2 3 + \log_2 3)\left(2\log_3 2 - \frac{3}{2}\log_3 2\right)$$
$$= 2\log_2 3 \cdot \frac{1}{2}\log_3 2 = 1$$ 답 ③

0209

$$\log_3 5 - 2\log_{\frac{1}{3}} 4 - \log_3 10 = \log_3 5 - \log_{3^{-1}} 4^2 - \log_3 10$$
$$= \log_3 5 + \log_3 16 - \log_3 10$$
$$= \log_3 \frac{5 \cdot 16}{10} = \log_3 8$$

$\therefore$ (주어진 식) $= 9^{\log_3 8} = 8^{\log_3 9} = 8^{2\log_3 3} = 8^2 = 64$ 답 ⑤

0210

두 점 $(2, \log_8 4)$, $(6, \log_2 a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \log_8 4 = \frac{\log_2 a - \log_8 4}{6 - 2}(x - 2)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\log_8 4 = (\log_2 a - \log_8 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_{2^3} 2^2 = \frac{1}{2}\left(\log_2 a - \log_{2^3} 2^2\right)$$

$$\frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{1}{2}\left(\log_2 a - \frac{2}{3}\log_2 2\right)$$

$$\frac{4}{3} = \log_2 a - \frac{2}{3}, \log_2 a = 2$$

$\therefore a = 2^2 = 4$ 답 ②

다른 풀이 두 점 $(2, \log_8 4)$, $(6, \log_2 a)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 두 점 $(0, 0)$, $(2, \log_8 4)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(0, 0)$, $(6, \log_2 a)$를 지나는 직선의 기울기는 서로 같다.

이때 $\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3}$이므로

두 점 $(0, 0)$, $\left(2, \frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{2}{3} - 0}{2 - 0} = \frac{1}{3}$$

따라서 두 점 $(0, 0)$, $(6, \log_2 a)$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{\log_2 a-0}{6-0}=\frac{1}{3}$, $\log_2 a=2$ $\quad\therefore a=2^2=4$

0211

$5^{a+b}=8$에서 $a+b=\log_5 8$

$2^{a-b}=3$에서 $a-b=\log_2 3$ … ❶

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_5 8\cdot\log_2 3$

$=\log_5 2^3\cdot\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=3\log_5 2\cdot\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=3\log_5 3$ … ❷

$\therefore 5^{a^2-b^2}=5^{3\log_5 3}=5^{\log_5 27}=27$ … ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ $a+b$, $a-b$를 로그로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a^2-b^2를 밑이 5인 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $5^{a^2-b^2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $2^{a-b}=3$에서 $a-b\neq 0$이므로 $2=3^{\frac{1}{a-b}}$

$\therefore 5^{a^2-b^2}=5^{(a+b)(a-b)}=8^{a-b}=2^{3(a-b)}=(3^{\frac{1}{a-b}})^{3(a-b)}$

$=3^3=27$

유형 06 로그에 대한 증명 개념 01~03

로그의 정의와 성질을 이용하여 빈칸에 알맞은 식 또는 값을 구한다.

0212

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

(가) $a^x=b$, $c^y=a$이므로

$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$

이때 로그의 정의에 의하여

$xy=$ (나) $\log_c b$

즉, $\log_a b\times\log_c a=$ (나) $\log_c b$

$a\neq 1$일 때, $\log_c a\neq 0$이므로 양변을 $\log_c a$로 나누면

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

답 (가) $a^x=b$ (나) $\log_c b$

0213

$\log_2 3$이 유리수라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여

$\log_2 3=\frac{n}{m}$으로 나타낼 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $2^{\frac{n}{m}}=3$ $\quad\therefore 2^n=3^m$

이때 2^n은 (가) 짝수이고, 3^m은 (나) 홀수이므로 2^n과 3^m은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_2 3$은 무리수이다.

답 (가) 짝수 (나) 홀수

Lecture

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제를 부정하거나 명제의 결론을 부정하여 가정한 사실 또는 이미 알려진 사실에 모순이 생김을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 귀류법이라 한다.

유형 07 로그의 대소 비교 개념 02~04

로그의 정의와 성질을 이용하여 A, B, C의 값을 구하고, 대소를 비교한다.

0214

$A=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}=\log_{2^{-1}}2^{-3}=3$

$B=\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\frac{5}{2}$

$C=9^{\log_3\sqrt{2}}=3^{2\log_3\sqrt{2}}=3^{\log_3 2}=2$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

0215

$A=\log_5 25+\frac{1}{\log_4 2}=\log_5 5^2+\log_2 2^2=2+2=4$

$B=\log_2 4\sqrt{2}=\log_2(2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}})=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

$C=\frac{3}{\log_2 5}\cdot\frac{4}{\log_5 2}=\frac{3\cdot 4}{\log_2 5\cdot\log_5 2}=12$

$\therefore B<A<C$

답 ③

0216

$A=7^{\log_{7^2}2}=7^{\log_{7^2}2}=7^{2\log_7 2}=7^{\log_7 4}=4$

$B=3^{\log_3 8-2}=3^{\log_3 8}\div 3^2=8\div 9=\frac{8}{9}$

$C=\log_9 27+\log_{\frac{1}{9}}3=\log_{3^2}3^3+\log_{3^{-2}}3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

$\therefore B<C<A$

답 ④

0217

$a^3=b^4$에서 $b=a^{\frac{3}{4}}$ $\quad\therefore A=\log_a b=\frac{3}{4}$

$b^4=c^5$에서 $c=b^{\frac{4}{5}}$ $\quad\therefore B=\log_b c=\frac{4}{5}$

$a^3=c^5$에서 $a=c^{\frac{5}{3}}$ $\quad\therefore C=\log_c a=\frac{5}{3}$

$\therefore A<B<C$

답 ①

유형 08 로그의 정수 부분과 소수 부분 개념 02, 04

양수 M과 정수 n에 대하여 $a^n\le M<a^{n+1}$ $(a>0, a\neq 1)$일 때

⇨ $\log_a a^n\le\log_a M<\log_a a^{n+1}$ $\quad\therefore n\le\log_a M<n+1$

⇨ $\log_a M$의 정수 부분은 n, 소수 부분은 $\log_a M-n$이다.

0218

$\log_3 9<\log_3 25<\log_3 27$에서 $2<\log_3 25<3$이므로

$a=2$

$b=\log_3 25-2=\log_3 25-\log_3 9=\log_3\frac{25}{9}$

$\therefore 3^a+3^b=3^2+3^{\log_3\frac{25}{9}}=9+\frac{25}{9}=\frac{106}{9}$

따라서 $m=9$, $n=106$이므로 $m+n=9+106=115$

답 115

0219

$\log_2 4<\log_2 7<\log_2 8$에서 $2<\log_2 7<3$이므로

$x=2$

$y=\log_2 7-2=\log_2 7-\log_2 4=\log_2 \frac{7}{4}$

$\therefore \frac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}=\frac{2^{-2}+2^{-\log_2 \frac{7}{4}}}{2^2+2^{\log_2 \frac{7}{4}}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{4}{7}}{4+\frac{7}{4}}$

$=\frac{\frac{23}{28}}{\frac{23}{4}}=\frac{1}{7}$

답 ②

0220

$2=\log_4 4^2=\log_4 16$

$2.5=\log_4 4^{2.5}=\log_4 (4^2\times 4^{\frac{1}{2}})$

$=\log_4 (16\times 2)=\log_4 32$

$\log_4 16<\log_4 28<\log_4 32$이므로

$2<\log_4 28<2.5$에서 $2<x<2.5$ … ❶

따라서 x에 가장 가까운 정수 y는 2이다. … ❷

$\therefore 2^x+2^y=2^{\log_4 28}+2^2=28^{\log_{4^2} 2}+4$

$=28^{\frac{1}{2}\log_2 2}+4=\sqrt{28}+4$

$=4+2\sqrt{7}$ … ❸

답 $4+2\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ y의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 2^x+2^y의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $\log_4 16<\log_4 28<\log_4 32$에서

$\log_4 4^2<\log_4 28<\log_{2^2} 2^5$이므로

$2<\log_4 28<\frac{5}{2}$

0221

(i) $1\le n<3$일 때

$\log_3 1\le\log_3 n<\log_3 3$에서 $0\le\log_3 n<1$

즉, $\log_3 n$의 정수 부분이 0이므로 $f(n)=0$

$\therefore f(1)=f(2)=0$

(ii) $3\le n<9$일 때

$\log_3 3\le\log_3 n<\log_3 9$에서 $1\le\log_3 n<2$

즉, $\log_3 n$의 정수 부분이 1이므로 $f(n)=1$

$\therefore f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=1$

(iii) $9\le n<27$일 때

$\log_3 9\le\log_3 n<\log_3 27$에서 $2\le\log_3 n<3$

즉, $\log_3 n$의 정수 부분이 2이므로 $f(n)=2$

$\therefore f(9)=f(10)=\cdots=f(20)=2$

(i), (ii), (iii)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$

$=0\cdot 2+1\cdot 6+2\cdot 12=30$

답 30

유형 09 $\log_a b=c$가 주어진 경우 로그의 값을 문자로 나타내기

개념 02, 03

(i) 주어진 식과 구하는 식의 밑을 통일한다.

(ii) 구하는 식의 진수를 곱의 형태로 바꾼 다음 로그의 성질을 이용한다.

0222

$\log_2 3=a$에서 $\log_3 2=\frac{1}{a}$

$\therefore \log_{42} 56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{\log_3 (2^3\cdot 7)}{\log_3 (2\cdot 3\cdot 7)}$

$=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}$

$=\frac{\frac{3}{a}+b}{\frac{1}{a}+1+b}=\frac{3+ab}{1+a+ab}$

답 ⑤

0223

$\log_{12}\sqrt{18}=\frac{\log_7\sqrt{18}}{\log_7 12}=\frac{\log_7 (2\cdot 3^2)^{\frac{1}{2}}}{\log_7 (2^2\cdot 3)}$

$=\frac{\frac{1}{2}\log_7 2+\log_7 3}{2\log_7 2+\log_7 3}$

$=\frac{\frac{1}{2}a+b}{2a+b}=\frac{a+2b}{4a+2b}$

답 ④

0224

$\log_3 10=a$에서 $\log_3 2+\log_3 5=a$ …… ㉠

$\log_3 \frac{4}{5}=b$에서 $2\log_3 2-\log_3 5=b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3\log_3 2=a+b$ $\therefore \log_3 2=\frac{a+b}{3}$

$\therefore \log_3 20=\log_3 (2\cdot 10)=\log_3 2+\log_3 10$

$=\frac{a+b}{3}+a=\frac{4a+b}{3}$

답 $\frac{4a+b}{3}$

다른 풀이 $\log_3 10=a$에서 $\log_3 2+\log_3 5=a$ …… ㉠

$\log_3 \frac{4}{5}=b$에서 $2\log_3 2-\log_3 5=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\log_3 2=\frac{a+b}{3}$, $\log_3 5=\frac{2a-b}{3}$

$\therefore \log_3 20=\log_3 (2^2\cdot 5)=2\log_3 2+\log_3 5$

$=2\cdot\frac{a+b}{3}+\frac{2a-b}{3}=\frac{4a+b}{3}$

0225

$\log_2 5=a$에서 $\log_5 2=\frac{1}{a}$

$\log_3 7=\frac{\log_5 7}{\log_5 3}$에서 $\log_5 7=\log_5 3\cdot\log_3 7=bc$

$\therefore \log_{21} 70=\frac{\log_5 70}{\log_5 21}=\frac{\log_5 (2\cdot 5\cdot 7)}{\log_5 (3\cdot 7)}$

$=\frac{\log_5 2+\log_5 5+\log_5 7}{\log_5 3+\log_5 7}$

$=\frac{\frac{1}{a}+1+bc}{b+bc}=\frac{1+a+abc}{ab+abc}$

답 $\frac{1+a+abc}{ab+abc}$

유형 10 $a^x=b$가 주어진 경우 로그의 값을 문자로 나타내기

개념 01~04

문자가 지수 형태로 주어진 경우
(i) 로그의 정의를 이용하여 주어진 식을 로그로 나타낸 다음 밑을 통일한다.
(ii) 구하는 식의 진수를 곱의 형태로 바꾼 다음 로그의 성질을 이용한다.

0226

$5^x=a$, $5^y=b$, $5^z=c$에서 $\log_5 a=x$, $\log_5 b=y$, $\log_5 c=z$

$\therefore \log_{ab} bc=\dfrac{\log_5 bc}{\log_5 ab}=\dfrac{\log_5 b+\log_5 c}{\log_5 a+\log_5 b}=\dfrac{y+z}{x+y}$ 답 $\dfrac{y+z}{x+y}$

다른 풀이 $ab=5^x\cdot 5^y=5^{x+y}$, $bc=5^y\cdot 5^z=5^{y+z}$이므로

$\log_{ab} bc=\log_{5^{x+y}} 5^{y+z}=\dfrac{y+z}{x+y}$

0227

$10^a=2$, $10^b=3$에서 $\log_{10} 2=a$, $\log_{10} 3=b$

$\therefore \log_{25} 12=\dfrac{\log_{10} 12}{\log_{10} 25}=\dfrac{\log_{10}(2^2\cdot 3)}{\log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}{2\log_{10} 10-2\log_{10} 2}=\dfrac{2a+b}{2-2a}$ 답 ②

0228

$a^m=b^n=3$에서 $\log_a 3=m$, $\log_b 3=n$이므로

$\log_3 a=\dfrac{1}{m}$, $\log_3 b=\dfrac{1}{n}$

$\therefore \log_{ab} a^2=\dfrac{\log_3 a^2}{\log_3 ab}=\dfrac{2\log_3 a}{\log_3 a+\log_3 b}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{m}}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\dfrac{2}{m}}{\dfrac{m+n}{mn}}=\dfrac{2n}{m+n}$ 답 ②

0229

$49^a=x$, $49^b=y$, $49^c=z$에서 $7^{2a}=x$, $7^{2b}=y$, $7^{2c}=z$이므로

$\log_7 x=2a$, $\log_7 y=2b$, $\log_7 z=2c$

$\therefore \log_{\sqrt{xy}} \dfrac{y^2}{z^3}=\dfrac{\log_7 \dfrac{y^2}{z^3}}{\log_7 \sqrt{xy}}=\dfrac{2\log_7 y-3\log_7 z}{\dfrac{1}{2}(\log_7 x+\log_7 y)}$

$=\dfrac{4b-6c}{\dfrac{1}{2}(2a+2b)}=\dfrac{4b-6c}{a+b}$ 답 $\dfrac{4b-6c}{a+b}$

유형 11 로그의 정의를 이용하여 식의 값 구하기

개념 01~03

$a^x=k_1$, $b^y=k_2$가 주어지고 x, y에 대한 식의 값을 구할 때는 로그의 정의를 이용하여 x, y를 로그로 나타낸 다음 주어진 식에 대입한다.
⇨ $a^x=k_1$, $b^y=k_2$이면 $x=\log_a k_1$, $y=\log_b k_2$

0230

$16^x=81^y=216$에서 $x=\log_{16} 216$, $y=\log_{81} 216$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_{16} 216}+\dfrac{1}{\log_{81} 216}=\log_{216} 16+\log_{216} 81$

$=\log_{6^3}(2^4\cdot 3^4)=\log_{6^3} 6^4=\dfrac{4}{3}$ 답 ④

다른 풀이 $16^x=216$에서 $2^{4x}=6^3$ $\therefore 2=6^{\frac{3}{4x}}$ ····· ㉠

$81^y=216$에서 $3^{4y}=6^3$ $\therefore 3=6^{\frac{3}{4y}}$ ····· ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{3}{4x}}\times 6^{\frac{3}{4y}}=6^{\frac{3}{4x}+\frac{3}{4y}}$

$1=\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4y}$ $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$

0231

$12^x=16$에서 $x=\log_{12} 16=\log_{12} 2^4=4\log_{12} 2$

$\therefore \dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{\log_{12} 2}=\log_2 12$

$24^y=32$에서 $y=\log_{24} 32=\log_{24} 2^5=5\log_{24} 2$

$\therefore \dfrac{5}{y}=\dfrac{1}{\log_{24} 2}=\log_2 24$

$\therefore \dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}=\log_2 12-\log_2 24=\log_2 \dfrac{1}{2}=-1$ 답 ②

다른 풀이 $12^x=16$에서 $12=16^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{4}{x}}$ ····· ㉠

$24^y=32$에서 $24=32^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$ ····· ㉡

㉠÷㉡을 하면 $12\div 24=2^{\frac{4}{x}}\div 2^{\frac{5}{y}}$

$2^{-1}=2^{\frac{4}{x}-\frac{5}{y}}$ $\therefore \dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}=-1$

0232

$3^x=4^y=(\sqrt[3]{12})^z=k\,(k>0)$라 하면

$xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$

$3^x=k$에서 $x=\log_3 k$이므로

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_3 k}=\log_k 3$

$4^y=k$에서 $y=\log_4 k$이므로

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_4 k}=\log_k 4$

$(\sqrt[3]{12})^z=12^{\frac{z}{3}}=k$에서 $\dfrac{z}{3}=\log_{12} k$이므로

$\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{\log_{12} k}=\log_k 12$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=\log_k 3+\log_k 4-\log_k 12$

$=\log_k \dfrac{3\cdot 4}{12}=\log_k 1=0$ 답 ③

다른 풀이 $3^x=4^y=(\sqrt[3]{12})^z=k\,(k>0)$라 하면

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$4^y=k$에서 $4=k^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

$(\sqrt[3]{12})^z=12^{\frac{z}{3}}=k$에서 $12=k^{\frac{3}{z}}$ ····· ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $3\times 4\div 12=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{3}{z}}$

$\therefore 1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{3}{z}}$

이때 $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=0$

0233

$a^p=b^q=c^r=231^s=k\,(k>0)$라 하면

$a^p=k$에서 $p=\log_a k$이므로

$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{\log_a k}=\log_k a$

$b^q=k$에서 $q=\log_b k$이므로

$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{\log_b k}=\log_k b$

$c^r=k$에서 $r=\log_c k$이므로

$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\log_c k}=\log_k c$

$231^s=k$에서 $s=\log_{231} k$이므로

$\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{\log_{231} k}=\log_k 231$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{s}$에서 $\log_k a+\log_k b+\log_k c=\log_k 231$

$\log_k abc=\log_k 231 \qquad \therefore abc=231$

이때 $abc=231=11\cdot7\cdot3$이고 $a>b>c$이므로

$a=11,\ b=7,\ c=3$

$\therefore a-b-c=11-7-3=1$ 답 ②

참고 $c=1$이면 $s=0$이 되어 조건에 모순이다.

따라서 $c>1$이고 $abc=231=11\cdot7\cdot3$에서

$a>b>c$이므로 $a=11,\ b=7,\ c=3$이다.

유형 12 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하기 개념 02~04

로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 때는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 주어진 조건을 이용하여 미지수 사이의 관계식을 구한다.

(ii) 구하는 식을 변형한 다음 (i)의 식을 대입한다.

0234

$\log_2 a+\log_4 b^2=\log_2 a+\log_{2^2} b^2=\log_2 a+\log_2 b$

$=\log_2 ab=2$

$\therefore ab=2^2=4$

$\therefore 4^{\log_2 a}\cdot2^{\log_{\sqrt{2}} b}=a^{\log_2 4}\cdot b^{\log_{\sqrt{2}} 2}=a^{\log_2 2^2}\cdot b^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2}$

$=a^{2\log_2 2}\cdot b^{2\log_2 2}=a^2b^2$

$=(ab)^2=4^2=16$ 답 ③

0235

$\log_a c:\log_b c=2:1$에서 $\log_a c=2\log_b c$

$\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{2}{\log_c b}$, $\log_c b=2\log_c a$

$\log_c b=\log_c a^2 \qquad \therefore b=a^2$

$\therefore \log_a b+2\log_b a=\log_a a^2+2\log_{a^2} a$

$=2+2\cdot\dfrac{1}{2}=3$ 답 ②

0236

$a^2b^3=1$에서 $b^3=a^{-2} \qquad \therefore b=a^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \log_a a^3b^2=\log_a\{a^3\cdot(a^{-\frac{2}{3}})^2\}=\log_a(a^3\cdot a^{-\frac{4}{3}})$

$=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$ 답 $\dfrac{5}{3}$

0237

$\log_a x=3$, $\log_b x=8$, $\log_c x=24$에서

$\log_x a=\dfrac{1}{3}$, $\log_x b=\dfrac{1}{8}$, $\log_x c=\dfrac{1}{24}$

$\therefore \log_{abc} x=\dfrac{1}{\log_x abc}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}}=\dfrac{1}{\frac{12}{24}}=2$ 답 2

0238

조건 (가)에서 $\log_2(\log_4 a)=1$이므로

$\log_4 a=2 \qquad \therefore a=4^2=16$

조건 (나)에서 $\log_a 5\times\log_5 b=\dfrac{5}{4}$이므로

$\dfrac{\log_5 b}{\log_5 a}=\dfrac{5}{4}$, $\log_a b=\dfrac{5}{4}$

$\therefore b=a^{\frac{5}{4}}=16^{\frac{5}{4}}=(2^4)^{\frac{5}{4}}=2^5=32$

$\therefore a+b=16+32=48$ 답 48

0239

$3^a=c$에서 $a=\log_3 c$이므로 $\log_c 3=\dfrac{1}{a}$

$5^b=c$에서 $b=\log_5 c$이므로 $\log_c 5=\dfrac{1}{b}$

$\log_{15} c=\dfrac{1}{\log_c 15}=\dfrac{1}{\log_c 3+\log_c 5}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{ab}{a+b}$ …… ㉠

한편, $a^2+b^2=2ab(a+b-1)$에서

$a^2+b^2=2ab(a+b)-2ab$, $a^2+b^2+2ab=2ab(a+b)$

$(a+b)^2=2ab(a+b)$

이때 $a+b\neq0$이므로 위의 식의 양변을 $2(a+b)^2$으로 나누면

$\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\log_{15} c=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

유형 13 로그와 이차방정식 개념 02~04

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\log_p\alpha$, $\log_p\beta$이면

(1) $\log_p\alpha+\log_p\beta=\log_p\alpha\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2) $\log_p\alpha\cdot\log_p\beta=\dfrac{c}{a}$

0240

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=4$, $\log_{10} a\cdot\log_{10} b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} b}=\dfrac{(\log_{10} a)^2+(\log_{10} b)^2}{\log_{10} a\cdot\log_{10} b}$

$=\dfrac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a\cdot\log_{10} b}{\log_{10} a\cdot\log_{10} b}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot2}{2}=6$ 답 6

0241

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9,\ \alpha\beta=6$

$\therefore \log_2(\alpha+\beta)-2\log_2\alpha\beta=\log_2(\alpha+\beta)-\log_2(\alpha\beta)^2$

$=\log_2\dfrac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=\log_2\dfrac{9}{36}=\log_2\dfrac{1}{4}$

$=\log_2 2^{-2}=-2$ 답 ④

0242

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \log_{\alpha\beta}\left(\alpha+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+\log_{\alpha\beta}\left(\beta+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left\{\left(\alpha+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$

$=\log_{\alpha\beta}(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log_2(2+6+1)$

$=\log_2 9$ 답 ②

0243

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{\log_3 8}{2}=\dfrac{\log_3 2^3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_3 2,\ \alpha\beta=\dfrac{8}{2}=4$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\cdot\dfrac{3}{2}\log_3 2=6\log_3 2$

$\therefore 3^{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}=3^{6\log_3 2}=3^{\log_3 2^6}=2^6=64$ 답 ⑤

0244

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_2 3=-a,\ 2\log_2 3=b$

$a=-(2+\log_2 3)=-(\log_2 4+\log_2 3)=-\log_2 12$

$b=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_2 9}{-\log_2 12}=-\log_{12}9=-2\log_{12}3$ 답 ①

0245

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=5$ … ❶

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4\cdot5=5$에서

$k=\alpha-\beta=\sqrt{5}\ (\because \alpha>\beta)$ … ❷

$\therefore \log_k\alpha+\log_k\beta=\log_k\alpha\beta=\log_{\sqrt{5}}5$

$=\log_{5^{\frac{1}{2}}}5=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\log_k\alpha+\log_k\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14 로그의 값이 정수가 될 조건 개념 02-04

$\log_a N$의 값이 정수가 되도록 하는 조건이 주어질 때

(1) $\log_a N$의 값의 범위에 속하는 정수를 모두 찾는다.

(2) 자연수 a 또는 N의 값을 구하려면 $\log_a N=k$ (k는 정수)로 놓고 $N=a^k$ 또는 $a=N^{\frac{1}{k}}$ 꼴로 변형한 다음 a 또는 N이 자연수임을 이용한다.

0246

$\log_2 x^3-\log_2\dfrac{1}{x}=3\log_2 x-(-\log_2 x)$

$=4\log_2 x$

$2<x<8$에서 $\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^3$이므로

$1<\log_2 x<3 \quad \therefore 4<4\log_2 x<12$

이때 $4\log_2 x$가 정수이므로

$4\log_2 x=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

$\log_2 x=\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}, 2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{4}$

$\therefore x=2^{\frac{5}{4}}, 2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{7}{4}}, 2^2, 2^{\frac{9}{4}}, 2^{\frac{5}{2}}, 2^{\frac{11}{4}}$

따라서 조건을 만족시키는 x의 개수는 7이다. 답 ④

0247

$\log_3 x+\log_3\sqrt[4]{x}=\log_3 x+\dfrac{1}{4}\log_3 x$

$=\dfrac{5}{4}\log_3 x$

$1<x<81$에서 $\log_3 1<\log_3 x<\log_3 3^4$이므로

$0<\log_3 x<4 \quad \therefore 0<\dfrac{5}{4}\log_3 x<5$

이때 $\dfrac{5}{4}\log_3 x$가 정수이므로

$\dfrac{5}{4}\log_3 x=1, 2, 3, 4$

$\log_3 x=\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}$

$\therefore x=3^{\frac{4}{5}}, 3^{\frac{8}{5}}, 3^{\frac{12}{5}}, 3^{\frac{16}{5}}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$3^{\frac{4}{5}}\cdot3^{\frac{8}{5}}\cdot3^{\frac{12}{5}}\cdot3^{\frac{16}{5}}=3^{\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}}=3^8$ 답 ③

0248

$\log_n 9\times\log_3 4=2\log_n 3\times\dfrac{2\log_n 2}{\log_n 3}$

$=4\log_n 2$

$4\log_n 2=k$ (k는 자연수)라 하면

$\log_n 2=\dfrac{k}{4},\ n^{\frac{k}{4}}=2 \quad \therefore n=2^{\frac{4}{k}}$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 $\dfrac{4}{k}$도 자연수이어야 한다.

즉, 자연수 k는 4의 약수이어야 하므로 k의 값은 1, 2, 4이다.

$k=1$일 때, $n=2^{\frac{4}{1}}=2^4=16$

$k=2$일 때, $n=2^{\frac{4}{2}}=2^2=4$

$k=4$일 때, $n=2^{\frac{4}{4}}=2^1=2$

따라서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+4+16=22$ 답 ②

0249

$$\log_5 \sqrt{5n^2}-\frac{1}{2}\log_5 n=\log_5 \sqrt{5n^2}-\log_5 \sqrt{n}$$
$$=\log_5 \frac{\sqrt{5n^2}}{\sqrt{n}}$$
$$=\log_5 \sqrt{5n^3}$$

$\log_5 \sqrt{5n^3}=k$ (k는 10 이하의 자연수)라 하면

$\sqrt{5n^3}=5^k$, $5n^3=5^{2k}$

$n^3=5^{2k-1}$ $\therefore n=5^{\frac{2k-1}{3}}$

이때 n이 자연수이므로 $\frac{2k-1}{3}$도 자연수이어야 한다.

즉, $2k-1$은 3의 배수이어야 하므로 10 이하의 자연수 k의 값은 2, 5, 8이다.

$k=2$일 때, $n=5^{\frac{2\cdot 2-1}{3}}=5^1$

$k=5$일 때, $n=5^{\frac{2\cdot 5-1}{3}}=5^3$

$k=8$일 때, $n=5^{\frac{2\cdot 8-1}{3}}=5^5$

따라서 조건을 만족시키는 n의 개수는 3이다. 답 3

STEP 1 개념 마스터 2

0250

$\log 1000=\log 10^3=3$ 답 3

0251

$\log 10\sqrt{10}=\log (10\times 10^{\frac{1}{2}})=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0252

$\log \frac{1}{100}=\log \frac{1}{10^2}=\log 10^{-2}=-2$ 답 -2

0253

$\log \frac{1}{\sqrt[3]{100}}=\log \frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=\log 10^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

0254 답 0.4914 **0255** 답 0.5276

0256 답 3.25 **0257** 답 3.32

0258

$\log 26.4=\log (10\times 2.64)$
$=\log 10+\log 2.64$
$=1+0.4216=1.4216$ 답 1.4216

0259

$\log 26400=\log (10^4\times 2.64)$
$=\log 10^4+\log 2.64$
$=4+0.4216=4.4216$ 답 4.4216

0260

$\log 0.264=\log (10^{-1}\times 2.64)$
$=\log 10^{-1}+\log 2.64$
$=-1+0.4216=-0.5784$ 답 -0.5784

0261

$\log 0.00264=\log (10^{-3}\times 2.64)$
$=\log 10^{-3}+\log 2.64$
$=-3+0.4216=-2.5784$ 답 -2.5784

0262 답 정수 부분: 0, 소수 부분: 0.0755

0263 답 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.2455

0264

$\log N=-0.2907=-1+0.7093$이므로
정수 부분: -1, 소수 부분: 0.7093
답 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.7093

0265

$\log N=-2.3288=-3+0.6712$이므로
정수 부분: -3, 소수 부분: 0.6712
답 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.6712

STEP 2 유형 마스터 2

유형 15 상용로그의 값 개념 05

양수 A에 대하여 $\log A=k$일 때
⇨ ① $\log A^n=n\log A=nk$
② $\log (10^n\times A)=\log 10^n+\log A=n+k$ (단, n은 실수)

0266

$\log 24+\log 50=\log (2^3\times 3)+\log \frac{100}{2}$
$=3\log 2+\log 3+\log 10^2-\log 2$
$=2\log 2+\log 3+2$
$=2\times 0.3010+0.4771+2$
$=3.0791$ 답 3.0791

0267

$\log \sqrt[4]{100A}-\log \frac{1}{\sqrt[3]{B^2}}=\log (10^2\times A)^{\frac{1}{4}}-\log B^{-\frac{2}{3}}$
$=\frac{1}{4}(\log 10^2+\log A)+\frac{2}{3}\log B$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log A+\frac{2}{3}\log B$
$=0.5+\frac{1}{4}\times 1.2+\frac{2}{3}\times 3.9$
$=3.4$ 답 ④

0268

$\log 2.51=0.3997$이므로

$\log 25.1^4=4\log 25.1=4\log(10\times 2.51)=4(\log 10+\log 2.51)$

$=4(1+0.3997)=5.5988=5+0.5988$

이때 $\log 3.97=0.5988$이므로

$\log 25.1^4=5+\log 3.97=\log 10^5+\log 3.97$

$=\log(10^5\times 3.97)$

$\therefore 25.1^4=3.97\times 10^5$ 답 ⑤

0269

상용로그표에서 $\log 6.35=0.8028$이므로

$\log\sqrt{0.0635}=\frac{1}{2}\log 0.0635=\frac{1}{2}\log(10^{-2}\times 6.35)$

$=\frac{1}{2}(\log 10^{-2}+\log 6.35)=\frac{1}{2}(-2+0.8028)$

$=-1+0.4014$ … ❶

이때 $\log 2.52=0.4014$이므로

$\log\sqrt{0.0635}=-1+\log 2.52=\log 10^{-1}+\log 2.52$

$=\log(10^{-1}\times 2.52)=\log 0.252$ … ❷

$\therefore \sqrt{0.0635}=0.252$ … ❸

답 0.252

채점 기준	비율
❶ $\log\sqrt{0.0635}=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 상용로그의 값이 α인 수를 찾아 $n+\alpha$를 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\sqrt{0.0635}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 16 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 개념 06

(1) 양수 A에 대하여 $\log A$는 정수 부분과 소수 부분의 합으로 나타낼 수 있다.

⇨ $\log A=n+\alpha$ (단, n은 정수, $0\le\alpha<1$)

⇨ $\alpha=\log A-n$

(2) 상용로그의 값이 음수일 때는 $0\le$(소수 부분)<1이 되게 한 다음 정수 부분을 결정한다.

0270

$\log x^2+\log\sqrt{x}=2\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{5}{2}\log x$

$=\frac{5}{2}\times(-3.3978)=-8.4945=-9+0.5055$

따라서 정수 부분은 -9, 소수 부분은 0.5055이다. 답 ④

0271

$\log 10<\log 20<\log 100$에서 $1<\log 20<2$이므로

$n=1$, $\alpha=\log 20-1=\log\frac{20}{10}=\log 2$

$\therefore \frac{10^n+10^\alpha}{10^n-10^\alpha}=\frac{10+10^{\log 2}}{10-10^{\log 2}}=\frac{10+2}{10-2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0272

$\log 10<\log 30<\log 100$에서 $1<\log 30<2$이므로 $\log 30$의 정수 부분은 1, 소수 부분은 $\log 30-1=\log\frac{30}{10}=\log 3$이다.

또, $\log\frac{100}{3}=2-\log 3=1+(1-\log 3)$이고 $0<1-\log 3<1$이므로 $\log\frac{100}{3}$의 정수 부분은 1, 소수 부분은 $1-\log 3$이다.

따라서 $a=1+1=2$, $b=\log 3+(1-\log 3)=1$이므로

$a-b=2-1=1$ 답 1

0273

$\log N=4+\alpha$ $(0<\alpha<1)$이므로

$\log\frac{1}{\sqrt[3]{N}}=\log N^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\log N$

$=-\frac{1}{3}(4+\alpha)=-\frac{4}{3}-\frac{\alpha}{3}=-2+\frac{2-\alpha}{3}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{2-\alpha}{3}<\frac{2}{3}$이므로 $\log\frac{1}{\sqrt[3]{N}}$의 소수 부분은 $\frac{2-\alpha}{3}$이다.

($0<\alpha<1$에서 $-\frac{1}{3}<-\frac{\alpha}{3}<0$ $\therefore \frac{1}{3}<\frac{2-\alpha}{3}<\frac{2}{3}$)

답 ③

유형 17 상용로그의 정수 부분과 소수 부분을 근으로 갖는 이차방정식 개념 06

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)일 때, $\log A$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이면

$n+\alpha=-\frac{b}{a}$, $n\alpha=\frac{c}{a}$

0274

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 이차방정식 $3x^2+10x+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\frac{10}{3}$, $n\alpha=\frac{k}{3}$

이때 n은 정수, $0\le\alpha<1$이고 $-\frac{10}{3}=-4+\frac{2}{3}$이므로

$n=-4$, $\alpha=\frac{2}{3}$

$\therefore k=3n\alpha=3\cdot(-4)\cdot\frac{2}{3}=-8$ 답 ②

0275

$\log 100<\log 200<\log 1000$에서 $2<\log 200<3$이므로 $\log 200$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 200-2=\log 2$이다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, $\log 2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log 2=-a$, $2\log 2=b$

$\therefore a+b=(-2-\log 2)+2\log 2=-2+\log 2$

$=\log(10^{-2}\times 2)=\log 0.02$ 답 ①

0276

$\log 10<\log 50<\log 100$에서 $1<\log 50<2$이므로

$n=1$, $\alpha=\log 50-1=\log 5$

이때 $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\log 5}=\log_5 10$이므로 $5^{\frac{1}{\alpha}}=5^{\log_5 10}=10$

따라서 x^2의 계수가 1이고 5^n과 $5^{\frac{1}{\alpha}}$, 즉 5와 10을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(5+10)x+5\cdot 10=0$ $\therefore x^2-15x+50=0$ 답 ③

0277

삼차방정식 $2x^3+5x^2+px+q=0$의 한 근이 -1이므로 오른쪽 조립제법에 의하여

-1	2	5	p	q
		-2	-3	$-p+3$
	2	3	$p-3$	$-p+q+3=0$

$(x+1)(2x^2+3x+p-3)=0$

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 이차방정식 $2x^2+3x+p-3=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\frac{3}{2}$, $n\alpha=\frac{p-3}{2}$

이때 n은 정수, $0\le\alpha<1$이고 $-\frac{3}{2}=-2+\frac{1}{2}$이므로

$n=-2$, $\alpha=\frac{1}{2}$

즉, $n\alpha=\frac{p-3}{2}$에서 $-1=\frac{p-3}{2}$ $\therefore p=1$

$-p+q+3=0$에서 $-1+q+3=0$ $\therefore q=-2$

$\therefore p+q=1+(-2)=-1$ 답 -1

다른 풀이 $\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하자.

삼차방정식 $2x^3+5x^2+px+q=0$의 세 근이 $-1, n, \alpha$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+n+\alpha=-\frac{5}{2}$ ……㉠

$-n+n\alpha-\alpha=\frac{p}{2}$ ……㉡

$-n\alpha=-\frac{q}{2}$ ……㉢

㉠에서 $n+\alpha=-\frac{3}{2}=-2+\frac{1}{2}$ $\therefore n=-2, \alpha=\frac{1}{2}$

㉡에서 $2-1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{p}{2}$ $\therefore p=1$

㉢에서 $-(-2)\cdot\frac{1}{2}=1=-\frac{q}{2}$ $\therefore q=-2$

$\therefore p+q=1+(-2)=-1$

Lecture

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

유형 18 숫자의 배열이 같은 양수의 상용로그 개념 07

(1) 진수의 숫자의 배열이 같으면 상용로그의 소수 부분이 같다.

(2) 상용로그의 소수 부분이 같으면 진수의 숫자의 배열이 같다.

0278

$a=\log 543=\log(10^2\times 5.43)=\log 10^2+\log 5.43$

$=2+0.7348=2.7348$

$\log b=-1.2652=-2+0.7348$

$=-2+\log 5.43=\log 10^{-2}+\log 5.43$

$=\log(10^{-2}\times 5.43)=\log 0.0543$

$\therefore b=0.0543$

$\therefore a+b=2.7348+0.0543=2.7891$ 답 2.7891

0279

$\log 1.25$와 소수 부분이 같으려면 진수의 숫자의 배열이 1.25와 같아야 한다.

$\log\frac{1}{8}=\log 0.125$, $\log\frac{1}{25}=\log 0.04$, $\log\frac{1}{20}=\log 0.05$,

$\log(5^3\times 10^5)=\log(125\times 10^5)$

따라서 보기의 상용로그 중 $\log 1.25$와 소수 부분이 같은 것의 개수는 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 4이다. 답 ④

0280

$\log N=-3.1549=-4+0.8451$

$=\log 10^{-4}+\log 7=\log(10^{-4}\times 7)$

따라서 $N=7\times 10^{-4}$이므로 $a=7$, $n=-4$

$\therefore a+n=7+(-4)=3$ 답 ③

0281

$\log x^3=3\log x=-1.4055$에서

$\log x=\frac{1}{3}\times(-1.4055)=-0.4685=-1+0.5315$

$=\log 10^{-1}+\log 3.4=\log(10^{-1}\times 3.4)=\log 0.34$

$\therefore x=0.34$ 답 0.34

유형 19 소수 부분이 같은 상용로그 개념 06

$\log A=m+\alpha$, $\log B=n+\alpha$ (m, n은 정수, $0\le\alpha<1$)이면

$\log A-\log B=m-n$ (정수)

0282

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log x^5$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^5-\log x^2=5\log x-2\log x=3\log x$

에서 $3\log x$가 정수이다.

이때 $\log x$의 정수 부분이 5이므로 $5\le\log x<6$

$\therefore 15\le 3\log x<18$

$3\log x=15$ 또는 $3\log x=16$ 또는 $3\log x=17$

$\log x=5$ 또는 $\log x=\frac{16}{3}$ 또는 $\log x=\frac{17}{3}$

$\therefore x=10^5$ 또는 $x=10^{\frac{16}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{17}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^5\cdot 10^{\frac{16}{3}}\cdot 10^{\frac{17}{3}}=10^{5+\frac{16}{3}+\frac{17}{3}}=10^{16}$ 답 ②

0283

$\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x-\log\frac{1}{x}=\log x+\log x=2\log x$

에서 $2\log x$가 정수이다.

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$ $\therefore 2<2\log x<4$

$2\log x=3$, $\log x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{3}{2}}$

$\therefore x^2=(10^{\frac{3}{2}})^2=10^3=1000$ 답 1000

0284

$2\log x-\log\frac{x}{5}=2\log x-(\log x-\log 5)$

$=\log x+\log 5$

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4$

$\therefore\ 3+\log 5\le\log x+\log 5<4+\log 5$

이때 $\log x+\log 5$가 정수이므로

$\log x+\log 5=4$

$\log x=4-\log 5=\log 10^4-\log 5$

$=\log\frac{10^4}{5}=\log\frac{10000}{5}=\log 2000$

$\therefore\ x=2000$ 답 2000

다른 풀이 ❶ $2\log x-\log\frac{x}{5}=\log\left(x^2\div\frac{x}{5}\right)=\log 5x$

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4$

$\log 10^3\le\log x<\log 10^4$

$\therefore\ 1000\le x<10000$ ····· ㉠

이때 $\log 5x$가 정수이므로 $5x$는 10^k (k는 정수) 꼴이어야 한다.

따라서 ㉠에서 $5000\le 5x<50000$이므로

$5x=10000$ $\therefore\ x=2000$

다른 풀이 ❷ $2\log x-\log\frac{x}{5}=\log x+\log 5$

에서 $\log x+\log 5$가 정수이다.

$\log x$의 소수 부분을 α ($0\le\alpha<1$)라 하면

$\log x=3+\alpha$이므로

$\log x+\log 5=3+\alpha+\log 5$

이때 $\log x+\log 5$가 정수이고 $1<5<10$에서 $0<\log 5<1$이므로

$\alpha+\log 5=1$이어야 한다.

따라서 $\log x+\log 5=3+1=4$이므로

$\log 5x=4$, $5x=10^4$

$5x=10000$ $\therefore\ x=2000$

0285

조건 (나)에서 $\log x^2$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x$

에서 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이다.

조건 (가)에서 $\log x$의 정수 부분이 2이므로

$2\le\log x<3$ $\therefore\ 3\le\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$

$\frac{3}{2}\log x=3$ 또는 $\frac{3}{2}\log x=4$

$\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{8}{3}$

$\therefore\ x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱 k는

$k=10^2\cdot 10^{\frac{8}{3}}=10^{2+\frac{8}{3}}=10^{\frac{14}{3}}$

$\therefore\ \log k^3=\log\left(10^{\frac{14}{3}}\right)^3=\log 10^{14}=14$ 답 ④

발전 유형 20 소수 부분의 합이 1인 상용로그 개념 06

$\log A=m+\alpha$, $\log B=n+\beta$ (m, n은 정수, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$)의 소수 부분의 합이 1이면

⇨ $\log A+\log B=m+n+1$ (정수)

0286

$\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log\sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x$

에서 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이다.

$10<x<1000$에서 $1<\log x<3$ $\therefore\ \frac{3}{2}<\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$

$\frac{3}{2}\log x=2$ 또는 $\frac{3}{2}\log x=3$ 또는 $\frac{3}{2}\log x=4$

$\log x=\frac{4}{3}$ 또는 $\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{8}{3}$

$\therefore\ x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

그런데 $x=10^2$이면 $\log x=2$, $\log\sqrt{x}=1$이 되어 $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 0이 된다.

$\therefore\ x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\cdot 10^{\frac{8}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{8}{3}}=10^4$ 답 ③

0287

$\log\sqrt[3]{x}$와 $\log\sqrt[6]{x^5}$의 합이 정수이므로

$\log\sqrt[3]{x}+\log\sqrt[6]{x^5}=\frac{1}{3}\log x+\frac{5}{6}\log x=\frac{7}{6}\log x$

에서 $\frac{7}{6}\log x$가 정수이다.

$100<x<1000$에서 $2<\log x<3$ $\therefore\ \frac{7}{3}<\frac{7}{6}\log x<\frac{7}{2}$

$\frac{7}{6}\log x=3$ $\therefore\ \log x=\frac{18}{7}$

$\therefore\ \log\sqrt{x^7}=\frac{7}{2}\log x=\frac{7}{2}\cdot\frac{18}{7}=9$ 답 ②

0288

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x$

에서 $3\log x$가 정수이다. ··· ❶

$\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2\le\log x<3$

$\therefore\ 6\le 3\log x<9$

$3\log x=6$ 또는 $3\log x=7$ 또는 $3\log x=8$

$\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{7}{3}$ 또는 $\log x=\frac{8}{3}$

$\therefore\ x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

그런데 $x=10^2$이면 $\log x=2$, $\log x^2=4$가 되어 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 0이 된다.

$\therefore\ x=10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$ ··· ❷

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱 k는

$k=10^{\frac{7}{3}}\cdot 10^{\frac{8}{3}}=10^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}}=10^5$

$\therefore \log k=\log 10^5=5$ … ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $3\log x$가 정수임을 알 수 있다.	30 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\log k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $\log x$의 소수 부분을 α라 하면 $\log x=2+\alpha\ (0<\alpha<1)$

$\therefore \log x^2=2\log x=2(2+\alpha)=4+2\alpha\ (0<2\alpha<2)$

(i) $0<2\alpha<1$일 때, $\log x^2$의 소수 부분은 2α이므로

$\alpha+2\alpha=1,\ 3\alpha=1 \quad \therefore \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$이므로 $x=10^{\frac{7}{3}}$

(ii) $1\le 2\alpha<2$일 때, $\log x^2$의 소수 부분은 $\underbrace{2\alpha-1}_{0\le 2\alpha-1<1}$이므로

$\alpha+(2\alpha-1)=1,\ 3\alpha=2 \quad \therefore \alpha=\frac{2}{3}$

따라서 $\log x=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$이므로 $x=10^{\frac{8}{3}}$

(i), (ii)에서 $k=10^{\frac{7}{3}}\cdot 10^{\frac{8}{3}}=10^5 \quad \therefore \log k=5$

0289

조건 (가), (나)에 의하여 $\log x$의 소수 부분을 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, $\log y$의 정수 부분을 n (n은 정수)이라 하면

$\log x=1+\alpha,\ \log y=n+(1-\alpha)$

조건 (다)에서 $\log xy^2=4.7$이므로

$\log x+2\log y=4.7,\ 1+\alpha+2(n+1-\alpha)=4.7$

$\therefore 2n+2+(1-\alpha)=4.7$

이때 $2n+2$는 정수이고, $0<1-\alpha<1$이므로

$2n+2=4,\ 1-\alpha=0.7 \quad \therefore n=1,\ \alpha=0.3$

따라서 $\log y$의 정수 부분은 1이다. 답 1

발전 유형 21 상용로그의 정수 부분과 소수 부분이 조건으로 주어진 경우 개념 06

양수 A에 대하여 $\log A$의 정수 부분이 n이면

$n\le\log A<n+1 \Longleftrightarrow 10^n\le A<10^{n+1}$

0290

$\log\frac{1}{n}$의 정수 부분이 -2이므로 $-2\le\log\frac{1}{n}<-1$

$10^{-2}\le\frac{1}{n}<10^{-1},\ \frac{1}{100}\le\frac{1}{n}<\frac{1}{10} \quad \therefore 10<n\le 100$

따라서 자연수 n의 개수는 11, 12, …, 100의 $\underbrace{90}_{100-10=90}$이다. 답 ②

0291

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서 $g(x)=\frac{3-\{f(x)\}^2}{3}$

$0\le g(x)<1$이므로

$0\le\frac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1 \quad \therefore 0<\{f(x)\}^2\le 3$

이때 $f(x)$는 정수이므로 $\{f(x)\}^2=1$

$\therefore f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$ … ❶

(i) $f(x)=-1$일 때

$g(x)=\frac{3-(-1)^2}{3}=\frac{2}{3}$

즉, $\log x=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$이므로 $x=10^{-\frac{1}{3}}$ … ❷

(ii) $f(x)=1$일 때

$g(x)=\frac{3-1^2}{3}=\frac{2}{3}$

즉, $\log x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$이므로 $x=10^{\frac{5}{3}}$ … ❸

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$10^{-\frac{1}{3}}\cdot 10^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p=3,\ q=4$이므로 $p+q=3+4=7$ … ❹

답 7

채점 기준	비율
❶ 상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질을 이용하여 $f(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)=-1$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)=1$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0292

$1\le n\le 100$이므로 $0\le f(n)\le 2$

$\therefore f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$

(i) $f(n)=0$일 때, $1\le n<10$

이때 $11\le n+10<20$이므로 $f(n+10)=1$

$\therefore f(n+10)=f(n)+1$

(ii) $f(n)=1$일 때, $10\le n<100$

$10\le n<90$일 때, $20\le n+10<100$이므로 $f(n+10)=1$

$\therefore f(n+10)\ne f(n)+1$

$90\le n<100$일 때, $100\le n+10<110$이므로 $f(n+10)=2$

$\therefore f(n+10)=f(n)+1$

(iii) $f(n)=2$일 때, $n=100$

$f(n+10)=f(110)=2 \quad \therefore f(n+10)\ne f(n)+1$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는

$1\le n<10,\ 90\le n<100$이므로 자연수 n의 개수는

$(10-1)+(100-90)=19$ 답 19

참고 (ii)에서 $n+10=100$, 즉 $n=90$일 때를 기준으로 $n+10$의 자릿수가 달라지므로 $10\le n<90,\ 90\le n<100$으로 나누어 생각한다.

0293

$\log n=f(n)+g(n)$ (단, $f(n)$은 정수, $0\le g(n)<1$)

ㄱ. $f(n)=g(n)\Longleftrightarrow f(n)=g(n)=0$ ($\because f(n)$은 정수)

$\Longleftrightarrow \log n=0$

$\Longleftrightarrow n=1$ (참)

ㄴ. $\log 50=f(50)+g(50)$이므로

$10^{f(50)}\cdot 10^{g(50)}=10^{f(50)+g(50)}=10^{\log 50}=50$ (참)

ㄷ. $\log 10n=f(10n)+g(10n)$에서

$\log 10n=1+\log n=1+f(n)+g(n)$이고

$1+f(n)$은 정수, $0\le g(n)<1$이므로 $\log 10n$의

정수 부분은 $f(10n)=1+f(n)$, 소수 부분은 $g(10n)=g(n)$

$\therefore f(10n)g(10n)=\{1+f(n)\}g(n)$

$=f(n)g(n)+g(n)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 22 상용로그의 실생활에의 활용 – 관계식이 주어진 경우 개념 05

(i) 주어진 관계식에 알맞은 문자 또는 값을 대입한다.

(ii) (i)의 관계식에 로그의 정의 및 성질을 이용한다.

0294

크기가 130 dB인 소리의 세기를 I_1, 크기가 20 dB인 소리의 세기를 I_2라 하면

$130=120+10\log I_1$, $\log I_1=1$ $\therefore I_1=10$

$20=120+10\log I_2$, $\log I_2=-10$ $\therefore I_2=10^{-10}$

$\therefore \dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{10}{10^{-10}}=10^{11}$

따라서 크기가 130 dB인 소리의 세기는 크기가 20 dB인 소리의 세기의 10^{11}배이다. 답 ③

0295

부피탄성률이 M이고 밀도가 36인 유체 속에서 전달되는 음파의 속도가 v_1이므로 $\log v_1=k-\dfrac{1}{2}\log 36$ …… ㉠

부피탄성률이 M이고 밀도가 4인 유체 속에서 전달되는 음파의 속도가 v_2이므로 $\log v_2=k-\dfrac{1}{2}\log 4$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$\log v_2-\log v_1=\dfrac{1}{2}(\log 36-\log 4)$

$\log \dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{1}{2}\log 9=\dfrac{1}{2}\log 3^2=\log 3$

$\therefore \dfrac{v_2}{v_1}=3$ 답 3

0296

물 1 mL당 초기 박테리아의 수가 8×10^5이고 약품을 투여한 지 3시간이 지나는 순간 1 mL당 박테리아의 수는 2×10^5이므로

$\log \dfrac{2\times10^5}{8\times10^5}=-3k$에서 $3k=-\log\dfrac{1}{4}=2\log 2=2\cdot0.3=0.6$

$\therefore k=0.2$

약품을 투여한 지 a시간이 지나는 순간 1 mL당 박테리아의 수가 8×10^3이 되므로 $\log \dfrac{8\times10^3}{8\times10^5}=-0.2a$에서

$0.2a=-\log\dfrac{1}{10^2}=2$

$\therefore a=\dfrac{2}{0.2}=10$ 답 10

0297

절대 등급이 5.3인 별의 광도가 L, 절대 등급이 1.8인 별의 광도가 kL이므로

$5.3-1.8=-2.5\log\dfrac{L}{kL}$에서

$3.5=-2.5\log\dfrac{1}{k}$, $3.5=2.5\log k$

$\log k=\dfrac{3.5}{2.5}=\dfrac{7}{5}$

$\therefore k=10^{\frac{7}{5}}$ 답 ④

유형 23 상용로그의 실생활에의 활용 – 일정한 비율로 변화하는 경우 개념 05

올해의 양이 A이고

(1) 매년 a %씩 증가할 때, k년 후의 양은 $A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^k$

(2) 매년 a %씩 감소할 때, k년 후의 양은 $A\left(1-\dfrac{a}{100}\right)^k$

0298

새 자동차의 가격이 2000만 원이고, 매년 10 %씩 가격이 하락하므로 이 자동차의 10년 후의 중고 가격을 A만 원이라 하면

$A=2000\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)^{10}$ $\therefore A=2000\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log A=\log\left\{2000\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^{10}\right\}=\log 2000+10\log\dfrac{9}{10}$

$=\log 2+3+10(\log 9-1)=\log 2+3+10(2\log 3-1)$

$=0.3010+3+10(2\times0.4771-1)=2.8430$

이때 $\log 6.97=0.8430$이므로 $\log 697=2.8430$

$\therefore A=697$

따라서 이 자동차의 10년 후의 중고 가격은 697만 원이다.

답 697만 원

0299

수면 위의 빛의 밝기를 a라 하면 물의 깊이가 n m일 때 수면 아래의 빛의 밝기는 $a\left(1-\dfrac{10}{100}\right)^n$

이때 수면 위의 빛의 밝기의 $\dfrac{1}{2}$이 되는 순간은

$a\left(1-\dfrac{10}{100}\right)^n=\dfrac{1}{2}a$, $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n=\dfrac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\dfrac{9}{10}=\log\dfrac{1}{2}$

$n(\log 9-\log 10)=-\log 2$, $n(2\log 3-1)=-\log 2$

$n(2\times0.48-1)=-0.30$, $0.04n=0.30$

$\therefore n=\dfrac{0.30}{0.04}=\dfrac{15}{2}=7.5$

따라서 수면 위의 빛의 밝기의 $\dfrac{1}{2}$이 되는 순간의 물의 깊이는 7.5 m이다. 답 ④

0300

n년 후에 한 도시의 인구가 다른 도시의 인구의 3배가 된다고 하면

$3\times10^5\times\left(1+\frac{2}{100}\right)^n=10^5\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^n$, $3\times1.02^n=1.04^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 3+n\log 1.02=n\log 1.04$

$n(\log 1.04-\log 1.02)=\log 3$

$n(0.02-0.01)=0.48$

$\therefore n=48$

따라서 한 도시의 인구가 다른 도시의 인구의 3배가 되는 것은 48년 후이다. 답 ⑤

0301

8시간 후 바이러스에 감염된 컴퓨터의 수는 100×4^8, 즉 100×2^{16}대이므로

$100\times2^{16}=k\times10^4$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(100\times2^{16})=\log(k\times10^4)$, $2+16\log 2=\log k+4$

$\log k=-2+16\log 2$

$=-2+16\times0.3=2.8$

이때 $\log 6.31=0.8$이므로 $\log 631=2.8$

$\therefore k=631$ 답 631

0302

출고된 새 상품의 가격을 A원이라 하고, 새 상품을 구입한 후 7년이 지났을 때의 중고 상품의 가격이 새 상품의 가격의 k배가 된다고 하면

$kA=\left(\frac{80}{100}\right)^7A$, $k=0.8^7$

양변에 상용로그를 취하면

$\log k=\log 0.8^7=7\log 0.8$

$=7\log(10^{-1}\times2^3)=7(-1+3\times0.3)$

$=-0.7=-1+0.3=-1+\log 2$

$=\log(10^{-1}\times2)=\log 0.2$

$\therefore k=0.2$

따라서 $0.8^7=0.2$에서 가격이 A원인 새 상품을 구입한 후 7년이 지났을 때의 중고 상품의 가격은 $0.2A$원이므로 새 상품의 가격의 20 %이다. 답 20 %

0303

작년 매출을 A원이라 하면 올해의 매출은 $0.5A$원이고, 올해 예상 매출을 기준으로 매년 15 %씩 매출을 증가시킬 때 10년 후의 예상 매출이 작년 매출의 k배가 된다고 하면

$0.5A\left(1+\frac{15}{100}\right)^{10}=kA$, $0.5\times1.15^{10}=k$

양변에 상용로그를 취하면

$\log k=\log(0.5\times1.15^{10})=\log 0.5+10\log 1.15$

$=-\log 2+10\log 1.15=-0.30+10\times0.06$

$=0.30=\log 2$

$\therefore k=2$ 답 2

STEP 3 내신 마스터

0304

유형 01 로그의 정의

|전략| $\log_a N=k$이면 $a^k=N$임을 이용한다.

$\log_x\sqrt{2}=\frac{1}{4}$에서 $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$, $x=(\sqrt{2})^4=4$ $\therefore A=\{4\}$

$\log_{\frac{1}{3}}x^2=2$에서 $x^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $x=\pm\frac{1}{3}$ $\therefore B=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$

따라서 $A\cup B=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},4\right\}$이므로 모든 원소의 합은 4이다.

답 ④

0305

유형 03 로그의 기본 성질

|전략| 로그의 정의와 기본 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$\log_a\sqrt{b+c}=1-\log_a\sqrt{b-c}$에서

$\log_a\sqrt{b+c}+\log_a\sqrt{b-c}=1$

$\log_a(\sqrt{b+c}\sqrt{b-c})=1$, $\log_a\sqrt{b^2-c^2}=1$

로그의 정의에 의하여 $\sqrt{b^2-c^2}=a$

$b^2-c^2=a^2$ $\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 ④

0306

유형 01 로그의 정의 + 03 로그의 기본 성질

|전략| 밑이 2인 로그의 값이 자연수이려면 진수는 2^k (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

집합 B가 자연수 전체의 집합의 부분집합이므로 집합 B의 원소는 자연수이어야 한다.

즉, $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$의 값이 모두 자연수이므로

a, b, c는 2^k (k는 자연수) 꼴이다.

이때 $a<b$라 하면 $a+b=20$에서

$a=2^2=4$, $b=2^4=16$이므로

$A=\{4, 16, c\}$, $B=\{2, 4, \log_2 c\}$

집합 B의 모든 원소의 합이 11이므로

$2+4+\log_2 c=11$, $\log_2 c=5$

$\therefore c=2^5=32$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$4+16+32=52$ 답 ⑤

0307

유형 04 로그의 밑의 변환

|전략| 주어진 식의 밑을 통일한 다음 로그의 기본 성질을 이용한다.

$\frac{1}{\log_2 5!}+\frac{1}{\log_3 5!}+\frac{1}{\log_4 5!}+\frac{1}{\log_5 5!}$

$=\log_{5!}2+\log_{5!}3+\log_{5!}4+\log_{5!}5$

$=\log_{5!}(2\cdot3\cdot4\cdot5)=\log_{5!}5!$

$=1$ 답 ①

0308

유형 **04** 로그의 밑의 변환

|전략| 주어진 식의 로그의 밑을 같게 한 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 두 양수의 합의 최솟값을 구한다.

$$(\log_a \sqrt[3]{b})^2+(\log_b a)^2=\left(\frac{1}{3}\log_a b\right)^2+\left(\frac{1}{\log_a b}\right)^2$$
$$=\frac{1}{9}(\log_a b)^2+\frac{1}{(\log_a b)^2}$$

이때 $\frac{1}{9}(\log_a b)^2>0$, $\frac{1}{(\log_a b)^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{9}(\log_a b)^2+\frac{1}{(\log_a b)^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{9}(\log_a b)^2\cdot\frac{1}{(\log_a b)^2}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=3$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ④

참고 등호는 $\frac{1}{9}(\log_a b)^2=\frac{1}{(\log_a b)^2}$일 때 성립하므로

$(\log_a b)^4=9$ $\therefore (\log_a b)^2=3$ ($\because (\log_a b)^2>0$)

즉, 등호는 $(\log_a b)^2=3$일 때 성립한다.

0309

유형 **05** 로그의 여러 가지 성질

|전략| $a^{\log_a b}=b$임을 이용한다.

$\log_3 4+\log_3 2=\log_3(4\cdot 2)=\log_3 8$

$\therefore (3^{\log_3 4+\log_3 2})^2+(2^{\log_2 4+\log_2 2})^{\log_2 3}$

$=(3^{\log_3 8})^2+(2^{\log_2 8})^{\log_2 3}$

$=8^2+(2^{\log_2 3})^{\log_3 8}$

$=8^2+3^{\log_3 8}=64+8=72$ 답 ③

0310

유형 **07** 로그의 대소 비교

|전략| 먼저 로그의 성질을 이용하여 주어진 수를 간단히 한다.

(i) $\log_9 3+\log_{25} 5=\frac{1}{2}\log_3 3+\frac{1}{2}\log_5 5$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(ii) $2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}}=2^{\log_2 3}=3$

(iii) $\log_3 5>0$, $\log_5 3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 5+\log_5 3=\log_3 5+\frac{1}{\log_3 5}$

$\geq 2\sqrt{\log_3 5\cdot\frac{1}{\log_3 5}}=2$

그런데 $\log_3 5\neq\log_5 3$이므로

$\log_3 5+\log_5 3>2$

(i), (ii), (iii)에서 가장 작은 수는 $\log_9 3+\log_{25} 5$이므로 구하는 값은 1이다. 답 ①

참고 (iii) $3<5<9$에서 $1<\log_3 5<2$

$1<3<5$에서 $0<\log_5 3<1$

$\therefore 1<\log_3 5+\log_5 3<3$

즉, (i), (ii), (iii)에서 가장 작은 수는 $\log_9 3+\log_{25} 5$임을 알 수 있다.

0311

유형 **09** $\log_a b=c$가 주어진 경우 로그의 값을 문자로 나타내기

|전략| $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$의 x 대신 $\log_3 6$을 대입하여 정리한 다음 밑을 5로 통일하고 진수를 소인수분해한다.

$$f(\log_3 6)=\frac{\log_3 6+1}{2\log_3 6-1}=\frac{\log_3 6+\log_3 3}{\log_3 6^2-\log_3 3}$$
$$=\frac{\log_3(6\cdot 3)}{\log_3\frac{36}{3}}=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}=\frac{\frac{\log_5 18}{\log_5 3}}{\frac{\log_5 12}{\log_5 3}}$$
$$=\frac{\log_5 18}{\log_5 12}=\frac{\log_5(2\cdot 3^2)}{\log_5(2^2\cdot 3)}$$
$$=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{2\log_5 2+\log_5 3}=\frac{a+2b}{2a+b}$$ 답 ⑤

다른 풀이 $\log_3 6=\frac{\log_5 6}{\log_5 3}=\frac{\log_5 2+\log_5 3}{\log_5 3}=\frac{a+b}{b}$이므로

$$f(\log_3 6)=f\left(\frac{a+b}{b}\right)=\frac{\frac{a+b}{b}+1}{2\cdot\frac{a+b}{b}-1}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

0312

유형 **12** 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하기

|전략| $\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}=k$로 놓은 다음 로그의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

$a>1$, $b>1$, $c>1$이므로

$\log_a b>0$, $\log_b c>0$, $\log_c a>0$

$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}=k$ ($k>0$)라 하면

$\log_a b=k$, $\log_b c=2k$, $\log_c a=4k$

이때 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이므로

$k\cdot(2k)\cdot(4k)=1$, $8k^3=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$ ($\because k$는 실수)

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=k+2k+4k$

$=7k=7\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ 답 ①

0313

유형 **13** 로그와 이차방정식

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $3x^2-6x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$3\alpha^2-6\alpha-1=0$, $3\beta^2-6\beta-1=0$에서

$3\alpha^2-3\alpha+2=3\alpha+3$, $3\beta^2-3\beta+2=3\beta+3$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \log_7\{(3\alpha^2-3\alpha+2)(3\beta^2-3\beta+2)\}$

$=\log_7\{(3\alpha+3)(3\beta+3)\}$

$=\log_7\{9(\alpha+1)(\beta+1)\}$

$=\log_7\{9(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\}$

$=\log_7\left\{9\left(-\frac{1}{3}+2+1\right)\right\}$

$=\log_7 24$ 답 ⑤

0314

유형 **15** 상용로그의 값

|전략| 먼저 주어진 상용로그의 값을 이용하여 $\log \sqrt[3]{68400}$의 값을 구한다.

$$\log \sqrt[3]{68400}=\frac{1}{3}\log 68400=\frac{1}{3}\log (10^4\times 6.84)$$
$$=\frac{1}{3}(\log 10^4+\log 6.84)=\frac{1}{3}(4+0.8351)$$
$$=1.6117$$

이때

$$1.6117=1+0.6117=\log 10+\log 4.09$$
$$=\log (10\times 4.09)=\log 40.9$$

이므로

$\log \sqrt[3]{68400}=\log 40.9 \quad \therefore \sqrt[3]{68400}=40.9$ 답 ②

0315

유형 **20** 소수 부분의 합이 1인 상용로그

|전략| 로그의 기본 성질과 $\log x$와 $\log y$의 소수 부분의 합이 1임을 이용한다.

$\log x$의 소수 부분을 α라 하면 조건 (가)에서

$\log x=2+\alpha \ (0<\alpha<1)$

$\log y$의 소수 부분을 β라 하면 조건 (나)에서

$\log y=3+\beta \ (0<\beta<1)$

이때 조건 (다)에서 $\alpha+\beta=1$이므로

$\log xy=\log x+\log y=2+\alpha+3+\beta=5+1=6$ 답 ②

참고 $\log x=2+\alpha$라 할 때, $\alpha=0$이면 $\alpha+\beta=1$에서 $\beta=1$이므로 β는 $\log y$의 소수 부분이 될 수 없다.

따라서 $\alpha\neq 0$이고, 같은 이유로 $\beta\neq 0$이다.

0316

유형 **21** 상용로그의 정수 부분과 소수 부분이 조건으로 주어진 경우

|전략| x의 값의 범위를 나누어 각 범위에 해당하는 $N(x)$의 값을 구한다.

(i) $1\le x<10$일 때

$0\le \log x<1$이므로 $N(x)=0$

$\therefore N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(9)=0\cdot 9=0$

(ii) $10\le x<100$일 때

$1\le \log x<2$이므로 $N(x)=1$

$\therefore N(10)+N(11)+N(12)+\cdots+N(99)=1\cdot 90=90$

(iii) $100\le x\le k \ (100\le k<1000)$일 때

$2\le \log x<3$이므로 $N(x)=2$

$\therefore N(100)+N(101)+N(102)+\cdots+N(k)=2(\underbrace{k-99}_{k-100+1})$

이때 $N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(k)=500$이므로

$0+90+2(k-99)=500,\ k-99=205$

$\therefore k=304$ 답 ⑤

0317

유형 **21** 상용로그의 정수 부분과 소수 부분이 조건으로 주어진 경우

|전략| $10^n=2^n\cdot 5^n$임을 이용하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분 사이의 관계식을 구한다.

ㄱ. $1000<2025<10000$에서 $3<\log 2025<4$

$\therefore f(2025)=3$ (거짓)

ㄴ. 자연수 n에 대하여 $f(x)=n$이면

$n\le \log x<n+1 \quad \therefore 10^n\le x<10^{n+1}$

즉, 자연수 x의 개수는

$10^{n+1}-10^n=10^n(10-1)=9\cdot 10^n$ (참)

ㄷ. $\log 10^n=n$이므로

$f(10^n)=n$

한편, 2^n, 5^n은 10의 배수가 될 수 없으므로

$\log 2^n=l+\alpha$ (l은 정수, $0<\alpha<1$)

$\log 5^n=m+\beta$ (m은 정수, $0<\beta<1$)

라 하면 $f(2^n)=l$, $f(5^n)=m$

이때 $\log 2^n+\log 5^n=\log 10^n=n$이므로

$(l+\alpha)+(m+\beta)=n$

l, m, n이 모두 정수이므로 $\alpha+\beta$도 정수이고

$0<\alpha+\beta<2$이므로 $\alpha+\beta=1$

$\therefore n=l+m+1$

$\therefore f(10^n)=f(2^n)+f(5^n)+1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0318

유형 **22** 상용로그의 실생활에의 활용 – 관계식이 주어진 경우

|전략| 주어진 관계식에 알맞은 문자를 대입한 다음 로그의 성질을 이용한다.

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균제곱오차는 각각 E_A, E_B이므로

$P_A=20\log 255-10\log E_A$ ····· ㉠

$P_B=20\log 255-10\log E_B$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$$P_A-P_B=(20\log 255-10\log E_A)-(20\log 255-10\log E_B)$$
$$=10\log E_B-10\log E_A$$
$$=10\log \frac{E_B}{E_A}$$

이때 $E_B=100E_A$이므로

$P_A-P_B=10\log \dfrac{100E_A}{E_A}=10\log 100=20$ 답 ③

0319

유형 **02** 로그의 밑과 진수의 조건 + **08** 로그의 정수 부분과 소수 부분

|전략| 먼저 로그의 밑과 진수 조건을 이용하여 자연수 x의 값을 구한다.

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq 1$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ····· ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+2x+8>0$

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<2$ 또는 $2<x<4$이므로 자연수 x의 값은 3이다. ··· ❶

$\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$, 즉 $1<\log_2 3<2$이므로

$a=1$, $b=\log_2 3-1$ ··· ❷

$\therefore 2^{2a-b}=2^{2-(\log_2 3-1)}=2^{3-\log_2 3}=2^{\log_2 \frac{8}{3}}=\dfrac{8}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{8}{3}$

채점 기준	배점
❶ 밑의 조건과 진수의 조건을 만족시키는 자연수 x의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 2^{2a-b}의 값을 구할 수 있다.	2점

0320

유형 **10** $a^x=b$가 주어진 경우 로그의 값을 문자로 나타내기

|전략| $a^x=k$이면 $\log_a k=x$임을 이용한다.

$4^x=a$, $4^y=b$, $4^z=c$에서

$x=\log_4 a$, $y=\log_4 b$, $z=\log_4 c$ … ❶

$$\therefore \log_{abc}\sqrt{c}=\frac{1}{2}\log_{abc} c=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_4 c}{\log_4 abc}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_4 c}{\log_4 a+\log_4 b+\log_4 c}$$

$$=\frac{z}{2(x+y+z)}$$ … ❷

답 $\frac{z}{2(x+y+z)}$

채점 기준	배점
❶ 로그의 정의를 이용하여 주어진 지수의 식을 로그로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $\log_{abc}\sqrt{c}$를 x, y, z로 나타낼 수 있다.	3점

다른 풀이 $abc=4^x\cdot 4^y\cdot 4^z=4^{x+y+z}=2^{2(x+y+z)}$,

$\sqrt{c}=\sqrt{4^z}=\sqrt{(2^z)^2}=2^z$이므로

$$\log_{abc}\sqrt{c}=\log_{2^{2(x+y+z)}} 2^z=\frac{z}{2(x+y+z)}$$

0321

유형 **16** 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

|전략| 주어진 x의 값의 범위를 이용하여 $\log\sqrt{x}$와 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 구한다.

$10<x<100$에서 $\log 10<\log x<\log 100$이므로

$1<\log x<2$

$\log x=1+\alpha$ $(0<\alpha<1)$라 하면

$$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha$$

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha<1$이므로

$\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 0이고 소수 부분은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha$이다. … ❶

$$\log\frac{1}{x}=-\log x=-1-\alpha=-2+(1-\alpha)$$

$0<1-\alpha<1$이므로 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분은 -2이고 소수 부분은 $1-\alpha$이다. … ❷

이때 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분의 3배이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha=3(1-\alpha)$, $1+\alpha=6-6\alpha$ $\therefore \alpha=\frac{5}{7}$

$$\therefore \log x=1+\frac{5}{7}=\frac{12}{7}$$ … ❸

따라서 $p=7$, $q=12$이므로

$p+q=7+12=19$ … ❹

답 19

채점 기준	배점
❶ $\log\sqrt{x}$의 정수 부분과 소수 부분을 구할 수 있다.	2점
❷ $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분과 소수 부분을 구할 수 있다.	2점
❸ $\log x$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	1점

다른 풀이 $10<x<100$에서 $1<\log x<2$ …… ㉠

㉠에서 $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\log x<1$이므로 $\frac{1}{2}<\log\sqrt{x}<1$

즉, $\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 0이고 소수 부분은 $\log\sqrt{x}$이다.

또, ㉠에서 $-2<-\log x<-1$이므로 $-2<\log\frac{1}{x}<-1$

즉, $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분은 -2이고 소수 부분은

$\log\frac{1}{x}-(-2)=\log\frac{1}{x}+2$이다.

이때 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분의 3배이므로

$\log\sqrt{x}=3\left(\log\frac{1}{x}+2\right)$, $\frac{1}{2}\log x=3(-\log x+2)$

$\frac{1}{2}\log x=-3\log x+6$, $\frac{7}{2}\log x=6$ $\therefore \log x=\frac{12}{7}$

따라서 $p=7$, $q=12$이므로

$p+q=7+12=19$

0322

유형 **12** 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하기

|전략| 주어진 조건을 이용하여 미지수 사이의 관계식을 세운 다음 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

(1) 조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$ $(k>0)$라 하면

$a=k^3$, $b=k^2$, $c=k^4$

(2) 조건 (나)에서 $\log_8 a+\log_4 b+\log_2 c=2$이므로

$\log_{2^3} k^3+\log_{2^2} k^2+\log_2 k^4=2$

$\log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k=2$

$6\log_2 k=2$ $\therefore \log_2 k=\frac{1}{3}$

(3) $\log_2 abc=\log_2 k^9=9\log_2 k=9\cdot\frac{1}{3}=3$

답 (1) $a=k^3, b=k^2, c=k^4$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) 3

채점 기준	배점
(1) a, b, c를 k의 거듭제곱 꼴로 각각 나타낼 수 있다.	3점
(2) $\log_2 k$의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) $\log_2 abc$의 값을 구할 수 있다.	3점

0323

유형 **23** 상용로그의 실생활에의 활용 – 일정한 비율로 변화하는 경우

|전략| 처음 먼지의 양이 A일 때, 먼지 제거 장치를 n번 반복 가동시킨 후의 먼지의 양은 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)^n$이다.

(1) 처음 먼지의 양을 A라 하면 먼지 제거 장치를 5회 반복 가동시켰을 때의 먼지의 양이 처음 먼지의 양의 10 %이므로

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)^5=A\times\frac{10}{100}$ $\therefore \left(1-\frac{x}{100}\right)^5=\frac{1}{10}$

(2) $\left(1-\frac{x}{100}\right)^5=\frac{1}{10}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1-\frac{x}{100}\right)^5=\log\frac{1}{10}$, $5\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=-1$

$\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=-\frac{1}{5}=-0.2=-1+0.8$

이때 $\log 6.3=0.8$이므로

$\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=-1+\log 6.3$

$=\log 10^{-1}+\log 6.3=\log 0.63$

$\therefore a=0.63$

(3) $1-\frac{x}{100}=0.63$이므로

$100-x=63$ $\therefore x=37$

답 (1) $\left(1-\frac{x}{100}\right)^5=\frac{1}{10}$ (2) 0.63 (3) 37

채점 기준	배점
(1) 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 등식을 세울 수 있다.	4점
(2) a의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) x의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

0324

|전략| 주어진 식의 양변에 2를 반복하여 곱한다.

$\log_5 2=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\cdots$ ····· ㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 2=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_4}{2^3}+\cdots$

$\therefore \log_5 4=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_4}{2^3}+\cdots$ ····· ㉡

이때 $0<\log_5 4<1$이므로 $a_1=0$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 4=a_2+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots$

$\therefore \log_5 16=a_2+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 16<2$이므로 $a_2=1$

즉, $\log_5 16=1+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots$이므로

$\log_5 16-1=\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots$

$\therefore \log_5\frac{16}{5}=\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots$ ····· ㉢

㉢의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5\frac{16}{5}=a_3+\frac{a_4}{2}+\cdots$

$\therefore \log_5\frac{256}{25}=a_3+\frac{a_4}{2}+\cdots$

이때 $1<\log_5\frac{256}{25}<2$이므로 $a_3=1$

$\therefore a_1+a_2+a_3=0+1+1=2$

답 2

0325

|전략| 연산 $*$의 정의를 이용하여 좌변과 우변을 비교한다.

ㄱ. $a*a=\log_3(\log_a a)=\log_3 1=0$ (참)

ㄴ. $b*a=\log_3(\log_b a)=\log_3\left(\frac{1}{\log_a b}\right)$

$=\log_3(\log_a b)^{-1}=-\log_3(\log_a b)$

$=-(a*b)$ (거짓)

ㄷ. $a*b^3-a^3*b=\log_3(\log_a b^3)-\log_3(\log_{a^3} b)$

$=\log_3(3\log_a b)-\log_3\left(\frac{1}{3}\log_a b\right)$

$=\log_3\left(\frac{3\log_a b}{\frac{1}{3}\log_a b}\right)=\log_3 9=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0326

|전략| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 다음 그 값이 정수가 되도록 하는 진수의 꼴을 찾는다.

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=4\log_{2^6}\left(\frac{4n+16}{3}\right)^{-1}$

$=-\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)$

$-\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)$의 값이 정수가 되려면 $\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)$의 값이 3의 배수이어야 한다.

$\frac{4n+16}{3}$은 유리수이므로 무리수인 $2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{9}{2}}, \cdots$이 될 수 없다.
즉, $\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)$의 값은 $\frac{3}{2}t$ (t는 홀수)는 될 수 없다.

n이 자연수이므로 $\frac{4n+16}{3}>6$에서

$\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)>\log_2 6>2$

즉, $\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)=3k$ (k는 자연수)라 하면

$\frac{4n+16}{3}=2^{3k}$, $4n+16=3\cdot 2^{3k}$

$\therefore n=\frac{3\cdot 2^{3k}}{4}-4=3\cdot 2^{3k-2}-4$

(i) $k=1$일 때, $n=3\cdot 2^1-4=6-4=2$

(ii) $k=2$일 때, $n=3\cdot 2^4-4=48-4=44$

(iii) $k=3$일 때, $n=3\cdot 2^7-4=384-4=380$

(iv) $k=4$일 때, $n=3\cdot 2^{10}-4>1000$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 1000 이하의 자연수 n의 값은 2, 44, 380이므로 구하는 합은

$2+44+380=426$

답 426

0327

|전략| 두 점 $P(m, n)$, $Q(\alpha, \beta)$가 각각 곡선과 직선 위에 있음을 이용하여 관계식을 구한다.

점 $P(m, n)$이 곡선 $y=\frac{12}{x}$ 위에 있으므로

$n=\frac{12}{m}$ $\therefore mn=12$

이때 m, n은 음이 아닌 정수이고,
$12=1\times12=2\times6=3\times4$이므로 순서쌍 (m, n)은
$(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)$
또, 점 $Q(\alpha, \beta)$가 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로
$\beta=-\alpha+1$ $\therefore \alpha+\beta=1$
$\therefore \log AB=\log A+\log B=(m+\alpha)+(n+\beta)=m+n+1$
즉, $AB=10^{m+n+1}$이므로 AB는 $m+n$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.
이때 $m+n$의 최댓값은 $1+12=13$이므로 AB의 최댓값은
$10^{13+1}=10^{14}$ $\therefore k=14$ 답 14

0328
|전략| $\log A$와 $\log B$의 소수 부분의 합이 1이면 $\log A+\log B$=(정수)임을 이용한다.
$\log a$의 소수 부분과 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이므로
$\log a+\log b=\log ab$는 정수이다. …… ㉠
이때 $\log a$와 $\log b$의 소수 부분은 모두 0이 아니므로 a, b는 1이 아니고 10의 거듭제곱도 아니다.
㉠에서 $ab=10^k$ (k는 정수)이고 a, b는 100보다 작은 자연수이므로
$ab=10$ 또는 $ab=10^2$ 또는 $ab=10^3$
즉, $a<b$이므로 순서쌍 (a, b)는
(i) $ab=10$일 때, $(2, 5)$
(ii) $ab=100$일 때, $(2, 50), (4, 25), (5, 20)$
(iii) $ab=1000$일 때, $(20, 50), (25, 40)$
(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다. 답 6

0329
|전략| 올해 신생아의 수 a가 매년 r %씩 증가하면 n년 후 신생아의 수는 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$임을 이용한다.
올해 신생아의 수를 a명이라 하면 매년 2 %씩 증가하므로 10년 후 신생아의 수는 $a\left(1+\frac{2}{100}\right)^{10}=1.02^{10}\times a$ (명)
올해 신생아의 남녀 성비가 1 : 1이므로 올해 신생아 중 남자 아기의 수는 $\frac{1}{2}a$명이다. 남자 아기의 수는 매년 5 %씩 증가하므로 10년 후 남자 아기의 수는 $\frac{1}{2}a\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}=1.05^{10}\times\frac{1}{2}a$ (명)
10년 후 전체 신생아의 수에 대한 남자 아기의 수의 비율은
$$\frac{1.05^{10}\times\frac{1}{2}a}{1.02^{10}\times a}=\frac{1}{2}\times\frac{1.05^{10}}{1.02^{10}}$$
$\frac{1.05^{10}}{1.02^{10}}=k$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면
$\log k=10\log1.05-10\log1.02$
$=10\times0.021-10\times0.009$
$=0.120$
이때 $\log1.32=0.120$이므로 $k=1.32$
$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1.05^{10}}{1.02^{10}}=\frac{1}{2}\times1.32=0.66$
따라서 10년 후 신생아 100명 중 남자 아기는 66명이다. 답 66명

3 지수함수
본책 48~65쪽

STEP 1 개념 마스터 1

0330
ㄷ, ㄹ. 다항함수이다.
ㅂ. $y=\frac{1}{5^x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$이므로 밑이 $\frac{1}{5}$인 지수함수이다.
따라서 지수함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0331
$f(0)=2^0=1$ 답 1

0332
$f(2)=2^2=4$ 답 4

0333
$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0334
$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0335
$f(2)+f(-2)=2^2+2^{-2}=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ 답 $\frac{17}{4}$

0336
$f(1)f(-3)=2^1\cdot2^{-3}=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0337
$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$ 답 1

0338
$f(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$ 답 $\frac{1}{81}$

0339
$f(-3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$ 답 27

0340
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0341

$f(2)+f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{9}+3=\frac{28}{9}$ 답 $\frac{28}{9}$

0342

$f(3)f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0343

ㄱ. a의 값에 관계없이 그래프는 항상 점 $(0, 1)$을 지난다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다. (거짓)

ㄷ. $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 a^x의 값도 증가한다.
즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다. (거짓)

ㄹ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (참)

ㅁ. $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.
즉, $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0344

함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $\pi<3.5$이므로 $3^{\pi}<3^{3.5}$ 답 $3^{\pi}<3^{3.5}$

0345

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $0.5<\frac{4}{7}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{7}}$ 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{7}}$

0346

$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{5^3}=5^{\frac{3}{4}}$이고, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이다.

이때 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$5^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{2}{3}}<5^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \sqrt{5}<\sqrt[3]{5^2}<\sqrt[4]{5^3}$ 답 $\sqrt{5}<\sqrt[3]{5^2}<\sqrt[4]{5^3}$

0347

$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$이고, $-0.5<0.5<\frac{3}{2}$이다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}$

$\therefore \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3<\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}$ 답 $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3<\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}$

0348

$y-(-5)=3^{-(x-2)}$에서 $y=3^{-x+2}-5$ 답 $y=3^{-x+2}-5$

0349

$-y=3^{-x}$에서 $y=-3^{-x}$ 답 $y=-3^{-x}$

0350

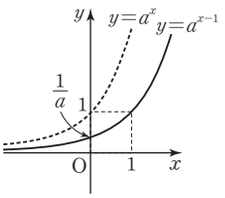
$y=3^{-(-x)}$에서 $y=3^x$ 답 $y=3^x$

0351

$-y=3^{-(-x)}$에서 $y=-3^x$ 답 $y=-3^x$

0352

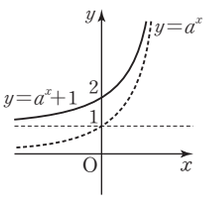
함수 $y=a^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0353

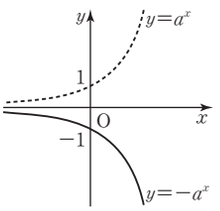
함수 $y=a^x+1$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0354

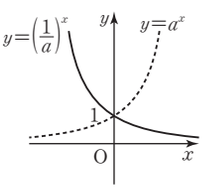
함수 $y=-a^x$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0355

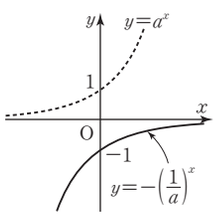
함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0356

함수 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x=-a^{-x}$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

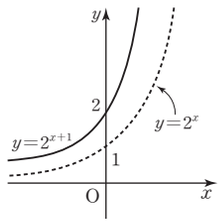


답 풀이 참조

0357

함수 $y=2^{x+1}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>0\}$, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

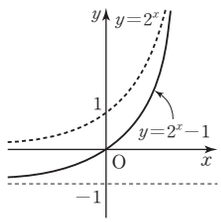


답 풀이 참조

0358

함수 $y=2^x-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

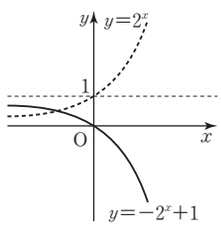


답 풀이 참조

0359

함수 $y=-2^x+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y<1\}$, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

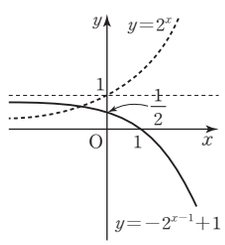


답 풀이 참조

0360

함수 $y=-2^{x-1}+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y<1\}$, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



답 풀이 참조

0361

함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$-1\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최댓값 $5^2=25$를 갖고,

$x=-1$일 때 최솟값 $5^{-1}=\frac{1}{5}$을 갖는다.

답 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{5}$

0362

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$-2\le x\le 0$에서

$x=-2$일 때 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$를 갖고,

$x=0$일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$을 갖는다.

답 최댓값: 9, 최솟값: 1

0363

함수 $y=4^{x+1}-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$-1\le x\le 0$에서

$x=0$일 때 최댓값 $4^{0+1}-1=3$을 갖고,

$x=-1$일 때 최솟값 $4^{-1+1}-1=0$을 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: 0

0364

함수 $y=2^{1-x}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=-1$일 때 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}+1=5$를 갖고,

$x=2$일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}+1=\frac{3}{2}$을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{3}{2}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

유형 01 지수함수의 함숫값 개념 01

지수함수 $f(x)=a^x$ $(a>0, a\ne 1)$의 함숫값 $f(p)$는 $f(x)$의 식에 x 대신 p를 대입하고 지수법칙을 이용하여 구한다.

0365

$f(x)=a^{bx+c}$에서

$f(1)=a^{b+c}=2$ ····· ㉠

$f(2)=a^{2b+c}=4$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^b=2$

㉠에서 $a^{b+c}=a^b\cdot a^c=2\cdot a^c=2$

$\therefore a^c=1$

$\therefore f(3)=a^{3b+c}=(a^b)^3\cdot a^c$

$=2^3\cdot 1=8$

답 ②

Lecture

지수법칙 – 지수가 실수일 때

$a>0, b>0$이고 x, y가 실수일 때

(1) $a^x\times a^y=a^{x+y}$ (2) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y=a^{xy}$ (4) $(ab)^x=a^xb^x$

0366

$f(2a)f(b)=32$에서

$2^{-2a}\cdot 2^{-b}=32,\ 2^{-2a-b}=2^5 \quad \therefore\ 2a+b=-5$ ····· ㉠

또, $f(a-b)=16$에서

$2^{-(a-b)}=16,\ 2^{-a+b}=2^4 \quad \therefore\ -a+b=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-3+1=-2$ 답 -2

다른 풀이 $f(2a)f(b)=32$에서 $2^{-2a}\cdot 2^{-b}=32$ ····· ㉠

$f(a-b)=16$에서 $2^{-(a-b)}=2^{-a}\cdot 2^{b}=16$ ····· ㉡

㉠×㉡을 하면 $2^{-3a}=512,\ 2^{3a}=\frac{1}{512}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$에서 $2^a=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\therefore\ a=-3$

$2^a=\left(\frac{1}{2}\right)^3$을 ㉡에 대입하면 $2^3\cdot 2^b=16$에서 $2^b=2 \quad \therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=-3+1=-2$

0367

$f(p)=2$에서 $\frac{1}{2}(a^p-a^{-p})=2,\ a^p-a^{-p}=4$이므로

$(a^p+a^{-p})^2=(a^p-a^{-p})^2+4=4^2+4=20$

$\therefore\ a^p+a^{-p}=2\sqrt{5}\ (\because\ a^p+a^{-p}>0)$

$\therefore\ f(2p)=\frac{1}{2}(a^{2p}-a^{-2p})=\frac{1}{2}(a^p+a^{-p})(a^p-a^{-p})$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4=4\sqrt{5}$ 답 ⑤

Plus+ 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때

(1) $f(g(x))=x$ (2) $f(a)=b \Longleftrightarrow g(b)=a$

0368

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$g(a)=2$에서 $f(2)=a \quad \therefore\ a=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-2}+3=1+3=4$

또, $g(6)=b$에서 $f(b)=6$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{b-2}+3=6,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{b-2}=3,\ 3^{-b+2}=3$

$-b+2=1 \quad \therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=4+1=5$ 답 5

유형 02 지수함수의 성질 개념 02

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$에 대하여

(1) 정의역: 실수 전체의 집합

치역: 양의 실수 전체의 집합

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

(3) 그래프의 점근선: 직선 $y=0$ (x축)

0369

$f(2)=9$, 즉 $a^2=9$에서 $a=3\ (\because\ a>0) \quad \therefore\ f(x)=3^x$

① $f(x)=3^x$에서 $f(0)=1$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

② 함수 $y=3^x$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이므로 x축과 만나지 않는다.

③ 함수 $f(x)=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이다.

④ 함수 $f(x)=3^x$의 그래프는 제 1, 2 사분면을 지난다.

⑤ 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

0370

ㄱ. 그래프의 점근선은 x축이다. (거짓)

ㄴ. $x=1$일 때 $y=\frac{1}{5}$이므로 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (참)

ㄹ. 그래프는 제 1, 2사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0371

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$에서 $a>1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$를 만족시킨다.

ㄴ. $0<\frac{1}{\pi}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

ㄷ. $p^2-2p+3=(p-1)^2+2>1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0372

$y=(a^2-a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면

$0<a^2-a+1<1$이어야 한다.

(i) $a^2-a+1>0$일 때

$a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 모든 실수 a의 값에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $a^2-a+1<1$일 때

$a^2-a<0,\ a(a-1)<0$

$\therefore\ 0<a<1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0<a<1$ 답 $0<a<1$

유형 03 지수함수의 그래프 위의 점 개념 01, 02

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다.

⇨ $n=a^m$

0373

세 점 $(-p,\ a)$, $(q,\ b)$, $(p+q,\ c)$가 함수 $y=2^x$의 그래프 위에 있으므로

$2^{-p}=a,\ 2^q=b,\ 2^{p+q}=c$

이때 $2^{p+q}=2^p\cdot 2^q=\frac{1}{a}\cdot b=c$이므로 $b=ac$ 답 ②

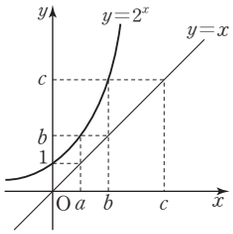
0374

오른쪽 그림과 같이 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나므로 $a=1$

이때 $2^a=2^1=b$이므로 $b=2$

또, $2^b=2^2=c$이므로 $c=4$

$\therefore a+b+c=1+2+4=7$



답 7

0375

함수 $y=a^x$의 그래프가 점 $(p, -p)$를 지나므로 $-p=a^p$ …… ㉠

함수 $y=a^{3x}$의 그래프가 점 $(q, -q)$를 지나므로 $-q=a^{3q}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면 $pq=a^p\cdot a^{3q}=a^{p+3q}$

로그의 정의에 의하여 $p+3q=\log_a pq=-6$

답 -6

0376

함수 $f(x)=a^x$에 대하여

$f(b)=3$에서 $a^b=3$, $f(c)=6$에서 $a^c=6$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^b\cdot a^c)^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

답 ③

0377

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$가 점선과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하면 $A\left(-1, \frac{1}{a}\right)$

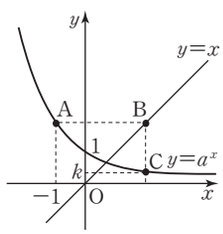
또, 점 A와 점 B의 y좌표가 같고, 점 B는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$B\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$

점 B와 점 C의 x좌표가 같으므로 $C\left(\frac{1}{a}, k\right)$

이때 점 C는 함수 $y=a^x$의 그래프 위에 있으므로

$k=a^{\frac{1}{a}}$



답 ④

0378

점 P의 좌표를 $(a, 4^a)$ $(a>0)$이라 하면 선분 OP를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+3\cdot 0}{1+3}, \frac{1\cdot 4^a+3\cdot 0}{1+3}\right)$ $\therefore \left(\frac{a}{4}, \frac{4^a}{4}\right)$ … ❶

이 점이 함수 $y=2^x$의 그래프 위에 있으므로

$\frac{4^a}{4}=2^{\frac{a}{4}}$, $4^{a-1}=2^{\frac{a}{4}}$, $2^{2(a-1)}=2^{\frac{a}{4}}$

$2(a-1)=\frac{a}{4}$, $8a-8=a$ $\therefore a=\frac{8}{7}$ … ❷

답 $\frac{8}{7}$

채점 기준	비율
❶ 선분 OP를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 점 P의 x좌표에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	50%

0379

점 A의 좌표를 $(a, 3^{-a})$ $(a<0)$이라 하면 점 A와 점 B의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 3^{-a}이다.

점 B는 함수 $y=9^x$의 그래프 위의 점이므로

$9^x=3^{-a}$에서 $3^{2x}=3^{-a}$, $2x=-a$ $\therefore x=-\frac{a}{2}$

$\therefore B\left(-\frac{a}{2}, 3^{-a}\right)$

또, 점 B와 점 C의 x좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 $-\frac{a}{2}$이고,

점 C는 함수 $y=3^{-x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=3^{\frac{a}{2}}$이다.

$\therefore C\left(-\frac{a}{2}, 3^{\frac{a}{2}}\right)$

이때 $\overline{AB}=3$이므로 $-\frac{a}{2}-a=3$ $\therefore a=-2$

따라서 선분 BC의 길이는

$3^{-a}-3^{\frac{a}{2}}=3^2-3^{-1}=\frac{26}{3}$

답 $\frac{26}{3}$

0380

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$ $(a>0)$이라 하면 점 B와 점 A의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 2^a이다.

점 B는 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점이므로

$4^x=2^a$에서 $2^{2x}=2^a$, $2x=a$ $\therefore x=\frac{a}{2}$

$\therefore B\left(\frac{a}{2}, 2^a\right)$

또, 점 C와 점 A의 y좌표가 같으므로 점 C의 y좌표는 2^a이고, 점 C는 함수 $y=8^x$의 그래프 위의 점이므로

$8^x=2^a$에서 $2^{3x}=2^a$, $3x=a$ $\therefore x=\frac{a}{3}$

$\therefore C\left(\frac{a}{3}, 2^a\right)$

$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{a-\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}-\frac{a}{3}}=\frac{\frac{2a}{3}}{\frac{a}{6}}=4$

답 4

유형 04 지수함수를 이용한 수의 대소 비교 개념 02

주어진 수의 밑을 같게 한 다음 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$의 성질을 이용한다.

(1) $a>1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow a^m<a^n$ —부등호 방향 그대로

(2) $0<a<1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow a^m>a^n$ —부등호 방향 반대로

0381

$(\sqrt{2})^3=(2^{\frac{1}{2}})^3=2^{\frac{3}{2}}$

$0.5^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=(2^{-1})^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $2>1$이고 $-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이므로 $2^{-\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore 0.5^{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{4}<(\sqrt{2})^3$

따라서 가장 큰 수는 $(\sqrt{2})^3$이고 가장 작은 수는 $0.5^{\frac{1}{3}}$이다.

답 ①

0382

$A=3\sqrt{3\sqrt[4]{3}}=3\cdot(3\cdot3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=3\cdot(3^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}=3\cdot3^{\frac{5}{8}}=3^{\frac{13}{8}}$

$B=\sqrt{3\sqrt[4]{9}}=(3\cdot3^{\frac{2}{4}})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}$

$C=\sqrt[4]{27\sqrt{3}}=(3^3\cdot3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(3^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{7}{8}}$

이때 $3>1$이고 $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<\frac{13}{8}$이므로 $3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{7}{8}}<3^{\frac{13}{8}}$

$\therefore B<C<A$ 답 ④

0383

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서 밑이 a인 지수함수의 꼴로 만들면

$a^0>a^a>a^1$

$\therefore 1>a^a>a$

또, $1>a^a>a$에서 밑이 a인 지수함수의 꼴로 다시 만들면

$a^1<a^{a^a}<a^a$

$\therefore a<a^{a^a}<a^a$ 답 ②

0384

$A=\sqrt[n+1]{a^n}=a^{\frac{n}{n+1}}$, $B=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$,

$C=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}}$이고

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{(n^2+2n)-(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0\ (\because n\text{은 자연수})$$

$\therefore \frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$ ····· ㉠

$$\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{n+3}=\frac{(n+1)(n+3)-(n+2)^2}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{(n^2+4n+3)-(n^2+4n+4)}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{-1}{(n+2)(n+3)}<0\ (\because n\text{은 자연수})$$

$\therefore \frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$ ····· ㉢

ㄱ. $a=1$이면 $A=B=C=1$ (참)

ㄴ. $0<a<1$이면 ㉢에서 $a^{\frac{n}{n+1}}>a^{\frac{n+1}{n+2}}>a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$\therefore C<B<A$ (참)

ㄷ. $a>1$이면 ㉢에서 $a^{\frac{n}{n+1}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}<a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$\therefore A<B<C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

참고 $\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$, $\frac{n+2}{n+3}=1-\frac{1}{n+3}$이고

$n+1<n+2<n+3$에서 $\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}$이므로

$1-\frac{1}{n+1}<1-\frac{1}{n+2}<1-\frac{1}{n+3}$

$\therefore \frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$

유형 05 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 개념 03

지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
⇨ $y=a^{x-m}+n$ ⟶ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입

(2) x축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=-a^x$ ⟶ y 대신 $-y$를 대입

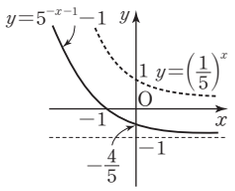
(3) y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ⟶ x 대신 $-x$를 대입

(4) 원점에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=-a^{-x}=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ⟶ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

0385

$y=5^{-x-1}-1=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}-1$ ····· ㉠

함수 $y=5^{-x-1}-1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=5^{-x-1}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① ㉠에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

② 치역은 $\{y|y>-1\}$이다.

③ ㉠에 $x=-1$을 대입하면 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^0-1=1-1=0$

즉, 그래프는 점 $(-1, 0)$을 지난다.

④ 그래프는 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

⑤ 함수 $y=5^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}-1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0386

ㄱ. 함수 $y=-4^x-1$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=4^{2-x}=4^{-(x-2)}$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=2^{2x-1}=2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=4^{x-\frac{1}{2}}$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0387

$f:(x, y)\longrightarrow(x+m, y-n)$은 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 것을 의미한다.

함수 $y=3^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+n=3^{2(x-m)}$, $y=3^{2x-2m}-n$ $\therefore y=3^{-2m}\cdot3^{2x}-n$

이 식이 $y=81\cdot3^{2x}-4$와 일치하므로

$3^{-2m}=81=3^4,\ n=4 \qquad \therefore m=-2,\ n=4$

$\therefore m+n=-2+4=2$ 답 2

0388

함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=2^{-x}$이고, 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=2^{-(x-a)}+b$이다.

이때 함수 $y=2^{-(x-a)}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로 $b=-2$

또, 그래프가 원점을 지나므로

$0=2^a-2,\ 2^a=2 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$ 답 3

0389

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=g(x)$이므로

$g(x)=2^{x-m}+n$ … ❶

한편, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ g(3))$으로 옮겨지므로

$1+m=3 \qquad \therefore m=2$ … ❷

즉, $g(x)=2^{x-2}+n$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(5,\ 11)$을 지나므로

$11=2^3+n \qquad \therefore n=3$ … ❸

$\therefore m+n=2+3=5$ … ❹

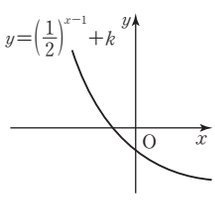
답 5

채점 기준	비율
❶ 함수 $g(x)$의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0390

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\le0$이어야 하므로



$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+k\le0,\ 2+k\le0$

$\therefore k\le-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다. 답 -2

0391

함수 $y=3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=3^{x-2}$이고, 선분 AB가 x축에 평행하므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$

또, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=3$

점 A의 좌표를 $(k,\ 3^{k+1})$ $(k>0)$이라 하면 점 C의 좌표는 $(k,\ 3^{k-2})$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}=3$이므로

$3^{k+1}-3^{k-2}=3,\ 3^k(3-3^{-2})=3$

$\frac{26}{9}\cdot3^k=3 \qquad \therefore 3^k=\frac{27}{26}$

따라서 점 C의 y좌표는

$3^{k-2}=\frac{1}{9}\cdot3^k=\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{26}=\frac{3}{26}$ 답 $\frac{3}{26}$

0392

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=2^x \qquad \therefore y=-2^x$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2^x+m \qquad \therefore f(x)=-2^x+m$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $f(k)=0$이므로

$-2^k+m=0 \qquad \therefore m=2^k$ …… ㉠

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이므로 점 B의 x좌표는 $\frac{k}{2}$이고, 점 B가 두 함수 $y=2^x$, $y=f(x)$의 그래프의 교점이므로

$2^{\frac{k}{2}}=-2^{\frac{k}{2}}+m \qquad \therefore m=2\cdot2^{\frac{k}{2}}=2^{\frac{k}{2}+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^k=2^{\frac{k}{2}+1}$이므로

$k=\frac{k}{2}+1,\ \frac{k}{2}=1 \qquad \therefore k=2$

따라서 $k=2$를 ㉠에 대입하면

$m=2^2=4$ 답 4

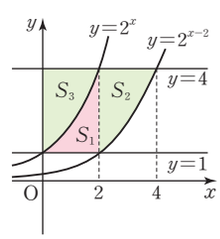
유형 06 지수함수의 그래프와 도형의 넓이 개념 01~03

(1) 지수함수의 그래프가 직선과 만나는 점의 좌표를 구한 다음 도형의 넓이를 구한다.

(2) 평행이동한 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 길이 또는 넓이가 같은 부분을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0393

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S_1+S_2이다.



이때 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $S_2=S_3$

즉, $S_1+S_2=S_1+S_3$

따라서 구하는 부분의 넓이는 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 3인 직사각형의 넓이와 같으므로

$2\cdot3=6$ 답 ③

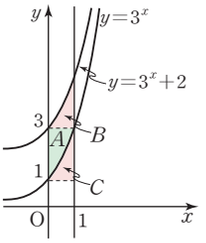
참고 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 것이므로 두 그래프의 모양이 같다.

0394

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=3^x$, $y=3^x+2$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $A+B$이다.

이때 함수 $y=3^x+2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $B=C$

즉, $A+B=A+C$



따라서 구하는 부분의 넓이는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같으므로

$1\cdot 2=2$

답 2

0395

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$에서

$2^{-x}=2^2$, $x=-2$

$\therefore$ A$(-2, 4)$

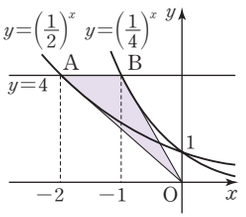
$\left(\frac{1}{4}\right)^x=4$에서

$4^{-x}=4$, $x=-1$

$\therefore$ B$(-1, 4)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$



답 ①

0396

두 삼각형 ACB와 ADB의 밑변을 각각 선분 BC, 선분 BD로 하면 높이가 선분 AB로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{\text{BC}} : \overline{\text{BD}}=\triangle\text{ACB} : \triangle\text{ADB}=1 : 2$

따라서 두 점 C, D의 x좌표를 각각 b, $2b$ $(b>0)$라 하면

$6^b=k$, $a^{2b}=k$에서

$6^b=a^{2b}$, $6^b=(a^2)^b$

$a^2=6$ $\therefore a=\sqrt{6}$ $(\because 1<a<6)$

답 $\sqrt{6}$

유형 07 지수함수의 최대·최소 개념 04

정의역이 $\{x \mid m\le x\le n\}$인 지수함수 $f(x)=a^{x+p}+q$ $(a>0, a\ne 1)$의 최대·최소

(1) $a>1$일 때 ⇨ 최댓값: $f(n)$, 최솟값: $f(m)$

(2) $0<a<1$일 때 ⇨ 최댓값: $f(m)$, 최솟값: $f(n)$

0397

$y=3^x\cdot 2^{2-x}=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x$에서 $\frac{3}{2}>1$이므로 함수 $y=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

따라서 $x=2$일 때 최댓값 $M=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=9$,

$x=0$일 때 최솟값 $m=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^0=4$를 갖는다.

$\therefore Mm=9\cdot 4=36$

답 ④

0398

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}-1$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

즉, $x=4$일 때 최솟값 $-\frac{2}{3}$를 가지므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{4+a}-1=-\frac{2}{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{4+a}=\frac{1}{3}$, $4+a=1$ $\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}-1$이므로 구하는 최댓값은

$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}-1=3^4-1=80$

답 ④

0399

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+b$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

따라서 $x=-2$일 때 최댓값 20을 가지므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+b=20$, $8+b=20$ $\therefore b=12$

또, $x=a$일 때 최솟값 14를 가지므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}+12=14$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}=2$, $2^{-a+1}=2$

$-a+1=1$ $\therefore a=0$

$\therefore a+b=0+12=12$

답 12

0400

(i) $a>1$일 때

최댓값이 $a=f(4)$, 최솟값이 $\beta=f(0)$이므로 $a=16\beta$에서

$f(4)=16f(0)$, 즉 $a^5=16a$

$a(a+2)(a-2)(a^2+4)=0$ $\therefore a=2$ $(\because a>1)$

(ii) $0<a<1$일 때

최댓값이 $a=f(0)$, 최솟값이 $\beta=f(4)$이므로 $a=16\beta$에서

$f(0)=16f(4)$, 즉 $a=16a^5$

$a(2a+1)(2a-1)(4a^2+1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ $(\because 0<a<1)$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ①

유형 08 함수의 최대·최소 – $y=a^{f(x)}$ 꼴 개념 04

함수 $y=a^{f(x)}$ $(a>0, a\ne 1)$의 최대·최소

(1) $a>1$일 때 ⇨ $f(x)$의 값이 최대이면 y의 값도 최대

$f(x)$의 값이 최소이면 y의 값도 최소

(2) $0<a<1$일 때 ⇨ $f(x)$의 값이 최소이면 y의 값은 최대

$f(x)$의 값이 최대이면 y의 값은 최소

0401

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5}$에서 $f(x)=-x^2+4x-5$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2-1$

$1 \le x \le 4$에서 $f(1)=-2$, $f(2)=-1$, $f(4)=-5$이므로

$-5 \le f(x) \le -1$

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 함수는 $f(x)$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖고, $f(x)$의 값이 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $f(x)=-5$일 때 최댓값 $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$,

$f(x)=-1$일 때 최솟값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$를 갖는다.

$\therefore M-m=32-2=30$ 답 ⑤

Lecture

제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

정의역이 $\{x \mid \alpha \le x \le \beta\}$인 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대·최소

① $\alpha \le m \le \beta$일 때 — 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 속하는 경우

⇨ $f(m), f(\alpha), f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

② $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때 — 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않는 경우

⇨ $f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

0402

$y=a^{-x^2+2x+1}$에서 $f(x)=-x^2+2x+1$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+2$ … ❶

이때 $a>1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

따라서 주어진 함수는 $f(x)$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다. … ❷

$f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a^2=9$, $(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>1$) … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 지수의 이차식을 완전제곱 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a^{f(x)}$의 값이 최대이기 위한 $f(x)$의 값의 조건을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0403

$y=3^{-x^2+2x+k}$에서 $f(x)=-x^2+2x+k$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+k+1$

$\frac{1}{2} \le x \le 3$에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)=k+\frac{3}{4}$, $f(1)=k+1$, $f(3)=k-3$이므로

$k-3 \le f(x) \le k+1$

이때 $3>1$이므로 주어진 함수는 $f(x)$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖고, $f(x)$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $f(x)=k+1$일 때 최댓값 $3^{k+1}=m$,

$f(x)=k-3$일 때 최솟값 $3^{k-3}=1$을 가지므로

$3^{k-3}=1$에서 $k-3=0$ $\therefore k=3$

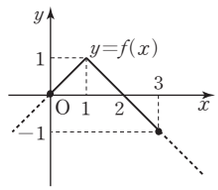
$3^4=m$에서 $m=81$

$\therefore k+m=3+81=84$ 답 84

0404

$y=2^{-|x-1|+1}$에서 $f(x)=-|x-1|+1$로 놓으면 이 함수의 그래프는 함수 $y=-|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0 \le x \le 3$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1을 갖고, $x=3$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



이때 $2>1$이므로 주어진 함수는 $f(x)=1$일 때 최댓값 $2^1=2$, $f(x)=-1$일 때 최솟값 $2^{-1}=\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 치역은 $\left\{y \mid \frac{1}{2} \le y \le 2\right\}$이다. 답 ③

유형 09 함수의 최대·최소 – a^x 꼴이 반복되는 경우 개념 04

함수 $y=a^{2x}+pa^x+q$ ($a>0, a \ne 1, p, q$는 상수)의 최대·최소

⇨ $a^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $y=t^2+pt+q$이므로 이차함수의 최대·최소를 이용한다.

0405

$y=2^{x+1}-4^x+3=2\cdot 2^x-(2^x)^2+3$

에서 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $y=2t-t^2+3=-(t-1)^2+4$

이때 $2>1$이므로 $-1 \le x \le 2$에서 $2^{-1} \le 2^x \le 2^2$

$\therefore \frac{1}{2} \le t \le 4$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 $M=4$를 갖고,

$t=4$일 때 최솟값 $m=-5$를 갖는다.

$\therefore M-m=4-(-5)=9$ 답 ⑤

0406

$y=9^x-2\cdot 3^{x+a}+b=(3^x)^2-2\cdot 3^a\cdot 3^x+b$

에서 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$y=t^2-2\cdot 3^a\cdot t+b$ …… ㉠

주어진 함수는 $x=1$, 즉 $t=3^1=3$일 때 최솟값 3을 가지므로

$y=(t-3)^2+3=t^2-6t+12$ …… ㉡

이때 ㉠=㉡이므로

$2\cdot 3^a=6$, $b=12$ $\therefore a=1, b=12$

$\therefore a+b=1+12=13$ 답 ⑤

0407

$y=-\frac{1}{5^{2x}}+\frac{10}{5^x}+a=-\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2+10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+a$

에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$y=-t^2+10t+a=-(t-5)^2+a+25$

주어진 함수는 $t=5$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $a+25$를 가지므로

$b=-1$, $a+25=21$ $\therefore a=-4, b=-1$

$\therefore ab=-4\cdot(-1)=4$ 답 ④

0408

$y=2^{x+2}-2^{2x+1}=4\cdot 2^x-2\cdot(2^x)^2$

에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=4t-2t^2=-2(t-1)^2+2$

이때 $2>1$이므로 $x\le a$에서 $0<2^x\le 2^a$

$\therefore\ 0<t\le 2^a$

또, $a>1$이므로 $2^a>2$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 2를 가지므로 $b=2$

$t=2^a$일 때 최솟값 -16을 가지므로

$-2(2^a-1)^2+2=-16$에서 $(2^a-1)^2=9$

$\{(2^a-1)+3\}\{(2^a-1)-3\}=0$

$2^a>2$이므로 $2^a-1=3$

$2^a=4=2^2\qquad\therefore\ a=2$

$\therefore\ a^2+b^2=2^2+2^2=8$ 답 ①

유형 10 함수의 최대·최소 – 산술평균과 기하평균의 관계 이용

개념 04

$a>0, a\ne 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $a^x>0, a^{-x}>0$이므로

$a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $a^x=a^{-x}$, 즉, $x=0$일 때 성립)

0409

$3^x>0, 3^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=3^x+3^{-x+4}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x+4}}=2\sqrt{3^4}=2\cdot 3^2=18$

(단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 18을 가지므로

$3^x=3^{-x+4}$에서 $x=-x+4, 2x=4$ $\therefore\ x=2$

$a=2, b=18$

$\therefore\ a+b=2+18=20$ 답 20

0410

$y=2^{x+a}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}=2^{x+a}+2^{-x+a}$

$2^{x+a}>0, 2^{-x+a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=2^{x+a}+2^{-x+a}\ge 2\sqrt{2^{x+a}\cdot 2^{-x+a}}=2\sqrt{2^{2a}}=2\cdot 2^a=2^{a+1}$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 주어진 함수는 $x=0$일 때 최솟값 2^{a+1}을 가지므로

$2^{x+a}=2^{-x+a}$에서 $x+a=-x+a, 2x=0$ $\therefore\ x=0$

$2^{a+1}=128=2^7, a+1=7$

$\therefore\ a=6$ 답 ②

0411

주어진 직선의 x절편과 y절편이 각각 3, 2이므로 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, 즉 $2x+3y=6$

x절편이 a, y절편이 b이면 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $a\ne 0, b\ne 0$)

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 이 직선 위의 점이므로 $2a+3b=6$

이때 $9^a>0, 27^b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9^a+27^b=3^{2a}+3^{3b}\ge 2\sqrt{3^{2a}\cdot 3^{3b}}=2\sqrt{3^{2a+3b}}=2\sqrt{3^6}=2\cdot 3^3=54$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{3}{2}, b=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 9^a+27^b의 최솟값은 54이다. 답 54

참고 $2a+3b=6$ ····· ㉠에서 $3b=6-2a$

등호는 $3^{2a}=3^{3b}$, 즉 $3^{2a}=3^{6-2a}$일 때 성립하므로 $2a=6-2a\qquad\therefore\ a=\frac{3}{2}$

㉠에서 $3+3b=6\qquad\therefore\ b=1$

따라서 9^a+27^b은 $a=\frac{3}{2}, b=1$일 때 최솟값 54를 갖는다.

Plus 주어진 함수를 a^x+a^{-x} 꼴로 정리하고 $a^x+a^{-x}=t\ (t\ge 2)$로 치환하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0412

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0, 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=2(4^x+4^{-x})-4(2^x+2^{-x})=2(t^2-2)-4t$

$=2t^2-4t-4=2(t-1)^2-6\ (t\ge 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 -4를 갖는다. 답 ②

STEP 1 개념 마스터 2

0413

$2^{2x-5}=128$에서 $2^{2x-5}=2^7$이므로

$2x-5=7, 2x=12\qquad\therefore\ x=6$ 답 $x=6$

0414

$\left(\frac{1}{9}\right)^x=3\sqrt{3}$에서 $(3^{-2})^x=3\cdot 3^{\frac{1}{2}}, 3^{-2x}=3^{\frac{3}{2}}$이므로

$-2x=\frac{3}{2}\qquad\therefore\ x=-\frac{3}{4}$ 답 $x=-\frac{3}{4}$

0415

$5^{2x}=125^x$에서 $5^{2x}=(5^3)^x, 5^{2x}=5^{3x}$이므로

$2x=3x\qquad\therefore\ x=0$ 답 $x=0$

0416

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2(x-2)}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1}$이므로

$2x-4=-x-1, 3x=3\qquad\therefore\ x=1$ 답 $x=1$

0417

$9^x-3^x-6=0$에서 $3^{2x}-3^x-6=0, (3^x)^2-3^x-6=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t-\boxed{(가)\ 6}=0, (t+2)(t-3)=0\qquad\therefore\ t=\boxed{(나)\ 3}\ (\because\ t>0)$

즉, $3^x=\boxed{(나)\ 3}$이므로 $x=\boxed{(다)\ 1}$ 답 (가) 6 (나) 3 (다) 1

0418

$4^x-3\cdot 2^x+2=0$에서 $2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0, (2^x)^2-3\cdot 2^x+2=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t+2=0, (t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

즉, $2^x=1=2^0$ 또는 $2^x=2=2^1$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 답 $x=0$ 또는 $x=1$

0419

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+125=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\right\}^{2}-30\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+125=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-30t+125=0,\ (t-5)(t-25)=0$

$\therefore t=5$ 또는 $t=25$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=5=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 또는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$이므로

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 답 $x=-2$ 또는 $x=-1$

0420

$9^x-3^{x+1}=54$에서 $3^{2x}-3\cdot3^x-54=0,\ (3^x)^2-3\cdot3^x-54=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-54=0,\ (t+6)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉, $3^x=9=3^2$이므로 $x=2$ 답 $x=2$

0421

$2^{2x+1}+3\cdot2^x-2=0$에서 $2\cdot2^{2x}+3\cdot2^x-2=0$

$2\cdot(2^x)^2+3\cdot2^x-2=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $2t^2+3t-2=0,\ (t+2)(2t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}\ (\because t>0)$

즉, $2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $x=-1$ 답 $x=-1$

0422

$3^x-18\cdot3^{-x}=7$의 양변에 3^x을 곱하면 $3^{2x}-18=7\cdot3^x$

$3^{2x}-7\cdot3^x-18=0,\ (3^x)^2-7\cdot3^x-18=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-7t-18=0,\ (t+2)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉, $3^x=9=3^2$이므로 $x=2$ 답 $x=2$

0423

$2^{2x-3}=3^{2x-3}$에서

$2x-3=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$ 답 $x=\frac{3}{2}$

0424

$x^{3x-1}=x^{-x+2}$에서

(i) $x=1$일 때

주어진 방정식은 $1^2=1^1$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때

$3x-1=-x+2$에서 $4x=3 \quad \therefore x=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$ 답 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$

0425

$(x+2)^{2x-4}=3^{2x-4}$에서

(i) $2x-4\neq0$일 때

$x+2=3$이므로 $x=1$

(ii) $2x-4=0$, 즉 $x=2$일 때

주어진 방정식은 $4^0=3^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 답 $x=1$ 또는 $x=2$

0426

$2^{x-1}<32$에서 $2^{x-1}<2^5$

$2>1$이므로 $x-1<5$

$\therefore x<6$ 답 $x<6$

0427

$4^{2x+1}\le2\sqrt{2}$에서 $(2^2)^{2x+1}\le2\cdot2^{\frac{1}{2}}$

$2^{4x+2}\le2^{\frac{3}{2}}$

$2>1$이므로 $4x+2\le\frac{3}{2}$

$4x\le-\frac{1}{2} \quad \therefore x\le-\frac{1}{8}$ 답 $x\le-\frac{1}{8}$

0428

$5^{2x-1}>\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$에서 $5^{2x-1}>5^{-x+2}$

$5>1$이므로 $2x-1>-x+2$

$3x>3 \quad \therefore x>1$ 답 $x>1$

0429

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-3}<\left(\frac{5}{4}\right)^{2x+1}$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-3}<\left(\frac{4}{5}\right)^{-2x-1}$

$0<\frac{4}{5}<1$이므로 $x-3>-2x-1$

$3x>2 \quad \therefore x>\frac{2}{3}$ 답 $x>\frac{2}{3}$

0430

$9^x-4\cdot3^{x+1}+27<0$에서 $3^{2x}-12\cdot3^x+27<0$

$(3^x)^2-12\cdot3^x+27<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

t^2- (가) 12 $t+27<0,\ (t-3)(t-9)<0$

$\therefore$ (나) 3 $<t<$ (다) 9

즉, (나) 3 $<3^x<$ (다) 9 이므로 $3^1<3^x<3^2$

$\therefore$ (라) 1 $<x<$ (마) 2 답 (가) 12 (나) 3 (다) 9 (라) 1 (마) 2

0431

$3^{2x}-2\cdot3^x-3>0$에서 $(3^x)^2-2\cdot3^x-3>0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-3>0,\ (t+1)(t-3)>0 \quad \therefore t<-1$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

따라서 $3^x>3$, 즉 $3^x>3^1$이고 $3>1$이므로 $x>1$ 답 $x>1$

0432

$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\right\}^{2}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6<0$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t-6<0,\ (t+1)(t-6)<0 \quad \therefore -1<t<6$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<6$

따라서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}<6$, 즉 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}<\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$이고 $0<\frac{1}{6}<1$이므로

$x>-1$ 답 $x>-1$

주의 a^x을 $t\ (t>0)$로 치환하여 푼 부등식에서 구한 t의 값의 범위를 해로 하지 않도록 한다.

0433

$4^x-3\cdot2^{x+1}+8\le0$에서 $2^{2x}-6\cdot2^x+8\le0$

$(2^x)^2-6\cdot2^x+8\le0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8\le0,\ (t-2)(t-4)\le0 \quad \therefore 2\le t\le4$

따라서 $2\le2^x\le4$, 즉 $2^1\le2^x\le2^2$이고 $2>1$이므로

$1\le x\le2$ 답 $1\le x\le2$

0434

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ge8$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-8\ge0$

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-8\ge0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8\ge0,\ (t+2)(t-4)\ge0 \quad \therefore t\le-2$ 또는 $t\ge4$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge4$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ge4$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x\le-2$ 답 $x\le-2$

0435

$x^{2x-5}\ge x^9$ (단, $x>0$)에서

(i) $0<x<1$일 때

$2x-$ (가) 5 $\le9,\ 2x\le14$

$\therefore x\le$ (나) 7

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<$ (다) 1

(ii) $x=1$일 때

주어진 부등식은 $1^{-3}\ge1^9$이므로 성립한다.

(iii) $x>1$일 때

$2x-5\ge$ (라) 9, $2x\ge14$

$\therefore x\ge$ (나) 7

(i), (ii), (iii)에서 (마) 0 $<x\le$ (다) 1 또는 $x\ge$ (나) 7

답 (가) 5 (나) 7 (다) 1 (라) 9 (마) 0

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 11 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 개념 05

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음 지수를 비교한다.

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ (단, $a>0, a\ne1$)

0436

$(\sqrt{2})^x=32\cdot2^{-2x}$에서 $(2^{\frac{1}{2}})^x=2^5\cdot2^{-2x}$, $2^{\frac{1}{2}x}=2^{5-2x}$이므로

$\frac{1}{2}x=5-2x,\ \frac{5}{2}x=5 \quad \therefore x=2$ 답 2

0437

$(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8=2^3$에서 $x=3$

$3^{2x}=9=3^2$에서 $2x=2 \quad \therefore x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 근 α, β는 3, 1이므로

$\alpha\beta=3\cdot1=3$ 답 3

0438

$8^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4}$에서 $(2^3)^x=(2^{-1})^{x^2-4}$, $2^{3x}=2^{-x^2+4}$이므로

$3x=-x^2+4,\ x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=1, \beta=-4$ ($\because \alpha>\beta$)이므로

$\alpha-\beta=1-(-4)=5$ 답 ⑤

0439

$\frac{9^{x^2+1}}{3^{x-1}}=\frac{(3^2)^{x^2+1}}{3^{x-1}}=\frac{3^{2x^2+2}}{3^{x-1}}=3^{2x^2+2-(x-1)}=3^{2x^2-x+3}$에서

$3^{2x^2-x+3}=81=3^4$이므로

$2x^2-x+3=4,\ 2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 근 α, β는 $-\frac{1}{2}$, 1이므로

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ 답 ④

유형 12 지수에 미지수를 포함한 방정식 – a^x 꼴이 반복되는 경우 개념 05

$a^x\ (a>0, a\ne1)$ 꼴이 반복되는 경우

(i) $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(ii) (i)에서 구한 해에 t 대신 a^x을 대입하여 x의 값을 구한다.

0440

$2^x+2^{5-x}=33$의 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2+2^5=33\cdot2^x$

$(2^x)^2-33\cdot2^x+32=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-33t+32=0,\ (t-1)(t-32)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=32$

즉, $2^x=1$ 또는 $2^x=32$이므로 $x=0$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$0+5=5$ 답 ②

0441

두 함수 $y=4^x$, $y=9\cdot2^{x-1}-2$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $4^x=9\cdot2^{x-1}-2$의 실근과 같다.

$4^x-9\cdot2^{x-1}+2=0$에서 $(2^x)^2-\frac{9}{2}\cdot2^x+2=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{9}{2}t+2=0,\ 2t^2-9t+4=0$

$(2t-1)(t-4)=0$ $\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=4$

즉, $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=4$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 두 점 A, B의 x좌표는 -1, 2이므로 그 합은

$-1+2=1$ 답 1

Lecture

함수의 그래프와 방정식의 실근

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

0442

$f(x)=2^x$, $g(x)=2x+3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=2^{2x+3}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2^x)=2\cdot2^x+3$

이때 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로 $2^{2x+3}=2\cdot2^x+3$

즉, $2^3\cdot(2^x)^2-2\cdot2^x-3=0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$8t^2-2t-3=0,\ (2t+1)(4t-3)=0$

$\therefore\ t=\frac{3}{4}\ (\because\ t>0)$

따라서 $2^x=\frac{3}{4}$에서 $x=\alpha$이므로 $2^\alpha=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0443

$5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\ge2\sqrt{5^x\cdot5^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$25^x+25^{-x}-\frac{5^x+5^{-x}}{5}-24=0$에서

$(t^2-2)-\frac{1}{5}t-24=0,\ 5t^2-t-130=0$

$(t+5)(5t-26)=0$ $\therefore\ t=\frac{26}{5}\ (\because\ t\ge2)$

즉, $5^x+5^{-x}=\frac{26}{5}$이므로 이 식의 양변에 5^x을 곱하면

$(5^x)^2+1=\frac{26}{5}\cdot5^x,\ 5\cdot(5^x)^2-26\cdot5^x+5=0$

$5^x=k\ (k>0)$로 놓으면

$5k^2-26k+5=0,\ (5k-1)(k-5)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{5}$ 또는 $k=5$

즉, $5^x=\frac{1}{5}$ 또는 $5^x=5$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$-1\cdot1=-1$ 답 -1

유형 13 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 연립방정식 개념 05

a^x, $b^y\ (a>0, a\ne1, b>0, b\ne1)$에 대한 연립방정식

⇨ $a^x=X$, $b^y=Y\ (X>0, Y>0)$로 치환하여 X, Y에 대한 연립방정식을 푼다.

0444

$\begin{cases}2^x+2^y=10\\2^{x+y-3}=2\end{cases}$에서 $\begin{cases}2^x+2^y=10\\\frac{1}{8}\cdot2^x\cdot2^y=2\end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=10\\\frac{1}{8}XY=2\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}X+Y=10 & \cdots\cdots ㉠\\XY=16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=10-X$를 ㉡에 대입하면

$X(10-X)=16,\ X^2-10X+16=0$

$(X-2)(X-8)=0$

$\therefore\ X=2, Y=8$ 또는 $X=8, Y=2$

즉, $2^x=2, 2^y=8$ 또는 $2^x=8, 2^y=2$이므로

$x=1, y=3$ 또는 $x=3, y=1$

따라서 $\alpha=1, \beta=3$ 또는 $\alpha=3, \beta=1$이므로

$\alpha\beta=1\cdot3=3\cdot1=3$ 답 3

0445

$\begin{cases}3\cdot2^x-2\cdot3^y=6\\2^{x-2}-3^{y-1}=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}3\cdot2^x-2\cdot3^y=6\\\frac{1}{4}\cdot2^x-\frac{1}{3}\cdot3^y=-1\end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}3X-2Y=6\\\frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}3X-2Y=6 & \cdots\cdots ㉠\\3X-4Y=-12 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ … ❶

㉠−㉡을 하면 $2Y=18$ $\therefore\ Y=9$

$Y=9$를 ㉠에 대입하면 $3X-18=6$ $\therefore\ X=8$ … ❷

즉, $2^x=8$, $3^y=9$이므로 $x=3, y=2$

따라서 $\alpha=3, \beta=2$이므로

$\alpha-\beta=3-2=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $2^x=X, 3^y=Y$로 놓고 주어진 방정식을 X, Y에 대한 연립방정식으로 정리할 수 있다.	40 %
❷ X, Y의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑에 미지수가 있는 경우 개념 05

양수 a, b에 대하여

(1) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ⇨ $a=1$ 또는 $f(x)=g(x)$

(2) $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ ⇨ $a=b$ 또는 $f(x)=0$

0446

$(x-1)^{2x+3}=(x-1)^{x^2}$에서

(i) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때

주어진 방정식은 $1^7=1^4$이므로 성립한다.

(ii) $2x+3=x^2$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>1$)

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$2+3=5$ 답 5

0447

집합 A의 $(x-1)^{2x}=(x-1)^{x+3}$에서

(i) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때

주어진 방정식은 $1^4=1^5$이므로 성립한다.

(ii) $2x=x+3$일 때, $x=3$

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 $A=\{2,\ 3\}$ ····· ㉠

집합 B의 $(x+1)^{2x-1}=3^{2x-1}$에서

(i) $2x-1\neq0$일 때

$x+1=3$ $\therefore x=2$

(ii) $2x-1=0$, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때

주어진 방정식은 $\left(\frac{3}{2}\right)^0=3^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 $B=\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $A-B=\{3\}$ 답 ③

발전 유형 15 지수에 미지수를 포함한 방정식의 활용 개념 05

방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$ ($a>0$, $a\neq1$)의 근이 α, β일 때

⇨ $a^x=t$ ($t>0$)로 치환하면 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 근은 a^α, a^β이다.

0448

$3^{2x}-4\cdot3^x+1=0$에서 $(3^x)^2-4\cdot3^x+1=0$

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2-4t+1=0$

이 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=4$, $3^\alpha\cdot3^\beta=1$

$\therefore 9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2$

$=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot3^\alpha\cdot3^\beta$

$=4^2-2\cdot1=14$ 답 ②

0449

$2^{2x}-2^{x+1}+k=0$에서 $(2^x)^2-2\cdot2^x+k=0$ ····· ㉠

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2-2t+k=0$ ····· ㉡

방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉡의 두 근은 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\cdot2^\beta=k$

이때 주어진 조건에 의하여 $\alpha+\beta=-1$이므로

$k=2^\alpha\cdot2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0450

$9^x-3^{x+1}-k=0$에서 $(3^x)^2-3\cdot3^x-k=0$

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2-3t-k=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-k)>0$

$9+4k>0$ $\therefore k>-\frac{9}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=3>0$

(iii) (두 근의 곱)$=-k>0$ $\therefore k<0$

(i), (ii), (iii)에서 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{9}{4}<k<0$ 답 ④

Lecture

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① 두 근이 모두 양수일 조건

$D\geq0$, (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}>0$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수일 조건

$D\geq0$, (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}<0$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}<0$

$\frac{c}{a}<0$에서 $ac<0$이므로 항상 $D=b^2-4ac>0$이다.

0451

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서 $2^x-2^{-x}=t$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$이므로

$(t^2+2)+at+7=0$

$\therefore t^2+at+9=0$ ····· ㉠

이때 $t=2^x-2^{-x}$의 값의 범위는 실수 전체이므로 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-36\geq0$

$(a+6)(a-6)\geq0$

$\therefore a\leq-6$ 또는 $a\geq6$

따라서 양수 a의 최솟값은 6이다. 답 6

Lecture

$2^x-2^{-x}=t$라 하자.

양변에 2^x을 곱하여 식을 정리하면 $2^{2x}-t\cdot 2^x-1=0$

이때 $2^x=k\,(k>0)$라 놓고 이차방정식 $k^2-tk-1=0$의 근을 구하면

$k=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}$

그런데 실수 t의 값에 관계없이 $t+\sqrt{t^2+4}>0$이므로 이 이차방정식은 항상 양의 실근을 갖는다.

따라서 $2^x-2^{-x}=t$에 어떤 실수 t를 대입해도 이 식을 만족시키는 실수 x의 값은 존재하므로 t의 값의 범위는 생각하지 않아도 된다.

유형 16 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 개념 06

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 다음 지수를 비교한다.

(1) $a>1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Longleftrightarrow f(x)>g(x)$ –부등호 방향 그대로

(2) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Longleftrightarrow f(x)<g(x)$ –부등호 방향 반대로

0452

$3^{x^2-2x}\geq\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$에서 $3^{x^2-2x}\geq 3^{-x}$

$3>1$이므로 $x^2-2x\geq -x$, $x^2-x\geq 0$, $x(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 1$

따라서 양수 x의 최솟값은 1이다. 답 ①

0453

$a^{2x+1}>\sqrt[3]{a}\cdot a^{3x}$에서 $a^{2x+1}>a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{3x}$, $a^{2x+1}>a^{3x+\frac{1}{3}}$

$0<a<1$이므로 $2x+1<3x+\dfrac{1}{3}$

$\therefore x>\dfrac{2}{3}$ 답 ⑤

0454

$5^{x^2-x-5}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-2x}$에서 $5^{x^2-x-5}\leq 5^{-1+2x}$

$5>1$이므로 $x^2-x-5\leq -1+2x$

$x^2-3x-4\leq 0$, $(x+1)(x-4)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3+4=9$ 답 ①

0455

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{x^2}>2^{ax}$에서 $2^{-4x^2}>2^{ax}$

$2>1$이므로 $-4x^2>ax$, $4x^2+ax<0$, $x(4x+a)<0$

$\therefore -\dfrac{a}{4}<x<0$ ($\because a$는 자연수)

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 2이므로

$-3\leq -\dfrac{a}{4}<-2$ $\therefore 8<a\leq 12$

따라서 자연수 a는 9, 10, 11, 12이므로 구하는 합은

$9+10+11+12=42$ 답 ④

유형 17 지수에 미지수를 포함한 부등식 – a^x꼴이 반복되는 경우 개념 06

$a^x\,(a>0, a\neq 1)$ 꼴이 반복되는 경우

(i) $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

(ii) (i)에서 구한 해에 t 대신 a^x을 대입하여 x의 값의 범위를 구한다.

0456

$3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9<0$에서 $3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9<0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $3t^2-28t+9<0$

$(3t-1)(t-9)<0$ $\therefore \dfrac{1}{3}<t<9$

즉, $3^{-1}<3^x<3^2$이고 $3>1$이므로 $-1<x<2$

따라서 정수 x의 개수는 0, 1의 2이다. 답 2

0457

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+2\leq 0$에서 $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\dfrac{9}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2\leq 0$ … ❶

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-\dfrac{9}{2}t+2\leq 0$

$2t^2-9t+4\leq 0$, $(2t-1)(t-4)\leq 0$

$\therefore \dfrac{1}{2}\leq t\leq 4$ … ❷

즉, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$이고 $0<\dfrac{1}{2}<1$이므로

$-2\leq x\leq 1$ … ❸

따라서 $M=1$, $m=-2$이므로 $M-m=1-(-2)=3$ … ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 부등식의 각 항의 밑을 같게 할 수 있다.	20 %
❷ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$로 치환한 다음 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 18 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑에 미지수가 있는 경우 개념 06

$x^{f(x)}>x^{g(x)}\,(x>0)$ 꼴의 부등식은 $0<x<1$, $x=1$, $x>1$일 때로 나누어 푼다.

0458

$x^{x^2}>x^{2x+3}$에서

(i) $0<x<1$일 때, $x^2<2x+3$에서 $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, $1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $x^2>2x+3$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

그런데 $x>1$이므로 $x>3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=1+3=4$ 답 ②

0459

$x^{2x}<x^{x+2}$에서

(i) $0<x<1$일 때, $2x>x+2$에서 $x>2$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $2x<x+2$에서 $x<2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<2$

답 $1<x<2$

발전 유형 19 지수에 미지수를 포함한 부등식이 항상 성립할 조건 개념 06

$a>0, a\neq1$일 때

$pa^{2x}+qa^{x}+r>0$ …… ㉠ $\xrightarrow{a^x=t\,(t>0)\text{로 치환}}$ $pt^2+qt+r>0$ …… ㉡

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

⇨ $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉡이 성립한다.

0460

$4^x-k\cdot2^{x+1}+9\geq0$에서 $(2^x)^2-2k\cdot2^x+9\geq0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-2kt+9\geq0$

$\therefore (t-k)^2+9-k^2\geq0$ …… ㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)=(t-k)^2+9-k^2\,(t>0)$으로 놓으면

(i) $k>0$일 때

함수 $f(t)$는 $t=k$에서 최솟값 $9-k^2$을 가지므로

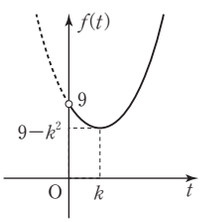
$9-k^2\geq0$

$k^2-9\leq0$

$(k+3)(k-3)\leq0$

$\therefore -3\leq k\leq3$

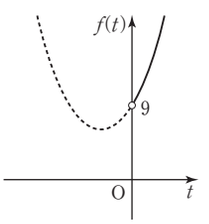
그런데 $k>0$이므로 $0<k\leq3$



(ii) $k\leq0$일 때

$f(0)\geq0$이어야 한다.

이때 $f(0)=9\geq0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.



(i), (ii)에서 $k\leq3$

답 $k\leq3$

0461

$2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+k\geq0$에서 $2\cdot2^x-2^2\cdot2^{\frac{x}{2}}+k\geq0$

$2^{\frac{x}{2}}=t\,(t>0)$로 놓으면 $2t^2-4t+k\geq0$

$\therefore 2(t-1)^2+k-2\geq0$ …… ㉠

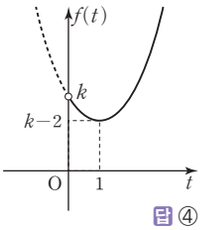
주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)=2(t-1)^2+k-2\,(t>0)$로 놓으면

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 $k-2$를 가지므로

$k-2\geq0$ $\therefore k\geq2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.



답 ④

0462

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k+2>0$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+k+2>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2+6t+k+2>0$

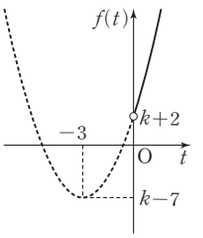
$\therefore (t+3)^2+k-7>0$ …… ㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)=(t+3)^2+k-7\,(t>0)$로 놓으면

오른쪽 그림에서 $f(0)\geq0$이어야 하므로

$k+2\geq0$ $\therefore k\geq-2$



답 ②

0463

$5^{2x}\geq k\cdot5^x-2k-5$에서 $(5^x)^2-k\cdot5^x+2k+5\geq0$

$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-kt+2k+5\geq0$

$\therefore \left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2k+5\geq0$ …… ㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2k+5\,(t>0)$로 놓으면

(i) $\frac{k}{2}>0$, 즉 $k>0$일 때

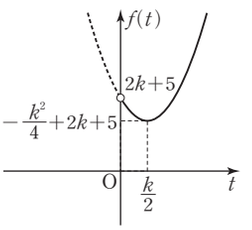
함수 $f(t)$는 $t=\frac{k}{2}$에서 최솟값 $-\frac{k^2}{4}+2k+5$를 가지므로

$-\frac{k^2}{4}+2k+5\geq0$

$k^2-8k-20\leq0$, $(k+2)(k-10)\leq0$

$\therefore -2\leq k\leq10$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\leq10$



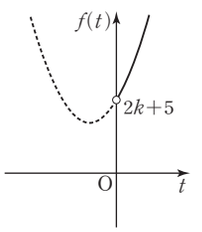
(ii) $\frac{k}{2}\leq0$, 즉 $k\leq0$일 때

$f(0)\geq0$이어야 하므로

$2k+5\geq0$ $\therefore k\geq-\frac{5}{2}$

그런데 $k\leq0$이므로

$-\frac{5}{2}\leq k\leq0$



(i), (ii)에서 $-\frac{5}{2}\leq k\leq10$

따라서 $\alpha=-\frac{5}{2}$, $\beta=10$이므로 $|\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\cdot10\right|=25$

답 ⑤

발전 유형 20 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용 개념 05, 06

처음의 양을 a라 하고 매시간마다 p배씩 변할 때, x시간 후 변화된 양을 y라 하면
$y=a\cdot p^x$

0464

x분 후에 A와 B의 수가 같아진다고 하면
x분 후 A의 수는 8^x, B의 수는 $4^{10}\cdot 2^x$이므로
$8^x=4^{10}\cdot 2^x$, $2^{3x}=2^{20+x}$
$3x=20+x$ $\therefore x=10$
따라서 A, B의 수가 같아지는 때는 10분 후이다. 답 10분

0465

구매 가격이 2500만 원인 자동차의 가격이 구매 후 매년 20 %씩 떨어지므로 x년 후에 이 자동차의 가격은
$2500\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right)^x=2500\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x$ (만 원)
x년 후에 자동차의 가격이 1024만 원 이하가 된다고 하면
$2500\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x\le 1024$, $\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\frac{1024}{2500}$
$\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\frac{256}{625}=\left(\frac{4}{5}\right)^4$
$0<\frac{4}{5}<1$이므로 $x\ge 4$
따라서 자동차의 가격이 1024만 원 이하가 되는 것은 최소 4년 후이다. 답 ③

0466

$a>0$에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$이므로 $1-2^{-\frac{2}{a}}>0$이다.
$$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})}=\frac{1-(2^{-\frac{2}{a}})^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$
$$=\frac{(1-2^{-\frac{2}{a}})(1+2^{-\frac{2}{a}})}{1-2^{-\frac{2}{a}}}=1+2^{-\frac{2}{a}}$$
이때 $\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$이므로
$1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$, $2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$
$-\frac{2}{a}=-1$ $\therefore a=2$ 답 2

다른 풀이 $\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서 $2Q(4)=3Q(2)$이므로
$2Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})=3Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})$, $2(1-2^{-\frac{4}{a}})=3(1-2^{-\frac{2}{a}})$
이때 $2^{-\frac{2}{a}}=t$로 놓으면 $a>0$이므로 $0<t<1$이다.
$2(1-t^2)=3(1-t)$, $2t^2-3t+1=0$
$(2t-1)(t-1)=0$ $\therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<1$)
즉, $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$이므로
$-\frac{2}{a}=-1$ $\therefore a=2$

0467

처음 불순물의 양을 M이라 하고, 정수기 A를 한 번 가동할 때마다 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 a ($0<a<1$)배가 된다고 하자.
정수기 A를 4번 연속 가동했을 때 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 $\frac{1}{9}$이 되었으므로
$a^4M=\frac{1}{9}M$, $a^4=\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $\therefore a=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$
정수기 A를 x번 연속 가동했을 때 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 $\frac{1}{81}$ 이하가 된다고 하면
$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^x M\le\frac{1}{81}M$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}\le\left(\frac{1}{3}\right)^4$
$0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\frac{x}{2}\ge 4$ $\therefore x\ge 8$
따라서 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 $\frac{1}{81}$ 이하가 되도록 하려면 정수기 A를 최소 8번 연속으로 가동해야 한다. 답 8번

STEP 3 내신 마스터

0468

유형 01 지수함수의 함숫값

|전략| $f(x)$에 $x=2$, $x=6$을 각각 대입한 다음 연립하여 식을 변형한다.

$f(x)=a^x$에서
$f(2)=a^2=m$ ……㉠
$f(6)=a^6=n$ ……㉡
㉡÷㉠을 하면 $a^4=\frac{n}{m}$ $\therefore f(4)=a^4=\frac{n}{m}$ 답 ④

0469

유형 02 지수함수의 성질

|전략| a의 값에 관계없이 항상 $a^0=1$임을 이용한다.

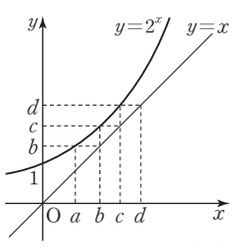
$y=a^x$에서 $x=0$이면 a의 값에 관계없이 항상 $y=1$이므로
$y=2a^{-x+4}-5$에서 $x=4$이면 항상 $y=-3$이다.
즉, 함수 $y=2a^{-x+4}-5$의 그래프는 항상 점 $(4, -3)$을 지난다.
따라서 원점 O와 점 A$(4, -3)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ 답 ④

0470

유형 03 지수함수의 그래프 위의 점

|전략| 그래프를 보고 2^a, 2^b, 2^c의 값을 먼저 구한다.

오른쪽 그림에서 $2^a=b$, $2^b=c$, $2^c=d$
이므로
$2^{2a+b-c}=2^{2a}\cdot 2^b\cdot 2^{-c}$
$=(2^a)^2\cdot 2^b\cdot\frac{1}{2^c}$
$=b^2\cdot c\cdot\frac{1}{d}=\frac{b^2c}{d}$



답 ④

0471

유형 03 지수함수의 그래프 위의 점

|전략| 점 A의 x좌표를 k로 놓고 직선 OA와 직선 AB의 기울기를 각각 구한다.

점 A의 좌표를 $(k, \sqrt{6})\ (k>0)$이라 하면

직선 OA의 기울기는 $\frac{\sqrt{6}}{k}$, 직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{6}}{k-7}$

이때 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{\sqrt{6}}{k}\cdot\frac{\sqrt{6}}{k-7}=-1,\ k(k-7)=-6$

$k^2-7k+6=0,\ (k-1)(k-6)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=6$

즉, 점 $(1, \sqrt{6})$ 또는 점 $(6, \sqrt{6})$이 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로 $\sqrt{6}=a^1$ 또는 $\sqrt{6}=a^6$

$\therefore a=6^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=(6^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}=6^{\frac{1}{12}}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$6^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{12}}=6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}=6^{\frac{7}{12}}$

답 ③

0472

유형 03 지수함수의 그래프 위의 점 + 04 지수함수를 이용한 수의 대소 비교

|전략| 그래프에 a_2, a_3, a_4의 값을 각각 나타낸 다음 대소를 비교한다.

함수 $f(x)=3^{-x}$에 대하여 $a_1=f(2),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1, 2, 3)$이므로

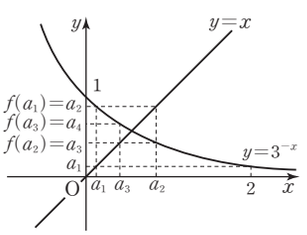
(i) 점 $(0, a_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(a_1, 0)$이고, $a_2=f(a_1)$

(ii) 점 $(0, a_2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(a_2, 0)$이고, $a_3=f(a_2)$

(iii) 점 $(0, a_3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(a_3, 0)$이고, $a_4=f(a_3)$

(i), (ii), (iii)을 이용하여 a_2, a_3, a_4를 y축에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore a_3<a_4<a_2$



답 ③

0473

유형 05 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 지수함수의 그래프의 대칭이동을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=2$이므로

$b=2$

함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식이 $y=f(x)$이므로 $f(x)=2^{-2x+a}+2$

함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지나므로

$10=2^{2+a}+2,\ 2^{2+a}=8=2^3$

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1+2=3$

답 ②

0474

유형 06 지수함수의 그래프와 도형의 넓이

|전략| 점 A의 좌표를 이용하여 점 B, C, D의 좌표를 k로 나타낸다.

점 $A(k,\ 0)$에 대하여 두 점 A, D의 x좌표가 같으므로 점 D의 x좌표는 k이고, 점 D는 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

$D(k,\ 3^k)$

또, 함수 $y=3^{x-k}$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 두 점 B, C의 x좌표가 $2k$로 같고, 점 C는 함수 $y=3^{x-k}$의 그래프 위의 점이므로

$B(2k,\ 0),\ C(2k,\ 3^k)$

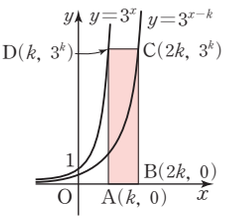
오른쪽 그림에서 직사각형 ABCD의 넓이가 18이므로

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=18$

$(2k-k)\cdot 3^k=18$

$k\cdot 3^k=2\cdot 3^2$

$\therefore k=2$



답 ②

0475

유형 09 함수의 최대·최소 – a^x 꼴이 반복되는 경우

|전략| $3^x=t\ (t>0)$로 치환하여 생각한다.

$y=-9^x+2\cdot 3^x+2=-(3^x)^2+2\cdot 3^x+2$

에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

이때 $3>1$이므로 $-1\le x\le 1$에서 $3^{-1}\le 3^x\le 3^1$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 3$

따라서 주어진 함수는 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 최댓값 3을 갖고, $t=3$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로 $a=0, b=3, c=1, d=-1$

$\therefore a+b+c+d=0+3+1+(-1)=3$

답 ⑤

0476

유형 11 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

|전략| 주어진 방정식의 밑을 3으로 같게 한 다음 지수를 비교한다.

$(3^{x-5}\cdot 9^{x+4})^x=27^{x+5}$에서

$(3^{x-5}\cdot 3^{2x+8})^x=3^{3x+15},\ (3^{3x+3})^x=3^{3x+15},\ 3^{3x^2+3x}=3^{3x+15}$이므로

$3x^2+3x=3x+15,\ x^2=5$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0 \qquad \therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$-\sqrt{5}+\sqrt{5}=0$

답 ①

0477

유형 12 지수에 미지수를 포함한 방정식 – a^x 꼴이 반복되는 경우

|전략| $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 푼다.

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-t=2$

$t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

이때 $a^x=2$의 해가 $x=\frac{1}{7}$이므로 $a^{\frac{1}{7}}=2$

$\therefore a=2^7=128$

답 ③

0478

유형 13 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 연립방정식

|전략| $2^x=X, 3^y=Y$로 놓고 연립방정식을 푼다.

$\begin{cases}2^{x-1}+3^{y+1}=11\\2^{x+2}-3^{y-1}=15\end{cases}$에서 $\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2^x+3\cdot 3^y=11\\4\cdot 2^x-\frac{1}{3}\cdot 3^y=15\end{cases}$

$2^x=X, 3^y=Y\,(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}\frac{1}{2}X+3Y=11\\4X-\frac{1}{3}Y=15\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}X+6Y=22 & \cdots\cdots ㉠\\12X-Y=45 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡×6을 하면 $73X=292$ $\therefore X=4$

$X=4$를 ㉠에 대입하면 $4+6Y=22$ $\therefore Y=3$

즉, $2^x=4$, $3^y=3$이므로 $x=2, y=1$

따라서 $\alpha=2, \beta=1$이므로

$6^\alpha-6^\beta=6^2-6^1=30$ 답 ⑤

0479

유형 14 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑에 미지수가 있는 경우

|전략| a, b가 정수일 때, $a^b=1$은

(i) $a=1$ (ii) $a=-1$, b는 짝수 (iii) $a\neq 0, b=0$

인 경우로 나누어 생각한다.

$(x^2-x-1)^{x+2}=1$에서 $a=x^2-x-1$, $b=x+2$라 하자.

(i) $a=1$일 때

$x^2-x-1=1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

주어진 방정식은 $1^1=1$, $1^4=1$이므로 성립한다.

(ii) $a=-1$, b는 짝수일 때

$x^2-x-1=-1$에서

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$x=0$이면 주어진 방정식은 $(-1)^2=1$이므로 성립한다.

그런데 $x=1$이면 $x+2$는 짝수가 아니다.

즉, 방정식의 해는 $x=0$

(iii) $a\neq 0, b=0$일 때

$x^2-x-1\neq 0$, $x+2=0$에서 $x=-2$

주어진 방정식은 $5^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 x는 $-2, -1, 0, 2$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+2=-1$ 답 ③

0480

유형 16 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

|전략| 지수에 미지수를 포함한 부등식에서 밑이 1보다 큰 경우 부등호의 방향은 변하지 않음을 이용한다.

$2^{x^2}>2^{2ax-25}$에서 $2>1$이므로 $x^2>2ax-25$

즉, $x^2-2ax+25>0$

이때 모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+25=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-25<0$, $(a+5)(a-5)<0$

$\therefore -5<a<5$

따라서 정수 a의 개수는 $-4, -3, \cdots, 4$의 9이다. 답 ⑤

0481

유형 17 지수에 미지수를 포함한 부등식 – a^x 꼴이 반복되는 경우

|전략| $3^{|x|}=t$로 놓고 t에 대한 부등식을 푼다.

$9^{|x|}-3^{|x|+3}+26\leq 0$에서 $(3^{|x|})^2-27\cdot 3^{|x|}+26\leq 0$

$3^{|x|}=t\,(t\geq 1)$로 놓으면 ($|x|\geq 0$이므로 $3^{|x|}\geq 3^0=1$ $\therefore t\geq 1$)

$t^2-27t+26\leq 0$, $(t-1)(t-26)\leq 0$

$\therefore 1\leq t\leq 26$

즉, $1\leq 3^{|x|}\leq 26$이므로 이를 만족시키는 정수 x의 개수는

$-2, -1, 0, 1, 2$의 5이다. 답 ②

참고 $9<26<27$이므로 $1\leq 3^{|x|}\leq 26$에서 $3^0\leq 3^{|x|}<3^3$

즉, $0\leq |x|<3$에서 $|x|<3$이므로 $-3<x<3$

따라서 정수 x의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5이다.

0482

유형 18 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑에 미지수가 있는 경우

|전략| 밑의 범위를 $0<x<1$, $x=1$, $x>1$일 때로 나누어 생각한다.

집합 A의 $x^{2x-1}<x^{x+3}$에서

(i) $0<x<1$일 때, $2x-1>x+3$에서 $x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $2x-1<x+3$에서 $x<4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$

(i), (ii), (iii)에서 $A=\{x\,|\,1<x<4\}$

집합 B의 $x^{x-1}\geq x^{-x+5}$에서

(i) $0<x<1$일 때, $x-1\leq -x+5$에서 $x\leq 3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, 주어진 부등식은 $1\geq 1$이므로 성립한다.

(iii) $x>1$일 때, $x-1\geq -x+5$에서 $x\geq 3$

(i), (ii), (iii)에서 $B=\{x\,|\,0<x\leq 1$ 또는 $x\geq 3\}$

따라서 $A\cap B^C=A-B=\{x\,|\,1<x<3\}$이므로 $\alpha=1, \beta=3$

$\therefore \beta-\alpha=3-1=2$ 답 ②

0483

유형 20 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용

|전략| x시간 후의 세균 A와 B의 수를 식으로 나타낸다.

x시간이 경과한 후 세균 A의 수는 $2\cdot 2^x$, 세균 B의 수는 $4\cdot 4^x$이므로

$2\cdot 2^x+4\cdot 4^x=1056$, $2\cdot 2^x+4\cdot (2^x)^2-1056=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $2t+4t^2-1056=0$, $2t^2+t-528=0$

$(2t+33)(t-16)=0$ $\therefore t=16\,(\because t>0)$

즉, $2^x=16$에서 $x=4$

따라서 4시간이 경과한 후이다. 답 ③

0484

유형 05 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동, 대칭이동한 그래프의 식을 구한다.

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=2^{x-a}$, $y=2^{x-a}+b$ …… ㉠

㉠의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{-x-a}+b$ … ❶

이 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(-2, 9)$를 지나므로

$1=2^{1-a}+b$ …… ㉡

$9=2^{2-a}+b$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면

$8=(4-2)\cdot 2^{-a}$, $2^{-a}=4$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면

$1=2^3+b$ $\therefore b=-7$ … ❷

$\therefore ab=-2\cdot(-7)=14$ … ❸

답 14

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=2^x$의 그래프를 주어진 조건에 따라 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

Lecture

함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

함수 $y=f(x)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동

⇨ $y=f(x-m)+n$

(2) x축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=-f(x)$

(3) y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=f(-x)$

0485

유형 10 함수의 최대·최소 – 산술평균과 기하평균의 관계 이용

|전략| 모든 실수 x에 대하여 $3^x>0, 3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립) … ❶

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=9^x+9^{-x}-4(3^x+3^{-x})+5$

$=(t^2-2)-4t+5=t^2-4t+3$

$=(t-2)^2-1$ $(t\geq 2)$ … ❷

따라서 주어진 함수는 $t=2$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

$\therefore \alpha=0, \beta=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=0^2+(-1)^2=1$ … ❸

답 1

채점 기준	배점
❶ $3^x+3^{-x}=t$로 치환한 다음 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	2점

참고 $t=2$, 즉 $3^x+3^{-x}=2$에서 $(3^x)^2-2\cdot 3^x+1=0$

$3^x=k$ $(k>0)$로 놓으면

$k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$ $\therefore k=1$

따라서 $3^x=1$이므로 $x=0$

0486

유형 16 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

|전략| 부등식의 각 항의 밑을 같게 한 다음 지수를 비교하여 부등식을 풀고 정수 x의 개수가 5임을 이용하여 자연수 a의 값의 범위를 구한다.

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+x}>2^{ax}$에서

$2^{-3(x^2+x)}>2^{ax}$

$2>1$이므로 $-3(x^2+x)>ax$

$3x^2+3x+ax<0$, $x(3x+3+a)<0$

$\therefore -1-\frac{a}{3}<x<0$ ($\because a$는 자연수) … ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이므로

$-6\leq -1-\frac{a}{3}<-5$, $-5\leq -\frac{a}{3}<-4$

$\therefore 12<a\leq 15$ … ❷

따라서 자연수 a는 13, 14, 15이므로 구하는 합은

$13+14+15=42$ … ❸

답 42

채점 기준	배점
❶ 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 찾을 수 있다.	3점
❷ 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 a의 값의 범위를 찾을 수 있다.	3점
❸ 모든 자연수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	1점

0487

유형 08 함수의 최대·최소 – $y=a^{f(x)}$ 꼴

|전략| $1\leq x\leq 4$에서 이차함수 $f(x)=x^2-6x+3$의 값의 범위를 구한다.

(1) $f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

오른쪽 그림에서

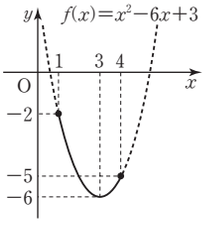
$f(1)=-2$, $f(3)=-6$, $f(4)=-5$

즉, $1\leq x\leq 4$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 -2, 최솟값은 -6이므로

$-6\leq f(x)\leq -2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 치역은

$\{y\,|\,-6\leq y\leq -2\}$



(2) 함수 $(g\circ f)(x)$에서

$f(x)=t$ $(-6\leq t\leq -2)$로 놓으면

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=a^t$

(i) $0<a<1$일 때

함수 $y=a^t$은 t의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 t의 값이 최소일 때 $g(t)$의 값은 최대이고, t의 값이 최대일 때 $g(t)$의 값은 최소이다.

즉, $t=-6$일 때 함수 $g(t)$가 최댓값 27을 가지므로

$a^{-6}=27=3^3$ $\therefore a=(3^3)^{-\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}$

$0<3^{-\frac{1}{2}}<3^0=1$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $t=-2$일 때 함수 $g(t)$가 최솟값 m을 가지므로

$m=a^{-2}=(3^{-\frac{1}{2}})^{-2}=3$

(ii) $a>1$일 때

함수 $y=a^t$은 t의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 t의 값이 최소일 때 $g(t)$의 값은 최소이고, t의 값이 최대일 때 $g(t)$의 값은 최대이다.

즉, $t=-2$일 때 함수 $g(t)$가 최댓값 27을 가지므로

$a^{-2}=27=3^3$ $\therefore a=(3^3)^{-\frac{1}{2}}=3^{-\frac{3}{2}}$

그런데 $0<3^{-\frac{3}{2}}<3^0=1$이므로 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 m의 값은 3이다.

답 (1) $\{y\,|\,-6\le y\le -2\}$ (2) 3

채점 기준	배점
(1) 함수 $y=f(x)$의 치역을 구할 수 있다.	2점
(2) m의 값을 구할 수 있다.	5점

0488

유형 15 지수에 미지수를 포함한 방정식의 활용

|전략| $4^x=t\,(t>0)$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 두 근이 4^m, 4^{2m}임을 이용한다.

(1) $4^{2x}+a\cdot 4^{x+1}+44-4a=0$에서

$(4^x)^2+4a\cdot 4^x+44-4a=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+4at+44-4a=0$ ····· ㉠

주어진 방정식의 두 근의 비가 1 : 2이므로 두 근을

m, $2m$ $(m\neq 0)$으로 놓으면 방정식 ㉠의 두 근은 4^m, 4^{2m}이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^m+4^{2m}=-4a$, $4^m\cdot 4^{2m}=44-4a$

$4^m=p\,(p>0)$로 놓으면

$p+p^2=-4a$, $p^3=44-4a$

두 식을 연립하면

$p^3=44+p+p^2$

$p^3-p^2-p-44=0$

위의 식의 좌변을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

	1	−1	−1	−44
4		4	12	44
	1	3	11	0

$(p-4)(p^2+3p+11)=0$

이때 $p^2+3p+11=\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}>0$이므로

$p-4=0$ $\therefore p=4$

$\therefore 4^m=4$

(2) $p=4$이므로 $p+p^2=-4a$에서

$-4a=4+4^2=20$

$\therefore a=-5$

답 (1) 4 (2) −5

채점 기준	배점
(1) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 4^m의 값을 구할 수 있다.	6점
(2) a의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

0489

|전략| 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭임을 이용하여 k의 값을 먼저 구한다.

함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축, 즉 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 두 그래프를 각각 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수 $y=a^{x-k}$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-k}$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다.

$\therefore k=2$

따라서 $f(x)=a^{x-2}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2}$이므로

$f(1)=a^{1-2}=\frac{1}{a}$, $g(1)=\left(\frac{1}{a}\right)^{1-2}=a$

즉, $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{8}{3}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$, $3a^2-8a-3=0$

$(3a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>1$)

$\therefore a-k=3-2=1$

답 1

0490

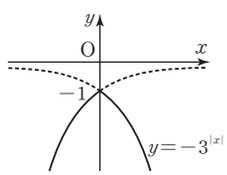
|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-3^{|x|}$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

함수 $f(x)=-3^{|x-a|}+a$의 그래프는 함수 $y=-3^{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

함수

$y=-3^{|x|}=\begin{cases}-3^x & (x\ge 0)\\ -3^{-x} & (x<0)\end{cases}$

의 그래프는 [그림 1]과 같다.



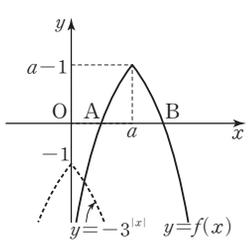
[그림 1]

이때 $y=-3^{|x|}$의 그래프 위의 점 $(0,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a,\ a-1)$이고, $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나야 하므로

$a-1>0$ $\therefore a>1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 $a-1$을 갖는다. ····· ㉠

그런데 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면



[그림 2]

$\mathrm{A}(a-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a+2,\ 0)$

즉, $f(a+2)=0$이므로

$-3^{|a+2-a|}+a=0$, $-3^2+a=0$ $\therefore a=9$

따라서 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=9$에서 최댓값 8을 가지므로

$p=9$, $q=8$

$\therefore p+q=9+8=17$

답 17

0491

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 주어진 조건을 만족시키는 n의 값의 범위를 구한다.

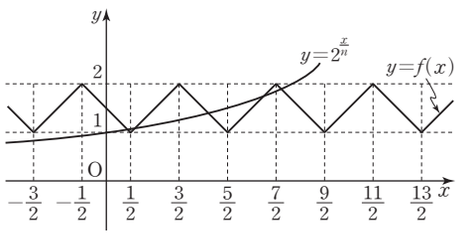
$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}-x+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)\\ x+\frac{1}{2}\quad\left(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

이고, $f(x+2)=f(x)$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-x+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}+2k\le x<\frac{1}{2}+2k\right)\\ x+\frac{1}{2}\quad\left(\frac{1}{2}+2k\le x<\frac{3}{2}+2k\right)\end{cases}\text{ (단, } k\text{는 정수)}$$

이때 함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x=\frac{7}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프보다 위쪽에 있어야 하므로

$2^{\frac{7}{2n}}<f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$2>1$이므로 $\frac{7}{2n}<1$ $\quad\therefore n>\frac{7}{2}$

(ii) $x=\frac{11}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프보다 아래쪽에 있어야 하므로

$2^{\frac{11}{2n}}>f\left(\frac{11}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$2>1$이므로 $\frac{11}{2n}>1$ $\quad\therefore n<\frac{11}{2}$

(i), (ii)에서 $\frac{7}{2}<n<\frac{11}{2}$

따라서 자연수 n은 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$

답 9

0492

|전략| 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프를 그린다.

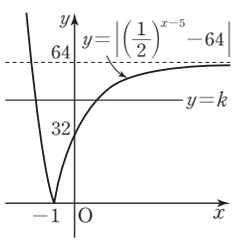
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -64만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나려면

$32<k<64$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64-32-1=31$



답 31

0493

|전략| 부등식 $9^x+p\cdot3^x+q<0$과 그 해 $-1<x<0$을 $3^x=t\,(t>0)$로 치환하여 나타낸다.

$9^x+p\cdot3^x+q<0$에서 $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+pt+q<0$ ····· ㉠

$-1<x<0$에서 $3^{-1}<3^x<3^0$, 즉 $\frac{1}{3}<t<1$이므로

$\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)<0$

$\therefore t^2-\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$p=-\frac{4}{3}$, $q=\frac{1}{3}$

즉, $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2p\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-3q<0$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=s\,(s>0)$로 놓으면

$s^2+\frac{8}{3}s-1<0$, $3s^2+8s-3<0$

$(s+3)(3s-1)<0$

$\therefore 0<s<\frac{1}{3}$ $(\because s>0)$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{3}$에서

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x>1$

답 $x>1$

0494

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(m,\ n)$이 주어지면 $f(m)=n$임을 이용한다.

함수 $f(x)=a^{bx}+k\,(0<a<1, b>0)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=a^0+k=0$

$\therefore k=-1$

즉, $f(x)=a^{bx}-1$이므로 $\mathrm{A}(-1, a^{-b}-1)$, $\mathrm{C}(1, a^b-1)$에서 두 삼각형 ABO와 CDO의 넓이를 각각 구하면

$\triangle\mathrm{ABO}=\frac{1}{2}(a^{-b}-1)$

$\triangle\mathrm{CDO}=\frac{1}{2}(1-a^b)$

주어진 조건에서 $\triangle\mathrm{ABO}>3\triangle\mathrm{CDO}$이므로

$\frac{1}{2}(a^{-b}-1)>\frac{3}{2}(1-a^b)$

$a^{-b}-1>3-3a^b$

양변에 a^b을 곱하면

$1-a^b>3a^b-3a^{2b}$, $3a^{2b}-4a^b+1>0$

$a^b=t\,(0<t<1)$로 놓으면 ($0<a<1$이고 $b>0$이므로 $0<a^b<1$)

$3t^2-4t+1>0$, $(3t-1)(t-1)>0$

$\therefore t<\frac{1}{3}$ 또는 $t>1$

이때 $0<t<1$이므로 $0<t<\frac{1}{3}$

$\therefore 0<a^b<\frac{1}{3}$

답 $0<a^b<\frac{1}{3}$

4 로그함수

본책 68~87쪽

STEP 1 개념 마스터 1

0495
함수 $y=3^x$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=3^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_3 y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_3 x$ 답 $y=\log_3 x$

0496
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$에서 로그의 정의에 의하여
$x-1=\log_{\frac{1}{2}} y$, $x=\log_{\frac{1}{2}} y+1$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_{\frac{1}{2}} x+1$ 답 $y=\log_{\frac{1}{2}} x+1$

0497
함수 $y=(\sqrt{3})^x+1$은 실수 전체의 집합에서 1보다 큰 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=(\sqrt{3})^x+1$, 즉 $y-1=(\sqrt{3})^x$에서 로그의 정의에 의하여
$x=\log_{\sqrt{3}}(y-1)$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_{\sqrt{3}}(x-1)$ 답 $y=\log_{\sqrt{3}}(x-1)$

0498
$f(1)=\log_2 1=0$ 답 0

0499
$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$ 답 -3

0500
$f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ 답 4

0501
$f(\sqrt{2})=\log_2 \sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0502
$f(4)-f(2)=\log_2 4-\log_2 2=\log_2 2^2-\log_2 2$
$=2-1=1$ 답 1

0503
$f(8)f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 8\cdot\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 2^3\cdot\log_2 2^{-2}$
$=3\cdot(-2)=-6$ 답 -6

0504
$f(1)=\log_{\frac{1}{3}} 1=0$ 답 0

0505
$f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}=1$ 답 1

0506
$f(3)=\log_{\frac{1}{3}} 3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$ 답 -1

0507
$f(81)=\log_{\frac{1}{3}} 81=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=-4$ 답 -4

0508
$f(9)-f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_{\frac{1}{3}} 9-\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$=-2-2=-4$ 답 -4

0509
$f(27)f\left(\frac{1}{81}\right)=\log_{\frac{1}{3}} 27\cdot\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^4$
$=(-3)\cdot 4=-12$ 답 -12

0510
ㄱ. a의 값에 관계없이 그래프는 항상 점 $(1, 0)$을 지난다. (참)
ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이다. (참)
ㄷ. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (거짓)
ㄹ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다. (참)
ㅁ. $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0511
$3\log_5 3=\log_5 3^3=\log_5 27$
함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\log_5 20<\log_5 27$ $\therefore \log_5 20<3\log_5 3$ 답 $\log_5 20<3\log_5 3$

0512
$\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27=\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 3^3=\log_{\frac{1}{2}} 3$
$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 5=\log_{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$
함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$ $\therefore \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 5$
답 $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 5$

0513

$2=\log_3 3^2=\log_3 9$

$\log_9 25=\log_{3^2} 5^2=\log_3 5$

함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3 5<\log_3 9<\log_3 10$ $\therefore \log_9 25<2<\log_3 10$

답 $\log_9 25<2<\log_3 10$

0514

$-1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}} 2$

$\log_{\frac{1}{4}} 36=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 6^2=\log_{\frac{1}{2}} 6$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{2}} 6<\log_{\frac{1}{2}} 2$ $\therefore \log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{4}} 36<-1$

답 $\log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{4}} 36<-1$

0515

$y-2=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$에서 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+2$

답 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+2$

0516

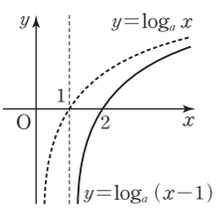
$-y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$에서 $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 답 $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

0517

$x=\log_{\frac{1}{3}} y$에서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 답 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

0518

함수 $y=\log_a(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



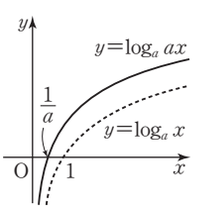
답 풀이 참조

0519

$y=\log_a ax=\log_a a+\log_a x$

$=1+\log_a x$

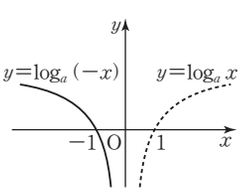
따라서 함수 $y=\log_a ax$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0520

함수 $y=\log_a(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



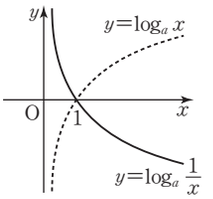
답 풀이 참조

0521

$y=\log_a \frac{1}{x}=\log_a x^{-1}$

$=-\log_a x$

따라서 함수 $y=\log_a \frac{1}{x}$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

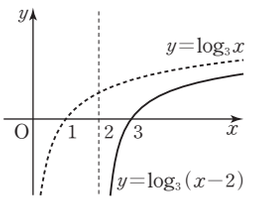


답 풀이 참조

0522

함수 $y=\log_3(x-2)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

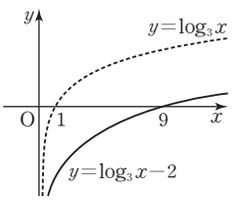


답 풀이 참조

0523

함수 $y=\log_3 x-2$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

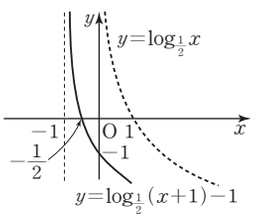


답 풀이 참조

0524

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-1$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.

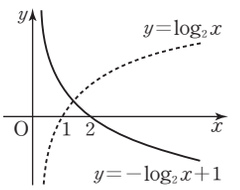


답 풀이 참조

0525

함수 $y=-\log_2 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



답 풀이 참조

0526

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=32$일 때 최댓값 $\log_2 32=\log_2 2^5=5$를 갖고,

$x=2$일 때 최솟값 $\log_2 2=1$을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

0527

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$을 갖고,

$x=8$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3$을 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0528

함수 $y=\log_2 (x+3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=5$일 때 최댓값 $\log_2 8=\log_2 2^3=3$을 갖고,

$x=1$일 때 최솟값 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$를 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: 2

0529

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x+1$은 x의 값이 증가하면 y은 값은 감소하므로

$x=\frac{1}{27}$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}+1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3+1=4$를 갖고,

$x=9$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 9+1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=-1$을 갖는다.

답 최댓값: 4, 최솟값: -1

STEP 2 유형 마스터 ❶

유형 01 로그함수의 함숫값 개념 01

로그함수 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$에서

$f(p)=q \Longleftrightarrow \log_a p=q \Longleftrightarrow a^q=p$

0530

$f(3)=\log_3 3+a\log_3 9$

$=\log_3 3+a\log_3 3^2=1+2a$

$f(27)=\log_3 27+a\log_{27} 9$

$=\log_3 3^3+a\log_{3^3} 3^2=3+\frac{2}{3}a$

이때 $f(3)=f(27)$이므로

$1+2a=3+\frac{2}{3}a$

$\frac{4}{3}a=2 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

답 ③

0531

$g(2)=2^2=4$, $h(2)=\log_2 2=1$이므로

$(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)=f(g(2))+g(h(2))$

$=f(4)+g(1)$

$=2^4+1^2=17$

답 ①

0532

$f(x)=\log_5\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\log_5\frac{x+2}{x+1}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$

$=\log_5\frac{3}{2}+\log_5\frac{4}{3}+\log_5\frac{5}{4}+\cdots+\log_5\frac{50}{49}$

$=\log_5\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{50}{49}\right)$

$=\log_5\frac{50}{2}=\log_5 25$

$=\log_5 5^2=2$

답 ②

0533

$18>1$이므로 $f(18)=\frac{1}{3}\cdot 18=6$

같은 방법으로 $(f\circ f)(18)=f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6=2$

$(f\circ f\circ f)(18)=f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$

이때 $f(2)=\frac{2}{3}<1$이므로

$(f\circ f\circ f\circ f)(18)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\log_2\frac{2}{3}$

$\therefore 2^{(f\circ f\circ f\circ f)(18)}=2^{\log_2\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

유형 02 로그함수의 성질 개념 01, 02

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$에 대하여

(1) 정의역: 양의 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

(3) 그래프의 점근선: 직선 $x=0$ (y축)

0534

$y=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{x}=\log_{a^{-1}} x^{-1}=\log_a x$이므로

① 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 일치한다.

② a의 값에 관계없이 그래프는 항상 점 $(1, 0)$을 지난다.

③ 그래프의 점근선은 y축이다.

④ $a>1$이므로 $x>0$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0535

ㄱ. 두 함수 모두 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$이다. (참)

ㄴ. $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=a^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고, 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $(1, 1)$이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0536

함수 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$

또, $x=1$일 때 $y<0$이므로 $\log_a b<0$

즉, $\log_a b<\log_a 1$이고 $0<a<1$이므로 $b>1$

따라서 함수 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

유형 03 로그함수의 그래프 위의 점 개념 01, 02

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다.

⇨ $n=\log_a m$ $\therefore a^n=m$

0537

주어진 그래프에서 $\log_3 c=b$, $\log_3 d=c$이므로 $c=3^b$, $d=3^c$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{b-c}=3^{-b+c}=\frac{1}{3^b}\cdot 3^c=\frac{d}{c}$

답 ③

다른 풀이 $\log_3 c=b$, $\log_3 d=c$이므로

$b-c=\log_3 c-\log_3 d=\log_3 \frac{c}{d}$

따라서 $3^{b-c}=\frac{c}{d}$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{b-c}=\frac{d}{c}$

0538

$A(k,\ \log_{\frac{1}{2}} k)$, $B(k,\ \log_{\frac{1}{4}} k)$이고, $k>1$이므로

$\overline{AB}=\log_{\frac{1}{4}} k-\log_{\frac{1}{2}} k=-\frac{1}{2}\log_2 k+\log_2 k=\frac{1}{2}\log_2 k$

이때 $\overline{AB}=2$이므로

$\frac{1}{2}\log_2 k=2$, $\log_2 k=4$ $\therefore k=2^4=16$

답 16

0539

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 점 A의 좌표는 $(a,\ 2)$

이때 점 A가 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_2 a$에서 $a=2^2=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$이고 $\overline{BC}=2$이므로 점 C의 x좌표는 6이다.

답 6

0540

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$A(a,\ \log_3 a)$, $B(a,\ \log_9 a)$, $C(b,\ \log_3 b)$, $D(b,\ \log_9 b)$이므로

$\overline{AB}=\log_3 a-\log_9 a=\log_3 a-\frac{1}{2}\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 a$

$\overline{CD}=\log_3 b-\log_9 b=\log_3 b-\frac{1}{2}\log_3 b=\frac{1}{2}\log_3 b$

이때 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$이므로 $\overline{CD}=2\overline{AB}$에서

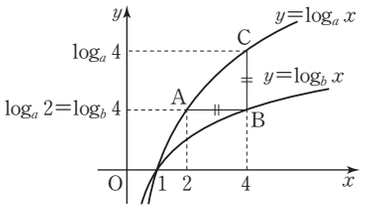
$\frac{1}{2}\log_3 b=2\cdot\frac{1}{2}\log_3 a$, $\log_3 b=2\log_3 a$

$\log_3 b=\log_3 a^2$ $\therefore b=a^2$

$\therefore \log_a b=\log_a a^2=2$

답 2

0541



점 A의 x좌표가 2이고, $\overline{AB}=2$이므로 점 B의 x좌표는 4이다.

두 점 B, C는 각각 함수 $y=\log_b x$, $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이므로 두 점 B, C의 y좌표는 각각 $\log_b 4$, $\log_a 4$이다.

이때 $\overline{BC}=2$이므로

$\log_a 4-\log_b 4=2$ ····· ㉠

또한, 두 점 A, B의 y좌표가 서로 같으므로

$\log_a 2=\log_b 4$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\log_a 4-\log_a 2=2$, $2\log_a 2-\log_a 2=2$

$\log_a 2=2$ $\therefore a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>1)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $\log_{\sqrt{2}} 2=\log_b 4$, $2=\log_b 4$

$b^2=4$ $\therefore b=2\ (\because b>1)$

$\therefore a^2+b^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$

답 6

0542

$A(a,\ \log_2 a)$, $B(b,\ \log_2 b)$ $(a>0, b>0, a\neq b)$로 놓으면

선분 AB의 중점이 x축 위에 있으므로

$\frac{\log_2 a+\log_2 b}{2}=0$, $\log_2 ab=0$

$\therefore ab=1$ ····· ㉠

또, 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$\frac{1\cdot b+2\cdot a}{1+2}=1$ $\therefore b=3-2a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a(3-2a)=1$, $2a^2-3a+1=0$

$(2a-1)(a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 $b=2$, $a=1$일 때 $b=1$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=2\ (\because a\neq b)$

따라서 $A\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $B(2,\ 1)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

Lecture

좌표평면 위의 선분의 내분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 AB에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

0543

$A(1,\ 0)$, $B(b,\ \log_3 b)$, $C(c,\ \log_3 c)$ $(0<b<c)$로 놓으면

삼각형 ABC의 무게중심이 $G\left(\frac{13}{3},\ 1\right)$이므로

$\frac{1+b+c}{3}=\frac{13}{3}$에서 $b+c=12$

$\therefore c=12-b$ …… ㉠

$\frac{0+\log_3 b+\log_3 c}{3}=1$에서 $\log_3 b+\log_3 c=3$

$\log_3 bc=3$ $\quad\therefore bc=27$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b(12-b)=27$, $b^2-12b+27=0$

$(b-3)(b-9)=0$ $\quad\therefore b=3$ 또는 $b=9$

㉠에서 $b=3$일 때 $c=9$, $b=9$일 때 $c=3$이므로

$b=3$, $c=9$ $(\because b<c)$

따라서 $B(3,\ 1)$, $C(9,\ 2)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(9-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{37}$

답 $\sqrt{37}$

0544

두 점 P, Q는 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로

$P(\alpha,\ \alpha+k)$, $Q(\beta,\ \beta+k)$

$\overline{PQ}=4\sqrt{2}$에서

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+k)-(\alpha+k)\}^2}=4\sqrt{2}$

$\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=4\sqrt{2}$, $(\beta-\alpha)^2=16$

$\therefore \beta-\alpha=4$ $(\because \beta>\alpha)$ …… ㉠ … ❶

또, 두 점 P, Q는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프 위의 점이므로

$P(\alpha,\ \log_4 \alpha)$, $Q(\beta,\ \log_4 \beta)$

$\therefore \alpha+k=\log_4 \alpha$, $\beta+k=\log_4 \beta$ … ❷

$\beta-\alpha=\log_4 \beta-\log_4 \alpha$

$4=\log_4 \frac{\beta}{\alpha}$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=4^4=256$ … ❸

답 256

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 직선 $y=x+k$ 위의 점임을 이용할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 P, Q가 함수 $y=\log_4 x$의 그래프 위의 점임을 이용할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 04 로그함수를 이용한 수의 대소 비교 개념 02

주어진 수의 밑을 같게 한 다음 로그함수 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$의 성질을 이용한다.

(1) $a>1$일 때, $0<m<n \Longleftrightarrow \log_a m<\log_a n$ — 부등호 방향 그대로

(2) $0<a<1$일 때, $0<m<n \Longleftrightarrow \log_a m>\log_a n$ — 부등호 방향 반대로

0545

$0<a<1<b$이므로 $\log_a b<0$

$A-B=1-\log_a b>0$ $\quad\therefore A>B$ …… ㉠

$A-C=1-\log_a \frac{a}{b}=1-(1-\log_a b)=\log_a b<0$

$\therefore A<C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B<A<C$

답 ②

0546

$A=2\log_{0.1} 3\sqrt{3}=\log_{0.1}(3\sqrt{3})^2=\log_{0.1} 27$

$B=\log\frac{1}{25}=-\log 25=\log_{10^{-1}} 25=\log_{0.1} 25$

$C=\log_{0.1} 3-1=\log_{0.1} 3-\log_{0.1} 0.1=\log_{0.1}\frac{3}{0.1}=\log_{0.1} 30$

이때 $0<0.1<1$이고 $25<27<30$이므로

$\log_{0.1} 30<\log_{0.1} 27<\log_{0.1} 25$

$\therefore C<A<B$

답 ④

0547

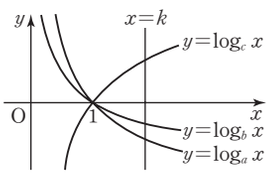
$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$ $(k>1)$로 놓으면

$a^{x_1}=k$에서 $\log_a k=x_1$

$b^{x_2}=k$에서 $\log_b k=x_2$

$c^{x_3}=k$에서 $\log_c k=x_3$

오른쪽 그림과 같이 주어진 로그함수의 그래프 위에 직선 $x=k$ $(k>1)$를 그으면



$\log_a k<\log_b k<\log_c k$

$\therefore x_1<x_2<x_3$

답 ①

0548

$1<x<9$에서 $3>1$이므로 $\log_3 1<\log_3 x<\log_3 9$

$\therefore 0<\log_3 x<2$ …… ㉠

(i) $A-B=\log_3 x^2-(\log_3 x)^2$

$=2\log_3 x-(\log_3 x)^2$

$=\log_3 x(2-\log_3 x)$

㉠에서 $\log_3 x>0$, $2-\log_3 x>0$이므로

$A-B>0$ $\quad\therefore A>B$

(ii) ㉠에서 $0<\log_3 x<1$일 때, $\log_3(\log_3 x)<0$

$y=\log_3 t$의 그래프에서 $0<t<1$일 때 y의 값은 음수이다.

한편, $(\log_3 x)^2>0$이므로

$\log_3(\log_3 x)<(\log_3 x)^2$ …… ㉡

또, ㉠에서 $1\le\log_3 x<2$일 때, $0\le\log_3(\log_3 x)<1$

$1\le\log_3 x<2$에서 $3>1$이므로 $\log_3 1\le\log_3(\log_3 x)<\log_3 2$ $\therefore 0\le\log_3(\log_3 x)<\log_3 2<1$

한편, $(\log_3 x)^2\ge 1$이므로

$\log_3(\log_3 x)<(\log_3 x)^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $C<B$

(i), (ii)에서 $C<B<A$

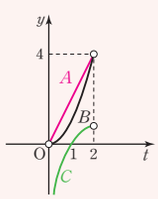
답 $C<B<A$

Lecture

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1<x<9$, 즉 $0<t<2$일 때

$A=2t$, $B=t^2$, $C=\log_3 t$

이때 세 함수 $y=2t$, $y=t^2$, $y=\log_3 t$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $C<B<A$임을 알 수 있다.



유형 05 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 개념 03

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
⇨ $y=\log_a(x-m)+n$ ⟶ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입

(2) x축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=-\log_a x$ ⟶ y 대신 $-y$를 대입

(3) y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=\log_a(-x)$ ⟶ x 대신 $-x$를 대입

(4) 원점에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=-\log_a(-x)$ ⟶ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

(5) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=a^x$ ⟶ x 대신 y, y 대신 x를 대입

0549

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2(x-a)+b$

이 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$이므로 $a=-1$

$\therefore y=\log_2(x+1)+b$

또, 이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\log_2(0+1)+b \qquad \therefore b=2$

$\therefore b-a=2-(-1)=3$ 답 3

0550

$y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)=\log_3\frac{x-9}{9}$

$=\log_3(x-9)-\log_3 9$

$=\log_3(x-9)-2$

즉, 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=9$, $n=-2$이므로

$mn=9\cdot(-2)=-18$ 답 −18

0551

함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_3(x-1)-1$

또, 이것을 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\log_3(-x-1)-1=\log_3(-x-1)-\log_3 3$

$=\log_3\frac{-x-1}{3}$ … ❶

이것이 함수 $y=\log_3(ax+b)$와 일치해야 하므로

$a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}$ … ❷

$\therefore a+b=-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ … ❸

답 $-\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프를 주어진 조건에 따라 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0552

ㄱ. $y=\log_2(4x-3)=\log_2 4\left(x-\frac{3}{4}\right)=\log_2\left(x-\frac{3}{4}\right)+2$이므로 함수 $y=\log_2(4x-3)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_4 x^2=\log_{2^2} x^2=\log_2|x|$이므로 함수 $y=\log_4 x^2$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

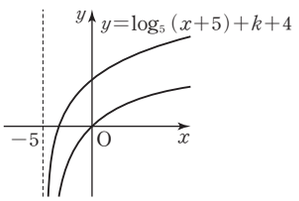
ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\{-(x-1)\}=-\log_2\{-(x-1)\}$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0553

함수 $y=\log_5(x+2)+4$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_5(x+5)+k+4$



이때 이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\geq 0$이어야 하므로 $\log_5 5+k+4\geq 0$에서

$1+k+4\geq 0 \qquad \therefore k\geq -5$

따라서 실수 k의 최솟값은 -5이다. 답 −5

0554

$y=\log_3 9x=\log_3 3^2+\log_3 x=\log_3 x+2$

$\log_9 27x^2=\log_{3^2} 3^3+\log_{3^2} x^2=\log_3|x|+\frac{3}{2}$

즉, 함수 $y=\log_3 9x$의 그래프는 함수 $y=\log_9 27x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다. (정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로 $\log_3|x|=\log_3 x$)

따라서 $f(k)$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 $\frac{1}{2}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=\frac{1}{2}\cdot 10=5$ 답 5

유형 06 로그함수의 그래프와 도형의 넓이 개념 02, 03

평행이동한 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 길이 또는 넓이가 같은 부분을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0555

$g(x)=\log_5 2x=\log_5 x+\log_5 2$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_5 2$만큼 평행이동한 것이다.

즉, $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}=\log_5 2$이므로 사각형 ACDB는 평행사변형이다.

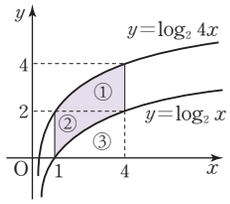
따라서 $A(1,\ 0)$이고 평행사변형 ACDB의 넓이가 $\log_5 64$이므로

$\log_5 2\cdot(k-1)=\log_5 64$, $\log_5 2\cdot(k-1)=6\log_5 2$

$k-1=6 \qquad \therefore k=7$ 답 7

0556

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 4x$의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는 ①+②이다.



이때 함수 $y=\log_2 4x=\log_2 x+2$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ①=③이다.

└ 두 그래프의 모양이 같다.

즉, ①+②=③+②이므로 구하는 넓이는

$3\cdot 2=6$

답 ②

유형 07 로그함수의 역함수 개념 02

두 함수 $y=a^x, y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

⇨ 점 $(m,\ n)$이 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이면 점 $(n,\ m)$은 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이다.

0557

함수 $y=6^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=6^{x-a}+3$ ····· ㉠

㉠의 그래프가 함수 $y=\log_6(6x-b)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 ㉠은 $y=\log_6(6x-b)$의 역함수이다.

㉠의 역함수를 구하면 $y=6^{x-a}+3$에서 $y-3=6^{x-a}$

$x-a=\log_6(y-3)$ $\therefore x=\log_6(y-3)+a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_6(x-3)+a$

이 식이 $y=\log_6(6x-b)=\log_6\left(x-\frac{b}{6}\right)+1$과 같으므로

$a=1,\ 3=\frac{b}{6}$ $\therefore a=1, b=18$

$\therefore a+b=1+18=19$

답 ③

0558

함수 $y=\log_3(2x+5)$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지나면 함수 $y=\log_3(2x+5)$의 그래프는 점 $(a,\ 3)$을 지나므로

$3=\log_3(2a+5),\ 2a+5=27$

$2a=22$ $\therefore a=11$

답 11

0559

$f(g(x))=x$이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$\log_2 k-1=5,\ \log_2 k=6$ $\therefore k=2^6=64$

$\therefore g(5)=64$

답 64

0560

$B(b,\ a), D(1,\ a)$이므로 $f(b)=g(1)=a$

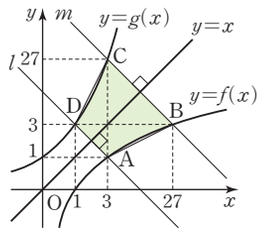
$g(1)=a$에서 $a=3^1=3$

$f(b)=a=3$에서

$\log_3 b=3$ $\therefore b=3^3=27$

$\therefore B(27,\ 3), D(1,\ 3)$

이때 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 A와 D, 두 점 B와 C는 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$A(3,\ 1), C(3,\ 27)$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 26\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 26\cdot 24$

$=26+312=338$

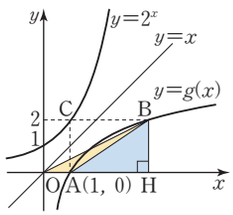
답 ④

0561

함수 $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이므로

$g(x)=\log_2 x$

오른쪽 그림에서 점 $A(1,\ 0)$이고,



점 $C(1,\ a)$라 하면 점 C는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$a=2^1=2$

$\therefore C(1,\ 2)$

또, 두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로 점 $B(b,\ 2)$라 하면 점 B는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_2 b$에서 $b=2^2=4$

$\therefore B(4,\ 2), H(4,\ 0)$

이때 두 삼각형 OAB와 AHB의 밑변을 각각 $\overline{OA}$, $\overline{AH}$라 하면 높이는 $\overline{BH}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \triangle OAB : \triangle AHB=\overline{OA} : \overline{AH}=1 : 3$

답 ②

0562

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=2\log_3(x-1)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=2\log_3(x-1)$은 서로 역함수 관계이다.

점 $P(2,\ b)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(b,\ 2)$는 $y=2\log_3(x-1)$의 그래프 위의 점이다.

즉, $2=2\log_3(b-1)$에서 $1=\log_3(b-1)$

$b-1=3$ $\therefore b=4$

또, 점 $Q(a,\ b)$, 즉 $Q(a,\ 4)$는 $y=2\log_3(x-1)$의 그래프 위의 점이므로 $4=2\log_3(a-1)$에서 $2=\log_3(a-1)$

$a-1=3^2$ $\therefore a=10$

$\therefore a+b=10+4=14$

답 14

다른 풀이 함수 $y=f(x)$는 $y=2\log_3(x-1)$의 역함수이므로

$\frac{y}{2}=\log_3(x-1)$에서 $3^{\frac{y}{2}}=x-1$ $\therefore x=3^{\frac{y}{2}}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{\frac{x}{2}}+1$ $\therefore f(x)=3^{\frac{x}{2}}+1$

점 $P(2,\ b)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $b=3+1=4$

또, 점 $Q(a,\ b)$, 즉 $Q(a,\ 4)$는 $y=2\log_3(x-1)$의 그래프 위의 점이므로

$4=2\log_3(a-1)$에서

$a-1=3^2$ $\therefore a=10$

$\therefore a+b=10+4=14$

0563

$y=2^x-1$에서 $2^x=y+1$, $x=\log_2(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+1)$

즉, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 직선 AB와 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 점 A(2, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 B이고, 점 B의 좌표는 (3, 2)이다.

∴ C(2, 0), D(3, 0)

직선 AB의 기울기가 -1이고 직선 $y=x$의 기울기는 1이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 $\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=1$이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot1=\frac{5}{2}$

답 ①

유형 08 함수의 최대·최소 – $y=\log_a f(x)$ 꼴 개념 04

함수 $y=\log_a f(x)$ $(a>0, a\neq1)$의 최대·최소

(1) $a>1$일 때 ⇨ $f(x)$의 값이 최대이면 y의 값도 최대

$f(x)$의 값이 최소이면 y의 값도 최소

(2) $0<a<1$일 때 ⇨ $f(x)$의 값이 최소이면 y의 값은 최대

$f(x)$의 값이 최대이면 y의 값은 최소

0564

$y=\log_3(x^2-2x+1)$에서 $f(x)=x^2-2x+1$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2$

$2\le x\le4$에서 $f(2)=1$, $f(4)=9$이므로 $1\le f(x)\le9$

이때 $3>1$이므로 주어진 함수는 $f(x)$의 값이 최대일 때 y의 값은 최대이고, $f(x)$의 값이 최소일 때 y의 값은 최소이다.

즉, $f(x)=9$일 때 최댓값 $y=\log_3 9=2$,

$f(x)=1$일 때 최솟값 $y=\log_3 1=0$을 가지므로

$M=2$, $m=0$ ∴ $M+m=2$

답 ④

0565

$2>1$이므로 함수 $y=6\log_2(x+k)$는 $x=1$일 때 최솟값 12를 갖는다.

$6\log_2(1+k)=12$, $\log_2(1+k)=2$

$1+k=2^2=4$ ∴ $k=3$

함수 $y=6\log_2(x+3)$은 $x=29$일 때 최댓값을 가지므로

$M=6\log_2(29+3)=6\log_2 32=6\cdot5=30$

∴ $M-k=30-3=27$

답 ②

0566

진수의 조건에서 $x+6>0$, $2-x>0$ ∴ $-6<x<2$

$y=\log_a(x+6)+\log_a(2-x)=\log_a(-x^2-4x+12)$

$f(x)=-x^2-4x+12$로 놓으면 $f(x)=-(x+2)^2+16$

$-6<x<2$에서 $0<f(x)\le16$

이때 함수 $y=\log_a f(x)$가 최솟값을 가지므로 $0<a<1$

따라서 함수 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$\log_a 16=-4$, $a^{-4}=16$ ∴ $a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

답 $\frac{1}{2}$

0567

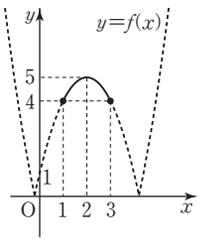
$y=\log_{\frac{1}{5}}|x^2-4x-1|$에서 $f(x)=|x^2-4x-1|$로 놓으면

$f(x)=|x^2-4x-1|$

$=|(x-2)^2-5|$

함수 $y=f(x)$의 그래프는

함수 $y=(x-2)^2-5$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$1\le x\le3$에서 $f(1)=f(3)=4$, $f(2)=5$이므로 $4\le f(x)\le5$

이때 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $f(x)$의 값이 최대일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=\log_{\frac{1}{5}}|x^2-4x-1|$의 최솟값은

$\log_{\frac{1}{5}}5=-1$

답 ②

유형 09 함수의 최대·최소 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 개념 04

함수 $y=(\log_a x)^2+p\log_a x+q$ $(a>0, a\neq1)$의 최대·최소

⇨ $\log_a x=t$로 놓으면 $y=t^2+pt+q$이므로 이차함수의 최대·최소를 이용한다.

0568

$y=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x+3$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면

$y=t^2+2t+3=(t+1)^2+2$

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{2}\le x\le4$에서

$\log_{\frac{1}{2}}4\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$ ∴ $-2\le t\le1$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 6을 갖고, $t=-1$일 때 최솟값 2를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$6+2=8$

답 ④

0569

$x>0$이므로

$y=(\log_3 x)^2+a\log_{27}x^2+b=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2+\frac{2}{3}at+b$ …… ㉠ … ❶

주어진 함수는 $x=\frac{1}{3}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{3}=-1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$y=(t+1)^2+1=t^2+2t+2$ …… ㉡ … ❷

㉠=㉡이므로 $\frac{2}{3}a=2$, $b=2$ ∴ $a=3$, $b=2$

∴ $a+b=3+2=5$ … ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\log_3 x=t$로 치환하여 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $x=\frac{1}{3}$에서 최솟값 1을 가짐을 이용하여 t에 대한 이차함수를 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0570

$y=(\log_2 2x)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right)$

$=(1+\log_2 x)(4-\log_2 x)$

$=-(\log_2 x)^2+3\log_2 x+4$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=-t^2+3t+4=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

이때 $2>1$이므로 $2\le x\le 16$에서

$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 16$ $\therefore 1\le t\le 4$

따라서 주어진 함수는 $t=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{25}{4}$를 갖고, $t=4$일때 최솟값 0을 가지므로

$M=\frac{25}{4}$, $m=0$ $\therefore M-m=\frac{25}{4}$ 답 ②

0571

$6^{\log x}=x^{\log 6}$이므로

$y=6^{\log x}\cdot x^{\log 6}-6(6^{\log x}+x^{\log 6})$

$=6^{\log x}\cdot 6^{\log x}-6(6^{\log x}+6^{\log x})$

$=(6^{\log x})^2-12\cdot 6^{\log x}$

$6^{\log x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-12t=(t-6)^2-36$

이때 $x>1$에서 $t>1$ ($x>1$에서 $\log x>0$이므로 $6^{\log x}>1$)

따라서 주어진 함수는 $t=6$일 때 최솟값 $m=-36$을 갖는다.

한편, $t=6^{\log x}=6$에서

$\log x=1$ $\therefore x=a=10$

$\therefore |a+m|=|10+(-36)|=26$ 답 26

유형 10 함수의 최대·최소 – 지수에 미지수가 있는 경우 개념 04

$y=x^{f(x)}$ 꼴의 함수의 최대·최소는 양변에 로그를 취하여 $\log y$의 최대·최소를 구한다.

0572

$y=10x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log 10x^{2-\log x}$

$=\log 10+\log x^{2-\log x}$

$=1+(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x+1$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$

즉, $\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $\log x=1$에서

$x=10$ $\therefore a=10$

$\log y=2$에서

$y=10^2=100$ $\therefore b=100$

$\therefore b-a=100-10=90$ 답 ③

0573

$y=\frac{8x^{\log_4 x}}{x^2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $x>0$이므로

$\log_2 y=\log_2\frac{8x^{\log_4 x}}{x^2}=\log_2 8+\log_2 x^{\log_4 x}-\log_2 x^2$

$=3+\log_4 x\cdot\log_2 x-2\log_2 x=\frac{1}{2}(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2 y=\frac{1}{2}t^2-2t+3=\frac{1}{2}(t-2)^2+1$

이때 $2>1$이므로 $2\le x\le 16$에서

$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 16$ $\therefore 1\le t\le 4$

즉, $\log_2 y$는 $t=4$일 때 최댓값 3, $t=2$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $\log_2 M=3$, $\log_2 m=1$에서 $M=8$, $m=2$

$\therefore M+m=8+2=10$ 답 10

유형 11 함수의 최대·최소 – 산술평균과 기하평균의 관계 이용 개념 04

$\log_a b>0$, $\log_b a>0$일 때

$\log_a b+\log_b a\ge 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}=2$

(단, 등호는 $\log_a b=\log_b a$일 때 성립)

0574

$1<x<100$에서 $\log x>0$, $\log\frac{100}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log x+\log\frac{100}{x}\ge 2\sqrt{\log x\cdot\log\frac{100}{x}}$

$\log x+\log\frac{100}{x}=\log\left(x\cdot\frac{100}{x}\right)=\log 100=2$이므로

$2\ge 2\sqrt{y}$, $\sqrt{y}\le 1$ $\therefore 0<y\le 1$

즉, 주어진 함수의 최댓값은 $b=1$

한편, 등호는 $\log x=\log\frac{100}{x}$일 때 성립하므로

$x=\frac{100}{x}$, $x^2=100$ $\therefore x=a=10$ ($\because 1<x<100$)

$\therefore a-b=10-1=9$ 답 9

0575

$\log_3\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_3\left(y+\frac{4}{x}\right)=\log_3\left\{\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)\right\}$

$=\log_3\left(xy+\frac{4}{xy}+5\right)$

$3>1$이므로 주어진 식은 $xy+\frac{4}{xy}+5$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$, $\frac{4}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$xy+\frac{4}{xy}+5\ge 2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}+5=2\cdot 2+5=9$ ($xy=\frac{4}{xy}$에서 $(xy)^2=4$ $\therefore xy=2$ ($\because xy>0$))

(단, 등호는 $xy=2$일 때 성립)

따라서 $xy+\frac{4}{xy}+5$의 최솟값은 9이므로 주어진 식의 최솟값은

$\log_3 9=2$ 답 ③

0576

진수의 조건에서 $2x+1>0$ $\therefore x>-\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$\log_3(2x+1)=2$에서 $2x+1=3^2$

$2x=8$ $\therefore x=4$

$x=4$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=4$

0577

진수의 조건에서 $-x+6>0$ $\therefore x<6$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(-x+6)=-2$에서 $-x+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

$-x+6=16$ $\therefore x=-10$

$x=-10$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=-10$

0578

밑의 조건에서 $x+1>0, x+1\neq1$

$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ ····· ㉠

$\log_{x+1}9=2$에서 $(x+1)^2=9$

$x+1=-3$ 또는 $x+1=3$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $x=2$ 답 $x=2$

0579

진수의 조건에서 $x+3>0, 2x-3>0$ $\therefore x>\frac{3}{2}$ ····· ㉠

$\log_2(x+3)=\log_2(2x-3)$에서 $x+3=2x-3$ $\therefore x=6$

$x=6$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=6$

0580

진수의 조건에서 $3x-4>0, -x+8>0$ $\therefore \frac{4}{3}<x<8$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(3x-4)=\log_{\frac{1}{5}}(-x+8)$에서 $3x-4=-x+8$

$4x=12$ $\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=3$

0581

진수의 조건에서 $x>0, x+2>0$ $\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_3 x+\log_3(x+2)=3\log_3 2$에서 $\log_3\{x(x+2)\}=\log_3 2^3$

즉, $x(x+2)=8$이므로 $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $x=2$ 답 $x=2$

0582

진수의 조건에서 $x-2>0, 7-2x>0$ $\therefore 2<x<\frac{7}{2}$ ····· ㉠

$\log_3(x-2)=\log_9(7-2x)$에서

$\log_3(x-2)=\frac{1}{2}\log_3(7-2x)$

$2\log_3(x-2)=\log_3(7-2x)$, $\log_3(x-2)^2=\log_3(7-2x)$

즉, $(x-2)^2=7-2x$이므로 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$ 답 $x=3$

0583

진수의 조건에서 $x>0, x+2>0$ $\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{4}}(x+2)$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$2\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $\log_{\frac{1}{2}}x^2=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

즉, $x^2=x+2$이므로 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $x=2$ 답 $x=2$

0584

진수의 조건에서 $x-7>0$ $\therefore x>7$ ····· ㉠

$\log_2(x-7)=\log_3(x-7)$에서 밑이 다르므로

$x-7=1$ $\therefore x=8$

$x=8$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=8$

0585

밑과 진수의 조건에서

$x+3>0, x+3\neq1, 2x+1>0, 2x+1\neq1, x>0$

$\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_{x+3}x=\log_{2x+1}x$에서

(i) $x+3=2x+1$일 때, $x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(ii) $x=1$일 때, ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(i), (ii)에 의하여 $x=1$ 또는 $x=2$ 답 $x=1$ 또는 $x=2$

0586

밑과 진수의 조건에서

$x+2>0, x+2\neq1, 3-x>0, 3-x\neq1, 2x+1>0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 또는 $2<x<3$ ····· ㉠

$\log_{x+2}(2x+1)=\log_{3-x}(2x+1)$에서

(i) $x+2=3-x$일 때

$2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(ii) $2x+1=1$일 때

$2x=0$ $\therefore x=0$

$x=0$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(i), (ii)에 의하여 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0587

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉, $\log x=1$ 또는 $\log x=2$이므로 $x=10$ 또는 $x=10^2=100$

$x=10$, $x=100$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=10$ 또는 $x=100$

0588

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_3 x)^2=\log_3 x^3+4$에서 $(\log_3 x)^2=3\log_3 x+4$

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^4=81$

$x=\frac{1}{3}$, $x=81$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

0589

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x(\log_{\frac{1}{2}} x-2)=-\log_{\frac{1}{2}} x+6$에서

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-2\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_{\frac{1}{2}} x+6$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x-6=0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

즉, $\log_{\frac{1}{2}} x=-2$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x=3$이므로

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ 또는 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$x=\frac{1}{8}$, $x=4$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=4$

0590

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log x}=x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log x^2$, $(\boxed{\text{(가) } \log x})^2=2\boxed{\text{(가) } \log x}$

$\boxed{\text{(가) } \log x}=t$로 놓으면

$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, $\boxed{\text{(가) } \log x}=0$ 또는 $\boxed{\text{(가) } \log x}=2$이므로

$x=10^0=\boxed{\text{(나) } 1}$ 또는 $x=10^2=\boxed{\text{(다) } 100}$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 (가) $\log x$ (나) 1 (다) 100

0591

진수의 조건에서 $2x-4>0$ $\therefore x>2$ ····· ㉠

$\log_2(2x-4)\le 1$에서 $\log_2(2x-4)\le\log_2 2$

$2>1$이므로 $2x-4\le 2$, $2x\le 6$ $\therefore x\le 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x\le 3$ 답 $2<x\le 3$

0592

진수의 조건에서 $1-x>0$ $\therefore x<1$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(1-x)\le -2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(1-x)\le\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 $1-x\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $1-x\ge 9$

$\therefore x\le -8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\le -8$ 답 $x\le -8$

0593

진수의 조건에서 $6x+3>0$ $\therefore x>-\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$\log_4(6x+3)>\frac{1}{2}$에서 $\log_4(6x+3)>\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$4>1$이므로 $6x+3>2$, $6x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{6}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>-\frac{1}{6}$ 답 $x>-\frac{1}{6}$

0594

$x^2+1>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_5(x^2+1)\ge 1$에서 $\log_5(x^2+1)\ge\log_5 5$

$5>1$이므로 $x^2+1\ge 5$, $x^2-4\ge 0$, $(x+2)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 2$ 답 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

0595

$x^2+3>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)<-2$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x^2+3>4$, $x^2-1>0$, $(x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>1$ 답 $x<-1$ 또는 $x>1$

0596

$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_2(x^2+x+2)<2$에서 $\log_2(x^2+x+2)<\log_2 2^2$

$2>1$이므로 $x^2+x+2<4$, $x^2+x-2<0$, $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ 답 $-2<x<1$

0597

진수의 조건에서 $2+3x>0$, $1-5x>0$

$\therefore -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{5}$ ····· ㉠

$\log_2(2+3x)>\log_2(1-5x)$에서 $2>1$이므로

$2+3x>1-5x$, $8x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{8}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{8}<x<\frac{1}{5}$ 답 $-\frac{1}{8}<x<\frac{1}{5}$

0598

진수의 조건에서 $5x-3>0$, $3x+5>0$

$\therefore x>\frac{3}{5}$ ····· ㉠

$\log_5(5x-3)\geq\log_5(3x+5)$에서 $5>1$이므로

$5x-3\geq3x+5$, $2x\geq8$

$\therefore x\geq4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq4$ 답 $x\geq4$

0599

진수의 조건에서 $3x-5>0$, $x+1>0$

$\therefore x>\frac{5}{3}$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(3x-5)\geq\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$에서 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$3x-5\leq x+1$, $2x\leq6$

$\therefore x\leq3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{5}{3}<x\leq3$ 답 $\frac{5}{3}<x\leq3$

0600

진수의 조건에서 $x+4>0$, $2-x>0$

$\therefore -4<x<2$ ····· ㉠

$\log_2(x+4)<-\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$에서

$\log_2(x+4)<\log_2(2-x)$

$2>1$이므로 $x+4<2-x$, $2x<-2$

$\therefore x<-1$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-4<x<-1$ 답 $-4<x<-1$

0601

진수의 조건에서 $x^3>0$, $x>0$

$\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_2x^3+(\log_2x)^2\leq4$에서 $3\log_2x+(\log_2x)^2\leq4$

$\log_2x=t$로 놓으면 $3t+t^2\leq4$, $t^2+3t-4\leq0$

$(t+4)(t-1)\leq0$ $\therefore -4\leq t\leq1$

즉, $-4\leq\log_2x\leq1$이므로

$\log_2 2^{-4}\leq\log_2x\leq\log_2 2$

$2>1$이므로 $\frac{1}{16}\leq x\leq2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16}\leq x\leq2$ 답 $\frac{1}{16}\leq x\leq2$

0602

진수의 조건에서 $x>0$, $x^2>0$

$\therefore x>0$ ····· ㉠

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-\log_{\frac{1}{2}}x^2\leq0$에서 $(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}x\leq0$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $t^2-2t\leq0$, $t(t-2)\leq0$

$\therefore 0\leq t\leq2$

즉, $0\leq\log_{\frac{1}{2}}x\leq2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0\leq\log_{\frac{1}{2}}x\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{4}\leq x\leq1$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\leq x\leq1$ 답 $\frac{1}{4}\leq x\leq1$

0603

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log x(\log x-4)>-3$에서 $(\log x)^2-4\log x+3>0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-4t+3>0$

$(t-1)(t-3)>0$ $\therefore t<1$ 또는 $t>3$

즉, $\log x<1$ 또는 $\log x>3$이므로

$\log x<\log10$ 또는 $\log x>\log10^3$

$10>1$이므로 $x<10$ 또는 $x>1000$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $0<x<10$ 또는 $x>1000$

답 $0<x<10$ 또는 $x>1000$

0604

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-t-2>0$, $(t+1)(t-2)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>2$

즉, $\log_{\frac{1}{3}}x<-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>2$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x>3$ 또는 $x<\frac{1}{9}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{9}$ 또는 $x>3$ 답 $0<x<\frac{1}{9}$ 또는 $x>3$

0605

진수의 조건에서 $x>$ (가) 0 ····· ㉠

$x^{\log_3x}>9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3x^{\log_3x}>\log_39x$, ((나) $\log_3x$)$^2>$ (나) $\log_3x$ $+2$

(나) $\log_3x$ $=t$로 놓으면

$t^2-t-2>0$, $(t+1)(t-2)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>2$

즉, (나) $\log_3x$ <-1 또는 (나) $\log_3x$ >2이므로

(나) $\log_3x$ $<\log_33^{-1}$ 또는 (나) $\log_3x$ $>\log_33^2$

$3>1$이므로 $x<$ (다) $\frac{1}{3}$ 또는 $x>$ (라) 9 ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

(가) 0 $<x<$ (다) $\frac{1}{3}$ 또는 $x>$ (라) 9

답 (가) 0 (나) $\log_3x$ (다) $\frac{1}{3}$ (라) 9

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 12 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 개념 05

(1) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$
$\Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ (단, $a>0, a\neq1, f(x)>0, g(x)>0$)
(2) $\log_a f(x)=\log_b f(x)$
$\Longleftrightarrow a=b$ 또는 $f(x)=1$ (단, $a>0, a\neq1, b>0, b\neq1, f(x)>0$)

0606

진수의 조건에서 $x-1>0, x>0$ $\therefore x>1$ ····· ㉠

$\log_2(x-1)+\log_4 x=\frac{1}{2}$에서 $\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}$

$2\log_2(x-1)+\log_2 x=1$, $\log_2\{(x-1)^2\cdot x\}=\log_2 2$

$x(x-1)^2=2$, $x^3-2x^2+x-2=0$

$(x-2)(x^2+1)=0$ $\therefore x=2$ ($\because x^2+1>0$)

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 2

0607

진수의 조건에서 $x-4>0, 5x+4>0$ $\therefore x>4$ ····· ㉠

$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$에서

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$, $2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$, $(x-4)^2=5x+4$

$x^2-13x+12=0$, $(x-1)(x-12)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=12$

이때 ㉠에 의하여 $x=12$ $\therefore a=12$ 답 ④

0608

진수의 조건에서 $x+3>0, (3x+1)^2>0$

$\therefore -3<x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>-\frac{1}{3}$ ····· ㉠

$\frac{1}{2}\log_2(x+3)-\log_4(3x+1)^2=-1$에서

$\frac{1}{2}\log_2(x+3)-\frac{1}{2}\log_2(3x+1)^2=\log_2\frac{1}{2}$

$\log_2(x+3)-\log_2(3x+1)^2=2\log_2\frac{1}{2}$

$\log_2\frac{x+3}{(3x+1)^2}=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{x+3}{(3x+1)^2}=\frac{1}{4}$

$4(x+3)=(3x+1)^2$, $9x^2+2x-11=0$

$(9x+11)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{11}{9}$ 또는 $x=1$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=-\frac{11}{9}$ 또는 $x=1$

0609

밑과 진수의 조건에서 $\begin{cases}(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})>0\\ \therefore x<-1-\sqrt{3} \text{ 또는 } x>-1+\sqrt{3}\end{cases}$

$4x>0, 4x\neq1, x^2+2x-2>0$ $\therefore x>-1+\sqrt{3}$ ····· ㉠

$\log_{x^2+4}(x^2+2x-2)=\log_{4x}(x^2+2x-2)$에서

(i) $x^2+4=4x$일 때, $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(ii) $x^2+2x-2=1$일 때, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

이때 ㉠에 의하여 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $1+2=3$ 답 ③

참고 밑의 조건에서 $x^2+4>0, x^2+4\neq1$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 생각하지 않아도 된다.

유형 13 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식 – $\log_a x$꼴이 반복되는 경우 개념 05

$\log_a x$ ($a>0, a\neq1$) 꼴이 반복되는 경우
(i) $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.
(ii) (i)에서 구한 해에 t 대신 $\log_a x$를 대입하여 x의 값을 구한다.

0610

진수의 조건에서 $x^2>0, x>0$ $\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log x^2-\log x\cdot\log 2x+\log 4=0$에서

$2\log x-\log x(\log 2+\log x)+\log 4=0$

$(\log x)^2+(\log 2-2)\log x-2\log 2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2+(\log 2-2)t-2\log 2=0$

$(t+\log 2)(t-2)=0$ $\therefore t=-\log 2$ 또는 $t=2$

즉, $\log x=-\log 2$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=10^2=100$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은 $\frac{1}{2}\cdot100=50$ 답 ④

0611

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log_2 2x\cdot\log_2\frac{x}{2}=3$에서 $(\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=3$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $(t+1)(t-1)=3$, $t^2-1=3$

$t^2-4=0$, $(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

즉, $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=2$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2^2=4$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 ③

0612

진수의 조건에서 $x>0, x^2>0$ $\therefore x>0$ ····· ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_{\frac{1}{2}}x^2-8=0$에서 $(\log_2 x)^2+2\log_2 x-8=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-8=0$, $(t+4)(t-2)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=2$

즉, $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=2$이므로

$x=2^{-4}$ 또는 $x=2^2$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $\alpha=2^{-4}$, $\beta=2^2$이므로

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{2^{-4}}2^2+\log_{2^2}2^{-4}$

$=-\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

0613

밑과 진수의 조건에서 $x>0, x\neq1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}$이므로 $\log_3 x=2\log_x 3+1$에서

$\log_3 x=\dfrac{2}{\log_3 x}+1$

$\log_3 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 $t=\dfrac{2}{t}+1$

$t^2-t-2=0, (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$ … ❶

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3^2=9$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{3}, \beta=9$ … ❷

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\beta=3+9=12$ … ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $\log_3 x=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	50 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{1}{\alpha}+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $\log_a x=t$로 치환하여 구한 방정식의 해는 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

0614

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$5^{\log x}=x^{\log 5}$이므로 $5^{\log x}\cdot x^{\log 5}-3(5^{\log x}+x^{\log 5})+5=0$에서

$5^{\log x}\cdot5^{\log x}-3(5^{\log x}+5^{\log x})+5=0, (5^{\log x})^2-6\cdot5^{\log x}+5=0$

$5^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+5=0, (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉, $5^{\log x}=1$ 또는 $5^{\log x}=5$이므로 $\log x=0$ 또는 $\log x=1$

$\therefore x=10^0=1$ 또는 $x=10^1=10$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$1+10=11$

답 11

유형 14 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식 – 연립방정식 개념 05

$\log_a x, \log_b y\ (a>0, a\neq1, b>0, b\neq1)$에 대한 연립방정식

⇨ $\log_a x=X, \log_b y=Y$로 치환하여 X, Y에 대한 연립방정식을 푼다.

0615

밑의 조건에서 $x>0, x\neq1, y>0, y\neq1$ …… ㉠

$\begin{cases}\log_x 4-\log_y 2=2\\ \log_x 16+\log_y 8=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}2\log_x 2-\log_y 2=2\\ 4\log_x 2+3\log_y 2=-1\end{cases}$

$\log_x 2=X, \log_y 2=Y$로 놓으면 $\begin{cases}2X-Y=2 & \cdots\cdots ㉡\\ 4X+3Y=-1 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉡에서 $Y=2X-2$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $4X+3(2X-2)=-1$

$10X=5 \quad \therefore X=\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉣에 대입하면 $Y=-1$

즉, $\log_x 2=\dfrac{1}{2}, \log_y 2=-1$이므로 $x^{\frac{1}{2}}=2, y^{-1}=2$

$\therefore x=4, y=\dfrac{1}{2}$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

$\therefore xy=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$

답 2

0616

진수의 조건에서 $x>0, y>0$ …… ㉠

$\log_5 x\cdot\log_3 y=\dfrac{\log x}{\log 5}\cdot\dfrac{\log y}{\log 3}=\dfrac{\log x}{\log 3}\cdot\dfrac{\log y}{\log 5}$

$=\log_3 x\cdot\log_5 y$

이므로 주어진 방정식은

$\begin{cases}\log_3 x+\log_5 y=4\\ \log_3 x\cdot\log_5 y=3\end{cases}$

$\log_3 x=X, \log_5 y=Y$로 놓으면 $\begin{cases}X+Y=4 & \cdots\cdots ㉡\\ XY=3 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉡에서 $Y=4-X$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $X(4-X)=3$

$X^2-4X+3=0, (X-1)(X-3)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=3$

㉣에서 $X=1$일 때 $Y=3$, $X=3$일 때 $Y=1$

즉, $\log_3 x=1, \log_5 y=3$ 또는 $\log_3 x=3, \log_5 y=1$이므로

$x=3, y=5^3=125$ 또는 $x=3^3=27, y=5$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $x=\alpha, y=\beta$에서 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=27, \beta=5$

$\therefore \alpha+\beta=27+5=32$

답 ⑤

0617

조건 (가)에서 $ab=100=10^2$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log ab=2 \quad \therefore \log a+\log b=2$

조건 (나)에서 $\log a\cdot\log b=-8$이므로 주어진 방정식은

$\begin{cases}\log a+\log b=2\\ \log a\cdot\log b=-8\end{cases}$

$\log a=X, \log b=Y$로 놓으면 $\begin{cases}X+Y=2 & \cdots\cdots ㉠\\ XY=-8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=2-X$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $X(2-X)=-8$

$X^2-2X-8=0, (X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

㉢에서 $X=-2$ 일 때 $Y=4$, $X=4$일 때 $Y=-2$

즉, $\log a=-2, \log b=4$ 또는 $\log a=4, \log b=-2$이므로

$a=10^{-2}, b=10^4$ 또는 $a=10^4, b=10^{-2}$

따라서 $a<b$에서 $a=10^{-2}, b=10^4$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{10^4}{10^{-2}}=10^6$

답 ④

유형 15 양변에 로그를 취하는 방정식 개념 05

지수에 로그가 있거나 밑을 같게 할 수 없을 때는 양변에 로그를 취하여 방정식을 푼다.

0618

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log x}=10000x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log 10000x^3$

$\log x\cdot\log x=\log 10000+\log x^3$

$(\log x)^2-3\log x-4=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $\log x=-1$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=10^{-1}$ 또는 $x=10^4$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $\alpha<\beta$에서 $\alpha=10^{-1}$, $\beta=10^4$이므로

$\log\dfrac{\beta}{\alpha}=\log\dfrac{10^4}{10^{-1}}=\log 10^5=5$ 답 5

0619

$2^{x-1}=3^{x+1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(x-1)\log 2=(x+1)\log 3$

$(\log 2-\log 3)x=\log 3+\log 2$

$\therefore x=\dfrac{\log 3+\log 2}{\log 2-\log 3}=\dfrac{\log 6}{\log 2-\log 3}$ 답 ⑤

0620

$5^{2x}=2^{4-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$2x\log 5=(4-2x)\log 2$, $2x(\log 5+\log 2)=4\log 2$

이때 $\log 5+\log 2=\log 10=1$이므로

$2x=4\log 2$ $\therefore x=2\log 2=\log 4$

따라서 $\alpha=\log 4$이므로 $10^{\alpha}=10^{\log 4}=4$ 답 ④

0621

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log_3 x}=27x^2$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^2$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 27+\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3^3=27$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$\dfrac{1}{3}\cdot 27=9$ 답 ⑤

0622

$(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2\cdot\log 2x=\log 3\cdot\log 3x$

$\log 2(\log 2+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$(\log 2)^2+\log 2\cdot\log x=(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x$

$(\log 3-\log 2)\log x=(\log 2)^2-(\log 3)^2$

$\log x=\dfrac{-(\log 3+\log 2)(\log 3-\log 2)}{\log 3-\log 2}$

$=-(\log 3+\log 2)=-\log 6=\log\dfrac{1}{6}$

$\therefore x=\dfrac{1}{6}$ 답 $x=\dfrac{1}{6}$

발전 유형 16 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 활용 개념 05

방정식 $(\log_a x)^2+p\log_a x+q=0$ $(a>0, a\neq 1)$의 근이 α, β일 때

⇨ $\log_a x=t$로 치환하면 이차방정식 $t^2+pt+q=0$의 근은 $\log_a\alpha$, $\log_a\beta$이다.

0623

$(\log_2 8x)^2-4\log_2 16x=0$에서

$(\log_2 8+\log_2 x)^2-4(\log_2 16+\log_2 x)=0$

$(3+\log_2 x)^2-4(4+\log_2 x)=0$ ····· ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $(3+t)^2-4(4+t)=0$

$\therefore t^2+2t-7=0$ ····· ㉡

방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉡의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-2$

따라서 $\log_2\alpha\beta=-2$이므로 $\alpha\beta=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ 답 ②

0624

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=9$

$\log_3 x-3\log_x 3+a=0$에서 $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}$이므로

$\log_3 x-\dfrac{3}{\log_3 x}+a=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t-\dfrac{3}{t}+a=0$

$\therefore t^2+at-3=0$ ··· ❶

이 방정식의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=-a$ ··· ❷

$\log_3\alpha\beta=-a$, $\log_3 9=-a$

$\therefore a=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 치환하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0625

$(\log x)^2+\log x^2-1=0$에서

$(\log x)^2+2\log x-1=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2+2t-1=0$

이 방정식의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=-2$, $\log\alpha\cdot\log\beta=-1$

$$\therefore \frac{1}{(\log\alpha)^2}+\frac{1}{(\log\beta)^2}$$
$$=\frac{(\log\alpha)^2+(\log\beta)^2}{(\log\alpha)^2(\log\beta)^2}$$
$$=\frac{(\log\alpha+\log\beta)^2-2\log\alpha\cdot\log\beta}{(\log\alpha\cdot\log\beta)^2}$$
$$=\frac{(-2)^2-2\cdot(-1)}{(-1)^2}=6$$

답 ③

0626

$(\log_2 x)^3+\log_2 x^3=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$에서

$(\log_2 x)^3+3\log_2 x=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$ …… ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^3+3t=4t^2+t$

$\therefore t^3-4t^2+2t=0$ …… ㉡

방정식 ㉠의 세 근을 α, β, γ라 하면 방정식 ㉡의 세 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$, $\log_2\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta+\log_2\gamma=4$

따라서 $\log_2\alpha\beta\gamma=4$이므로 주어진 방정식의 세 근의 곱은

$\alpha\beta\gamma=2^4=16$

답 ⑤

Lecture

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ (3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0627

이차방정식 $x^2-x\log a+\log a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-\log a)^2-4(\log a+3)=0$

$(\log a)^2-4\log a-12=0$

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=6$

즉, $\log a=-2$ 또는 $\log a=6$이므로

$a=10^{-2}$ 또는 $a=10^6$

따라서 모든 양수 a의 값의 곱은 $10^{-2}\cdot10^6=10^4$

답 ④

0628

$(\log_3 x)\left(\log_3\frac{27}{x}\right)=\frac{a}{8}$에서 $(\log_3 x)(\log_3 27-\log_3 x)=\frac{a}{8}$

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+\frac{a}{8}=0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+\frac{a}{8}=0$ …… ㉡

이때 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot\frac{a}{8}>0$, $9-\frac{a}{2}>0$

$\therefore a<18$

답 ④

0629

$\log_5 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-at+a+8=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 작은 양수, 즉 $0<x<1$이면 $\log_5 x<0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 모두 0보다 작아야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4(a+8)\geq0$, $a^2-4a-32\geq0$

$(a+4)(a-8)\geq0$ $\therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq8$

(ii) (두 근의 합)<0이므로 $a<0$

(iii) (두 근의 곱)>0이므로 $a+8>0$ $\therefore a>-8$

(i), (ii), (iii)에서 $-8<a\leq-4$

따라서 정수 a의 개수는 -7, -6, -5, -4의 4이다.

답 ③

Lecture

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 조건

⇨ $D\geq0$, (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}>0$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}>0$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건

⇨ $D\geq0$, (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}<0$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건

⇨ (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}<0$ ⟶ $\frac{c}{a}<0$에서 $ac<0$이므로 항상 $D=b^2-4ac>0$이다.

유형 17 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

개념 06

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 다음 진수를 비교한다.

이때 로그의 밑과 진수의 조건 및 부등호의 방향에 주의한다.

⇨ 부등식 $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $(a>0, a\neq1)$의 해는

(1) $a>1$일 때, $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x)>g(x)$의 공통 범위

(2) $0<a<1$일 때, $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x)<g(x)$의 공통 범위

0630

진수의 조건에서 $x-1>0$, $5-x^2>0$

$x>1$, $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\therefore 1<x<\sqrt{5}$ …… ㉠

$\log_2(x-1)\geq\log_4(5-x^2)$에서 $\log_2(x-1)\geq\frac{1}{2}\log_2(5-x^2)$

$2\log_2(x-1)\geq\log_2(5-x^2)$, $\log_2(x-1)^2\geq\log_2(5-x^2)$

$2>1$이므로 $(x-1)^2\geq5-x^2$, $x^2-x-2\geq0$

$(x+1)(x-2)\geq0$ $\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\leq x<\sqrt{5}$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{5}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9$

답 ④

0631

진수의 조건에서 $2x-1>0$, $x-\frac{1}{2}>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+1>\log_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+1>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}(2x-1)^2>\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{4}(2x-1)^2<x-\frac{1}{2}$

$(2x-1)^2<4x-2$, $4x^2-8x+3<0$

$(2x-1)(2x-3)<0$ $\therefore \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ 답 ②

0632

진수의 조건에서 $f(x)>0$, $x-2>0$

$0<x<8$, $x>2$ $\therefore 2<x<8$ ····· ㉠

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\le 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-2)\le 0$, $\log_3 f(x)\le\log_3(x-2)$

$3>1$이므로 $f(x)\le x-2$

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)\le x-2$의 해는

$x\le -2$ 또는 $x\ge 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5\le x<8$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 $5+6+7=18$ 답 18

0633

진수의 조건에서 $x+3>0$, $1-x>0$ $\therefore -3<x<1$ ····· ㉠

$\log_a(x+3)-\log_a(1-x)-1>0$에서

$\log_a(x+3)>\log_a(1-x)+1$, $\log_a(x+3)>\log_a a(1-x)$

(i) $a>1$일 때

$x+3>a(1-x)$, $(a+1)x>a-3$

$\therefore x>\frac{a-3}{a+1}$ ($\because a+1>0$) ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 주어진 부등식의 해 $-3<x<-2$가 되도록 하는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때

$x+3<a(1-x)$, $(a+1)x<a-3$

$\therefore x<\frac{a-3}{a+1}$ ($\because a+1>0$) ····· ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위가 주어진 부등식의 해 $-3<x<-2$이어야 하므로 $\frac{a-3}{a+1}=-2$

$a-3=-2(a+1)$, $3a=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$은 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 양수 a의 값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

0634

(i) $4^x+2^{x+2}-12\le 0$에서 $(2^x)^2+4\cdot 2^x-12\le 0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2+4t-12\le 0$, $(t+6)(t-2)\le 0$

$\therefore t\le 2$ ($\because t>0$)

즉, $2^x\le 2$이고 $2>1$이므로 $x\le 1$

(ii) $2\log_2(x+1)\le 2+\log_2(x+4)$의 진수의 조건에서

$x+1>0$, $x+4>0$ $\therefore x>-1$ ····· ㉠

$2\log_2(x+1)\le 2+\log_2(x+4)$에서

$\log_2(x+1)^2\le\log_2 4(x+4)$

$2>1$이므로 $(x+1)^2\le 4(x+4)$

$x^2+2x+1\le 4x+16$, $x^2-2x-15\le 0$

$(x+3)(x-5)\le 0$ $\therefore -3\le x\le 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x\le 5$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$-1<x\le 1$ 답 $-1<x\le 1$

0635

진수의 조건에서 $x-1>0$ $\therefore x>1$ ····· ㉠

$|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)|<2$에서 $-2<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<2$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{4}<x-1<4$ $\therefore \frac{5}{4}<x<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{5}{4}<x<5$

이때 해가 $\frac{5}{4}<x<5$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-5)<0$ $\therefore 2x^2-\frac{25}{2}x+\frac{25}{2}<0$

이 부등식이 $2x^2+px+q<0$과 같으므로

$p=-\frac{25}{2}$, $q=\frac{25}{2}$ $\therefore q-p=\frac{25}{2}-\left(-\frac{25}{2}\right)=25$ 답 25

Lecture

x^2의 계수가 1이고

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$인 이차부등식 ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$인 이차부등식 ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

유형 18 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – 진수에 로그가 있는 경우 개념 06

부등식 $\log_a(\log_b x)>k$ $(a>0, a\ne 1, b>0, b\ne 1)$에서

(1) 진수의 조건 ⇨ $x>0$, $\log_b x>0$

(2) $a>1$일 때 ⇨ $\log_b x>a^k$

$0<a<1$일 때 ⇨ $\log_b x<a^k$

0636

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_3 x>0$ $\therefore x>1$ ····· ㉠

$\log_2(\log_3 x)<2$에서 $\log_2(\log_3 x)<\log_2 4$

$2>1$이므로 $\log_3 x<4$ $\therefore x<3^4=81$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<81$

따라서 정수 x의 개수는 $81-1-1=79$ 답 ③

0637

(i) 집합 A의 진수의 조건에서

$x>0, \log_2 x>0 \quad \therefore x>1$ ····· ㉠

$\log_5(\log_2 x)\le 1$에서 $\log_5(\log_2 x)\le\log_5 5$

$5>1$이므로 $\log_2 x\le 5 \quad \therefore x\le 2^5=32$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $A=\{x\mid 1<x\le 32\}$

(ii) 집합 B의 진수의 조건에서

$x>0, \log_6 x>0 \quad \therefore x>1$ ····· ㉢

$\log_3(\log_6 x)>0$에서 $\log_3(\log_6 x)>\log_3 1$

$3>1$이므로 $\log_6 x>1 \quad \therefore x>6$ ····· ㉣

㉢, ㉣에서 $B=\{x\mid x>6\}$

(i), (ii)에서 $A\cap B=\{x\mid 6<x\le 32\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 19 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우

개념 06

$\log_a x$ ($a>0, a\ne 1$) 꼴이 반복되는 경우

(i) $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

(ii) (i)에서 구한 해에 t 대신 $\log_a x$를 대입하여 x의 값의 범위를 구한다.

0638

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 8x^2\le 0$에서 $(\log_2 x)^2-(\log_2 8+\log_2 x^2)\le 0$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3\le 0, (t+1)(t-3)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 3$

즉, $-1\le\log_2 x\le 3$이므로 $\log_2 2^{-1}\le\log_2 x\le\log_2 2^3$

$2>1$이므로 $\frac{1}{2}\le x\le 8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}\le x\le 8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=8$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ 답 ⑤

0639

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면 $(1+t)(a-t)>0$

$\therefore (t+1)(t-a)<0$ ····· ㉠

이때 부등식의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$이고 $3>1$이므로

$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9, -1<t<2$

$\therefore (t+1)(t-2)<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$ 답 2

다른 풀이 부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$이므로 방정식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)=0$의 해는 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$이다.

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=a$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^a$이므로

$3^a=9$에서 $a=2$이다.

0640

진수의 조건에서 $\frac{4}{x}>0, \frac{x}{8}>0 \quad \therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{8}\ge -2$에서

$(\log_{\frac{1}{2}}4-\log_{\frac{1}{2}}x)(\log_{\frac{1}{2}}x-\log_{\frac{1}{2}}8)\ge -2$

$(-2+\log_2 x)(-\log_2 x+3)\ge -2$

$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)\le 2$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $(t-2)(t-3)\le 2$

$t^2-5t+4\le 0, (t-1)(t-4)\le 0$

$\therefore 1\le t\le 4$

즉, $1\le\log_2 x\le 4$이므로 $\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 2^4$

$2>1$이므로 $2\le x\le 16$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\le x\le 16$

따라서 정수 x의 개수는 $16-2+1=15$ 답 ④

0641

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_5 x)(\log_{\frac{1}{5}}5x)\ge -6$에서

$(\log_5 x)(-\log_5 5x)\ge -6$

$(\log_5 x)(1+\log_5 x)\le 6$

$(\log_5 x)^2+\log_5 x-6\le 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+t-6\le 0$

$(t+3)(t-2)\le 0 \quad \therefore -3\le t\le 2$

즉, $-3\le\log_5 x\le 2$이므로 $\log_5 5^{-3}\le\log_5 x\le\log_5 5^2$

$5>1$이므로 $\frac{1}{125}\le x\le 25$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{125}\le x\le 25$

따라서 실수 x의 최댓값은 25이다. 답 ③

유형 20 양변에 로그를 취하는 부등식

개념 06

지수에 로그가 있거나 밑을 같게 할 수 없을 때는 양변에 로그를 취하여 부등식을 푼다.

0642

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log_4 x}<16x$의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4 x^{\log_4 x}<\log_4 16x, \log_4 x\cdot\log_4 x<\log_4 16+\log_4 x$

$(\log_4 x)^2-\log_4 x-2<0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0 \quad \therefore -1<t<2$

즉, $-1<\log_4 x<2$이므로 $\log_4 4^{-1}<\log_4 x<\log_4 4^2$

$4>1$이므로 $\frac{1}{4}<x<16$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<16$

따라서 정수 x의 개수는 1, 2, 3, …, 15의 15이다. 답 ⑤

0643

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log x}\le\sqrt{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\le\log\sqrt{x}$, $\log x\cdot\log x\le\frac{1}{2}\log x$

$2(\log x)^2-\log x\le0$

$\log x=t$로 놓으면 $2t^2-t\le0$

$t(2t-1)\le0$ $\therefore 0\le t\le\frac{1}{2}$

즉, $0\le\log x\le\frac{1}{2}$이므로 $\log 1\le\log x\le\log 10^{\frac{1}{2}}$

$10>1$이므로 $1\le x\le\sqrt{10}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x\le\sqrt{10}$

이때 $3<\sqrt{10}<4$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 3이다. 답 ③

0644

$2^{x+1}>3^{x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(x+1)\log 2>(x-1)\log 3$, $x(\log 2-\log 3)>-\log 2-\log 3$

$\log 2<\log 3$에서 $\log 2-\log 3<0$이므로

$x<\dfrac{\log 2+\log 3}{\log 3-\log 2}$

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$에서

$\log 2+\log 3=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log 3-\log 2=0.4771-0.3010=0.1761$

$\therefore x<\dfrac{0.7781}{0.1761}=4.\times\times\times$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ③

0645

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>4x^3$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$이므로 $x^{-\log_2 x}>4x^3$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{-\log_2 x}>\log_2 4x^3$, $-\log_2 x\cdot\log_2 x>\log_2 4+\log_2 x^3$

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x+2<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+3t+2<0$

$(t+2)(t+1)<0$ $\therefore -2<t<-1$

즉, $-2<\log_2 x<-1$이므로 $\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2^{-1}$

$2>1$이므로 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=4+2=6$ 답 ④

참고 $x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>4x^3$에서 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취해서 풀어도 된다.

이때 $\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\log_{\frac{1}{2}}4x^3$으로 부등호의 방향이 바뀜에 주의해야 한다.

유형 21 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 활용 개념 06

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⇨ $D>0$

(2) 이차방정식이 실근을 갖지 않는다. ⇨ $D<0$

(3) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립한다. ⇨ $a>0$, $D<0$

0646

진수의 조건에서 $a>0$ ····· ㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2+\log_2 a)^2-1\ge0$, $(\log_2 a)^2+4\log_2 a+3\ge0$

$\log_2 a=t$로 놓으면 $t^2+4t+3\ge0$

$(t+3)(t+1)\ge0$ $\therefore t\le-3$ 또는 $t\ge-1$

즉, $\log_2 a\le-3$ 또는 $\log_2 a\ge-1$이므로

$\log_2 a\le\log_2 2^{-3}$ 또는 $\log_2 a\ge\log_2 2^{-1}$

$2>1$이므로 $a\le\frac{1}{8}$ 또는 $a\ge\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a\le\frac{1}{8}$ 또는 $a\ge\frac{1}{2}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

0647

진수의 조건에서 $a>0$ ····· ㉠

모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $3x^2-2(\log_3 a)x+\log_3 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(\log_3 a)^2-3\log_3 a<0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $t^2-3t<0$

$t(t-3)<0$ $\therefore 0<t<3$

즉, $0<\log_3 a<3$이므로 $\log_3 1<\log_3 a<\log_3 3^3$

$3>1$이므로 $1<a<27$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<a<27$

따라서 자연수 a의 개수는 $27-1-1=25$ 답 ②

0648

$x^{\log x}>(100x)^k$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}>\log(100x)^k$

$\log x\cdot\log x>k(\log 100+\log x)$

$(\log x)^2-k(2+\log x)>0$ ··· ❶

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-k(2+t)>0$

$\therefore t^2-kt-2k>0$ ··· ❷

이때 모든 실수 t에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식

$t^2-kt-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+8k<0$, $k(k+8)<0$

$\therefore -8<k<0$ ··· ❸

따라서 정수 k의 최댓값은 $M=-1$, 최솟값은 $m=-7$이므로

$Mm=-1\cdot(-7)=7$ ··· ❹

답 7

4 로그함수

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 양변에 상용로그를 취하여 정리할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 부등식을 치환할 수 있다.	20 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ Mm의 값을 구할 수 있다.	20 %

0649

진수의 조건에서 $ax^2>0$ $\therefore a>0$ ····· ㉠

$x>0$이므로 $(\log_2 x)^2 \geq \log_2 ax^2$에서

$(\log_2 x)^2 \geq \log_2 a+2\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2 \geq \log_2 a+2t$, $t^2-2t-\log_2 a \geq 0$

이때 모든 실수 t에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2t-\log_2 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+\log_2 a \leq 0$, $\log_2 a \leq -1$, $\log_2 a \leq \log_2 2^{-1}$

$2>1$이므로 $a \leq \frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a \leq \frac{1}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ②

발전 유형 22 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용 개념 05, 06

(i) 처음의 양 a에서 매시간마다 p배가 될 때, n시간 후의 양은 ap^n임을 이용하여 주어진 조건에 맞게 방정식 또는 부등식을 세운다.
(ii) 양변에 상용로그를 취하여 그 해를 구한다.

0650

올해 반도체의 생산량을 a라 하고, 생산량을 매년 x %씩 증가시켜 20년 후에 올해 생산량의 2배가 된다고 하면

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^{20}=2a$, $\left(1+\frac{x}{100}\right)^{20}=2$

양변에 상용로그를 취하면 $20\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\log 2}{20}=\frac{0.300}{20}=0.015$

즉, $\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\log 1.035$이므로

$1+\frac{x}{100}=1.035$, $\frac{x}{100}=0.035$ $\therefore x=3.5$

따라서 이 회사에서는 생산량을 매년 3.5 %씩 증가시켜야 한다. 답 ④

0651

신호의 주파수 대역폭이 B로 일정하다고 하자.

신호잡음전력비가 a일 때의 신호의 최대 전송 속도를 C_1이라 하면

$C_1=B\log_2(1+a)$

신호잡음전력비가 $33a$일 때의 신호의 최대 전송 속도를 C_2라 하면

$C_2=B\log_2(1+33a)$

이때 신호잡음전력비를 a에서 $33a$로 높였을 때 신호의 최대 전송 속도가 2배가 되었으므로 $C_2=2C_1$

$B\log_2(1+33a)=2B\log_2(1+a)$에서

$\log_2(1+33a)=\log_2(1+a)^2$

즉, $1+33a=(1+a)^2$이므로 $1+33a=1+2a+a^2$

$a^2-31a=0$, $a(a-31)=0$

$\therefore a=31$ ($\because a>0$) 답 31

0652

골동품의 올해 가격을 a원이라 하면 n년 후의 가격은

$a(1+0.08)^n$(원)이고 n년 후의 가격이 올해의 2배 이상이어야 하므로

$a(1+0.08)^n \geq 2a$, $1.08^n \geq 2$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.08 \geq \log 2$

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$에서

$\log 1.08=\log\frac{2^2\times 3^3}{10^2}=2\log 2+3\log 3-2$

$=2\times 0.3010+3\times 0.4771-2=0.0333$

$\therefore n \geq \frac{\log 2}{\log 1.08}=\frac{0.3010}{0.0333}=9.0\times\times\times$

따라서 최소 10년 후부터 가격이 올해의 2배 이상이 된다.

답 10년

0653

현재 오염도가 50인 하수의 n시간 후의 오염도는 $50(1-0.2)^n$이고 n시간 후의 오염도가 10 이하이어야 하므로

$50(1-0.2)^n \leq 10$, $5\times 0.8^n \leq 1$

양변에 상용로그를 취하면 $\log 5+\log 0.8^n \leq \log 1$

$\log\frac{10}{2}+n\log\frac{8}{10} \leq 0$, $1-\log 2+n(3\log 2-1) \leq 0$

$n(3\log 2-1) \leq \log 2-1$

이때 $3\log 2-1<0$이므로

$n \geq \frac{1-\log 2}{1-3\log 2}=\frac{1-0.3010}{1-3\times 0.3010}=\frac{0.6990}{0.0970}=7.2\times\times\times$

따라서 최소한 8시간을 정화시켜야 오염도 10 이하의 물로 정화된다.

답 8시간

STEP 3 내신 마스터

0654

유형 01 로그함수의 함숫값

|전략| $(f\circ g)(x)=2x$에 $x=2$를 대입해 본다.

$(f\circ g)(x)=2x$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=2\cdot 2=4$

이때 $f(x)=\log_2(x+1)$에서

$f(g(2))=\log_2\{g(2)+1\}$이므로

$4=\log_2\{g(2)+1\}$, $g(2)+1=2^4=16$

$\therefore g(2)=16-1=15$ 답 ②

0655

유형 01 로그함수의 함숫값

|전략| $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

$f^{-1}(4)=a$로 놓으면 $f(a)=4$

$f(x)=\log_3(x^3+17)$이므로 $\log_3(a^3+17)=4$

$a^3+17=3^4$, $a^3=81-17=64$

a는 실수이므로 $a=4$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(4)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(4))=f^{-1}(4)=4$ 답 ④

0656

유형 03 로그함수의 그래프 위의 점

|전략| 네 점 A, B, C, D의 좌표를 차례로 구해 본다.

점 A의 x좌표가 2이므로 $y=\log_2 2=1$ $\therefore$ A(2, 1)

점 B의 x좌표가 2이므로 $y=\log_{\sqrt{2}}2=2$ $\therefore$ B(2, 2)

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 2이고

$\log_2 x=2$에서 $x=4$ $\therefore$ C(4, 2)

또, 점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표와 같으므로 4이고

$y=\log_{\sqrt{2}}4=4$ $\therefore$ D(4, 4)

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=1+2+2=5$ 답 ②

0657

유형 04 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

|전략| $0<a<1$일 때, 함수 $y=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

ㄱ. $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면 $0<a<1$이므로

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$ $\therefore 0<\log_a b<1$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\log_a b<1$이므로 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}>1$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\log_b a>1$이므로

$\log_b \dfrac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a<0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0658

유형 05 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 정삼각형의 한 꼭짓점인 점 B에서 선분 AC에 수선의 발을 그어 본다.

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 점 A와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하므로 두 점 A, C의 x좌표를 t라 하면

A$(t,\ \log_2 4t)$, C$(t,\ \log_2 t)$

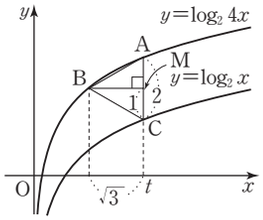
$\therefore \overline{AC}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2 \dfrac{4t}{t}=\log_2 4=2$

즉, 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

$\overline{CM}=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$



따라서 점 B는 점 C를 x축의 방향으로 $-\sqrt{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

B$(t-\sqrt{3},\ \log_2 t+1)$

이때 점 B는 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 점이므로

$\log_2 t+1=\log_2 4(t-\sqrt{3})$

$\log_2 t+\log_2 2=\log_2 4(t-\sqrt{3})$

$\log_2 2t=\log_2 4(t-\sqrt{3})$

$2t=4(t-\sqrt{3})$, $t=2t-2\sqrt{3}$ $\therefore t=2\sqrt{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $(2\sqrt{3}-\sqrt{3},\ \log_2 2\sqrt{3}+1)$, 즉 $(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ 답 ③

0659

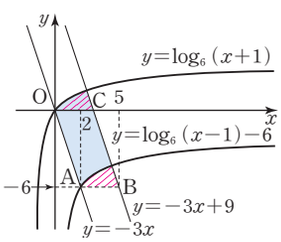
유형 06 로그함수의 그래프와 도형의 넓이

|전략| 그래프의 평행이동을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

$y=\log_6(x-1)-6$의 그래프는 $y=\log_6(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

또, 직선 $y=-3x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동해도 직선 $y=-3x$이고, 직선 $y=-3x+9$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동해도 직선 $y=-3x+9$이다.

즉, 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.



원점 O를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점이 A이므로

A$(2,\ -6)$

또, 점 C$(3, 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점이 B이므로

B$(5,\ -6)$

즉, 평행사변형 OABC의 넓이는 $3\cdot 6=18$

따라서 구하는 도형의 넓이는 18이다. 답 ⑤

0660

유형 07 로그함수의 역함수

|전략| 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 이용한다.

함수 $y=\log_a x+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\log_a x+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 1, 2이므로 함수 $y=\log_a x+k$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지난다.

$1=\log_a 1+k$에서 $k=1$

$2=\log_a 2+k=\log_a 2+1$에서

$\log_a 2=1$ $\therefore a=2$

$\therefore a+k=2+1=3$ 답 ③

0661

유형 08 함수의 최대·최소 – $y=\log_a f(x)$ 꼴

|전략| $f(x)=a(x+2)^2+2$로 놓고 함수 $f(x)$의 최대, 최소를 구한다.

$y=\log_{\frac{1}{2}}\{a(x+2)^2+2\}$에서 $f(x)=a(x+2)^2+2$로 놓으면

$a<0$이므로 $-3\le x\le -\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최대이고, $x=-\frac{1}{2}$에서 최소이다.

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $f(x)$의 값이 최소일 때 y의 값은 최대이다.

즉, 주어진 함수는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 3을 가지므로

$3=\log_{\frac{1}{2}}\left\{a\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+2\right\}$, $3=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{4}a+2\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{4}a+2$, $\frac{9}{4}a=-\frac{15}{8}$ $\quad\therefore a=-\frac{5}{6}$

또, 주어진 함수는 $x=-2$에서 최솟값 m을 가지므로

$m=\log_{\frac{1}{2}}2$ $\quad\therefore m=-1$

$\therefore a+m=-\frac{5}{6}+(-1)=-\frac{11}{6}$ 답 ①

0662

유형 09 함수의 최대·최소 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우

|전략| $\log x$와 $\log y$를 각각 치환한다.

$\log x=X$, $\log y=Y$로 놓으면 $x\ge 10$, $y\ge 10$이므로

$X\ge 1$, $Y\ge 1$ …… ㉠

또, $xy=10000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log xy=\log 10000$, $\log x+\log y=4$

$\therefore X+Y=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $X\ge 1$, $Y=4-X\ge 1$이므로 $1\le X\le 3$

$\therefore f(x,\ y)=\log x\cdot\log y+\log xy$

$=XY+X+Y$

$=X(4-X)+4$

$=-X^2+4X+4$

$=-(X-2)^2+8$

따라서 주어진 식은 $X=2$일 때 최댓값 8, $X=1$ 또는 $X=3$일 때 최솟값 7을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$8+7=15$ 답 ②

0663

유형 12 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

|전략| $\log_a f(x)=\log_a g(x)$이면 $f(x)=g(x)$임을 이용한다.

진수와 밑의 조건에서 $x>0$, $k>0$, $k\ne 1$

$\log_6\{\log_3(\log_k x)\}=0$에서

$\log_3(\log_k x)=1$

$\log_3(\log_k x)=1$에서 $\log_k x=3$

$\log_k x=3$에서 $x=k^3$

이때 주어진 방정식의 해가 $x=64$이므로

$k^3=64=4^3$

$\therefore k=4$ ($\because k$는 실수) 답 ③

0664

유형 15 양변에 로그를 취하는 방정식

|전략| 지수에 로그가 있을 때는 양변에 밑이 같은 로그를 취한 다음 방정식을 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}=\frac{8}{x^2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{8}{x^2}$, $\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 8-\log_2 x^2$

$x>0$이므로 $(\log_2 x)^2+2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉, $\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-3}=\frac{1}{8}$ 또는 $x=2^1=2$

이것은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $\alpha<\beta$에서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=2$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\beta=8+2=10$ 답 ①

0665

유형 16 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 활용

|전략| 밑을 같게 한 다음 치환을 이용하여 방정식을 푼다.

밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\ne 1$

$\log_9 x^2-\log_x 27-4=0$에서

$\log_{3^2} x^2-\log_x 3^3-4=0$, $\log_3 x-3\log_x 3-4=0$

이때 $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$이므로 $\log_3 x-\frac{3}{\log_3 x}-4=0$

$\log_3 x=t$ ($t\ne 0$)로 놓으면 $t-\frac{3}{t}-4=0$

($x\ne 1$이므로 $t=\log_3 x\ne 0$)

$\therefore t^2-4t-3=0$

이 방정식의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4$, $\log_3\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha\beta=3^4=81$ 답 ⑤

참고 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(-3)=7>0$이고 $t\ne 0$이므로 밑과 진수의 조건을 만족시킨다.

0666

유형 17 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

|전략| $|x|\le a$ $(a>0)$이면 $-a\le x\le a$이다.

진수의 조건에서 $x^2>0$, $|x|>0$ $\quad\therefore x\ne 0$ …… ㉠

이때 $x^2=|x|^2$이므로 $\log_2 x^2-\log_2|x|\le 3$에서

$\log_2|x|^2-\log_2|x|\le 3$, $2\log_2|x|-\log_2|x|\le 3$

$\log_2|x|\le 3$

$2>1$이므로 $|x|\le 2^3=8$

$\therefore -8\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-8\le x<0$ 또는 $0<x\le 8$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 -8, -7, …, -1, 1, …, 7, 8의 16이다. 답 ④

0667

유형 **20** 양변에 로그를 취하는 부등식

|전략| 주어진 부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취한 다음 방정식을 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x}>\frac{x}{729}$에서 $x^{-\log_3 x}>\frac{x}{729}$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{-\log_3 x}>\log_3 \frac{x}{3^6}$, $-(\log_3 x)^2>\log_3 x-\log_3 3^6$

$(\log_3 x)^2+\log_3 x-6<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2+t-6<0$

$(t+3)(t-2)<0$ $\therefore -3<t<2$

즉, $-3<\log_3 x<2$이므로 $\log_3 3^{-3}<\log_3 x<\log_3 3^2$

$3>1$이므로 $\frac{1}{27}<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27}<x<9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $8+1=9$이다. 답 ③

0668

유형 **21** 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 활용

|전략| 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 (판별식)>0임을 이용한다.

진수의 조건에서 $a>0$ …… ㉠

또, x^2의 계수가 0이 아니어야 하므로

$3+\log_2 a\neq 0$ $\therefore a\neq\frac{1}{8}$ …… ㉡

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_2 a)^2-(3+\log_2 a)>0$

$(\log_2 a)^2+\log_2 a-2>0$

$\log_2 a=t$로 놓으면 $t^2+t-2>0$

$(t+2)(t-1)>0$ $\therefore t<-2$ 또는 $t>1$

즉, $\log_2 a<-2$ 또는 $\log_2 a>1$이므로

$\log_2 a<\log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 a>\log_2 2^1$

$2>1$이므로 $a<\frac{1}{4}$ 또는 $a>2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$0<a<\frac{1}{8}$ 또는 $\frac{1}{8}<a<\frac{1}{4}$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

0669

유형 **22** 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용

|전략| 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취한다.

소금물 10 g을 덜어 내고 물 10 g을 넣으면 소금물에 들어 있는 소금의 양이 $\frac{1}{10}$씩 줄어들므로 n번 시행하면 소금물에 들어 있는 소금의 양은 처음 소금의 양의 $\left(\frac{9}{10}\right)^n$배가 된다.

n번 시행하여 농도가 20 %인 소금물을 농도가 10 % 이하인 소금물이 되게 해야 하므로

$\frac{20}{100}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n\leq\frac{10}{100}$, $\left(\frac{9}{10}\right)^n\leq\frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{9}{10}\leq\log\frac{1}{2}$, $n(2\log 3-1)\leq-\log 2$

이때 $2\log 3-1<0$이므로

$n\geq\frac{\log 2}{1-2\log 3}=\frac{0.3010}{1-2\times 0.4771}=\frac{0.3010}{0.0458}=6.5\times\times\times$

따라서 7번 시행하면 농도가 처음으로 10 % 이하가 된다. 답 ①

0670

유형 **11** 함수의 최대·최소 – 산술평균과 기하평균의 관계 이용

|전략| $x>0, y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$x>0, y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+y\geq 2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립)

이때 $2x+y=20$이므로

$20\geq 2\sqrt{2xy}$, $\sqrt{2xy}\leq 10$ $\therefore 2xy\leq 100$ … ❶

$\therefore \log 2x+\log y=\log 2xy\leq\log 100=2$

따라서 구하는 최댓값은 2이다. … ❷

$10>1$이므로 $2xy\leq 100$에서 $\log 2xy\leq\log 100$

답 2

채점 기준	배점
❶ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $2xy$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	3점
❷ $\log 2x+\log y$의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

0671

유형 **16** 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 활용

|전략| 주어진 방정식을 치환하여 정리하고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$(\log x)^2-6\log x+2=0$에서

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-6t+2=0$

이 방정식의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=6$, $\log\alpha\cdot\log\beta=2$ … ❶

한편, $(\log x)^2-a\log x+b=0$에서

$\log x=k$로 놓으면 $k^2-ak+b=0$

이 방정식의 두 근이 $\log\frac{1}{\alpha}$, $\log\frac{1}{\beta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\frac{1}{\alpha}+\log\frac{1}{\beta}=a$, 즉 $a=-\log\alpha-\log\beta=-6$

$\log\frac{1}{\alpha}\cdot\log\frac{1}{\beta}=b$, 즉 $b=(-\log\alpha)(-\log\beta)=2$ … ❷

따라서 $a=-6$, $b=2$이므로

$a+b=-6+2=-4$ … ❸

답 -4

채점 기준	배점
❶ $\log\alpha+\log\beta$, $\log\alpha\cdot\log\beta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점

0672

유형 **19** 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우

|전략| 로그의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 간단히 한 다음 치환하여 부등식의 해를 구한다.

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$3^{\log x}\cdot x^{\log 3}-2(3^{\log x}+x^{\log 3})+3<0$에서

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로

$3^{\log x}\cdot 3^{\log x}-2(3^{\log x}+3^{\log x})+3<0$

$(3^{\log x})^2-4\cdot 3^{\log x}+3<0$

$3^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+3<0$

$(t-1)(t-3)<0$ $\therefore 1<t<3$

즉, $1<3^{\log x}<3$이므로 $3^0<3^{\log x}<3^1$

지수의 밑이 3>1이므로 $0<\log x<1$

또, $0<\log x<1$에서 $\log 1<\log x<\log 10$

로그의 밑이 10>1이므로 $1<x<10$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<10$ … ❶

따라서 $\alpha=1$, $\beta=10$이므로

$\alpha+\beta=1+10=11$ … ❷

답 11

채점 기준	배점
❶ 치환을 이용하여 주어진 부등식을 풀 수 있다.	6점
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	1점

0673

유형 **03** 로그함수의 그래프 위의 점

|전략| 점 A와 점 D의 y좌표가 서로 같음을 이용한다.

(1) $A(a,\ \log_2 a)$, $G(b,\ \log_2 b)$이고 점 A와 점 D의 y좌표가 같으므로 $D(b,\ \log_2 a)$

조건 (가)에서 $\overline{DG}=1$이므로 $\log_2 b-\log_2 a=1$

$\log_2 b=\log_2 a+1=\log_2 2a$

$\therefore b=2a$

(2) 점 E의 x좌표를 k라 할 때, 조건 (나)에서 $\overline{AD}:\overline{DE}=2:3$이므로

$(b-a):(k-b)=2:3$

$2(k-b)=3(b-a)$, $2k=5b-3a$

$\therefore k=\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}\cdot 2a-\frac{3}{2}a=\frac{7}{2}a$

(3) 두 직사각형 ABCD, DEFG의 넓이가 같으므로

$(b-a)\log_2 a=(k-b)\cdot 1$

$(2a-a)\log_2 a=\frac{7}{2}a-2a$, $a\log_2 a=\frac{3}{2}a$

$\log_2 a=\frac{3}{2}$ $\therefore a=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore k=\frac{7}{2}a=\frac{7}{2}\cdot 2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

답 (1) $b=2a$ (2) $\frac{7}{2}a$ (3) $7\sqrt{2}$

채점 기준	배점
(1) a와 b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2점
(2) 점 E의 x좌표를 a로 나타낼 수 있다.	3점
(3) 점 E의 x좌표를 구할 수 있다.	4점

0674

유형 **16** 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 활용

|전략| 계수가 실수인 이차방정식이 실근을 가지려면 (판별식)≥0임을 이용한다.

(1) $(\log_2 x)\left(\log_2\frac{16}{x}\right)=\frac{m^2}{16}$에서

$(\log_2 x)(\log_2 16-\log_2 x)=\frac{m^2}{16}$

$(\log_2 x)(4-\log_2 x)=\frac{m^2}{16}$

$16(\log_2 x)^2-64\log_2 x+m^2=0$

$\log_2 x=t$로 치환하면

$16t^2-64t+m^2=0$

(2) (1)의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=32^2-16m^2\geq 0$

$\therefore m^2-64\leq 0$

(3) $m^2-64\leq 0$에서

$(m+8)(m-8)\leq 0$

$\therefore -8\leq m\leq 8$

따라서 구하는 실수 m의 최댓값은 8이다.

답 (1) $16t^2-64t+m^2=0$ (2) $m^2-64\leq 0$ (3) 8

채점 기준	배점
(1) $\log_2 x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) m에 대한 부등식을 세울 수 있다.	4점
(3) 실수 m의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

창의·융합 실력 마스터

0675

|전략| 먼저 지수함수의 그래프의 개형을 이용하여 m, n의 값을 구한다.

$y=ma^{2x}+n$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=n$이므로

$n=2$

또, 주어진 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=m+2$ $\therefore m=-1$

$x=-1$일 때 y의 값이 음수이므로 $-a^{-2}+2<0$에서

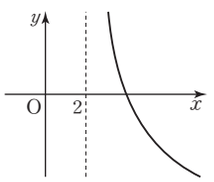
$-1+2a^2<0$, $(\sqrt{2}a+1)(\sqrt{2}a-1)<0$

$\therefore 0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because a>0)$ ····· ㉠

즉, $y=\log_a(x-n)^{-m}$의 그래프는 $y=\log_a(x-2)$의 그래프와 같다.

함수 $y=\log_a(x-2)$는 ㉠에 의하여 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, 정의역은 $\{x|x>2\}$, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

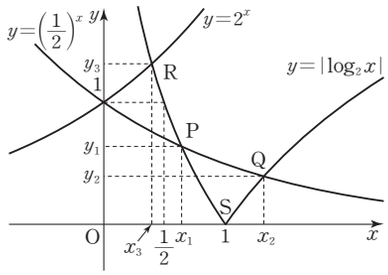
따라서 구하는 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 ②

0676

|전략| 역함수의 성질을 이용하여 교점의 좌표 사이의 관계를 찾는다.



ㄱ. $y=|\log_2 x|=\begin{cases}-\log_2 x & (0<x<1)\\ \log_2 x & (x\geq 1)\end{cases}$

위의 그림에서 $x_1<1$이고, $-\log_2 x=1$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}<x_1<1$ (참)

ㄴ. 두 함수 $y=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 서로 역함수 관계이고, 두 함수 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$이 서로 역함수 관계이므로 두 점 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$와 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ x_2=y_3,\ x_3=y_2$ $\quad\therefore\ x_2y_2-x_3y_3=0$ (참)

ㄷ. 위의 그림에서 점 $(1,\ 0)$을 S라 하면

$(\overline{\mathrm{RS}}$의 기울기$)<(\overline{\mathrm{PS}}$의 기울기$)$이므로

$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$이고, ㄴ에서 $x_2=y_3,\ x_3=y_2$이므로

$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$

이때 $x_1-1<0,\ y_2-1<0$이므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0677

|전략| 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

진수의 조건에서

$x+3>0,\ 5-x>0,\ k>0$

$\therefore\ -3<x<5,\ k>0$ ····· ㉠

$\log_3(x+3)+\log_3(5-x)=\log_3 k$에서

$\log_3(x+3)(5-x)=\log_3 k,\ (x+3)(5-x)=k$

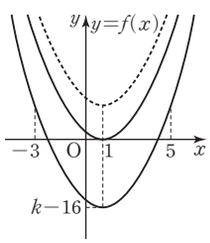
$\therefore\ x^2-2x+k-15=0$ ····· ㉡

주어진 방정식을 만족시키는 실수 x가 존재하려면 방정식 ㉡이 $-3<x<5$에서 실근을 가져야 한다.

이때 $f(x)=x^2-2x+k-15=(x-1)^2+k-16$이라 하면

㉠에 의해 $f(-3)=f(5)=k>0$이므로

방정식 ㉡이 $-3<x<5$에서 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $-3<x<5$인 부분에서 x축과 만나야 한다.



즉, $k-16\leq 0$에서

$k\leq 16$ ····· ㉢

㉠, ㉢에서 $0<k\leq 16$

따라서 정수 k의 개수는 1, 2, 3, ⋯, 16의 16이다. 답 16

0678

|전략| 주어진 조건을 만족시키기 위해서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 어떻게 그려져야 하는지 알아본다.

$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x-7+k)+2$에서 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다. ····· ㉠

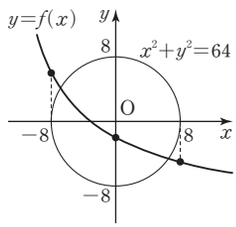
함수 $y=f(x)$의 그래프와 원이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 $a,\ b$에 대하여 $a<b$라 하면 조건 (가)에 의하여

$a<0,\ b>0$ ····· ㉡

또, 조건 (나)에 의하여 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르므로

$f(a)>0,\ f(b)<0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-8)>0,\ -8<f(0)<8,\ f(8)<0$

(i) $f(-8)>0$일 때

$2\log_{\frac{1}{2}}(k-15)+2>0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(k-15)>-1,\ \log_{\frac{1}{2}}(k-15)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $k-15<2$ $\quad\therefore\ k<17$

(ii) $-8<f(0)<8$일 때

$-8<2\log_{\frac{1}{2}}(k-7)+2<8$에서 $-5<\log_{\frac{1}{2}}(k-7)<3$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}<\log_{\frac{1}{2}}(k-7)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{8}<k-7<32$

$\therefore\ \frac{57}{8}<k<39$

(iii) $f(8)<0$일 때

$2\log_{\frac{1}{2}}(k+1)+2<0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(k+1)<-1,\ \log_{\frac{1}{2}}(k+1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

이때 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $k+1>2$ $\quad\therefore\ k>1$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{57}{8}<k<17$

따라서 자연수 k의 최댓값은 $M=16$, 최솟값은 $m=8$이므로

$M+m=16+8=24$ 답 24

0679

|전략| 주어진 조건에 맞게 방정식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취한다.

원산지 생산 가격을 a원, 유통 과정을 한 번 거칠 때 가격의 인상 비율을 r라 하자. 유통 과정을 다섯 번 거친 소비자 가격이 원산지 생산 가격의 2.24배이므로

$a(1+r)^5=2.24a,\ (1+r)^5=2.24$

양변에 상용로그를 취하면

$5\log(1+r)=\log 2.24=0.35$

$\log(1+r)=0.07=\log 1.17$ $\quad\therefore\ 1+r=1.17$

$\frac{a(1+r)}{a(1+r)^5}\times 100=\frac{1.17}{2.24}\times 100=52.2\times\times\times$

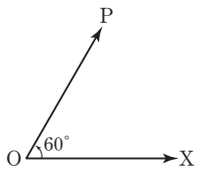
따라서 유통 과정을 한 번만 거친 소비자 가격은 다섯 번 거친 소비자 가격의 약 52 %이다. 답 52 %

5 삼각함수

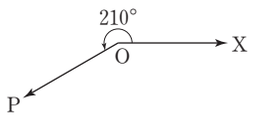
본책 90~103쪽

STEP 1 개념 마스터

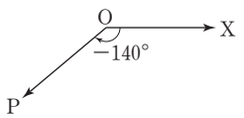
0680 답



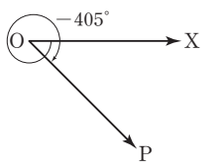
0681 답



0682 답



0683 답



0684 답 $360^\circ \times n + 70^\circ$

0685 답 $360^\circ \times n + 120^\circ$

0686 답 $360^\circ \times n + 300^\circ$

0687 답 $360^\circ \times n + 230^\circ$

0688

$420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$이므로

$360^\circ \times n + 60^\circ$ 답 $360^\circ \times n + 60^\circ$

0689

$600^\circ = 360^\circ \times 1 + 240^\circ$이므로

$360^\circ \times n + 240^\circ$ 답 $360^\circ \times n + 240^\circ$

0690

$-930^\circ = 360^\circ \times (-3) + 150^\circ$이므로

$360^\circ \times n + 150^\circ$ 답 $360^\circ \times n + 150^\circ$

0691

$-1100^\circ = 360^\circ \times (-4) + 340^\circ$이므로

$360^\circ \times n + 340^\circ$ 답 $360^\circ \times n + 340^\circ$

0692

$1050^\circ = 360^\circ \times 2 + 330^\circ$

따라서 1050°는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

0693

$1470^\circ = 360^\circ \times 4 + 30^\circ$

따라서 1470°는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

0694

$-600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ$

따라서 -600°는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0695

$-1540^\circ = 360^\circ \times (-5) + 260^\circ$

따라서 -1540°는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0696

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$라디안이므로

$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

0697

$225^\circ = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$ 답 $\frac{5}{4}\pi$

0698

$-135^\circ = -135 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{4}\pi$ 답 $-\frac{3}{4}\pi$

0699

$-330^\circ = -330 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{11}{6}\pi$ 답 $-\frac{11}{6}\pi$

0700

1라디안$= \frac{180^\circ}{\pi}$이므로

$\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$ 답 108°

0701

$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$ 답 150°

0702

$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -90^\circ$ 답 -90°

0703

$-\frac{4}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -240^\circ$ 답 -240°

0704 답 $2n\pi+\frac{\pi}{6}$

0705

$\frac{14}{3}\pi=4\pi+\frac{2}{3}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

0706

$-\frac{3}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{5}{4}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{5}{4}\pi$

0707

$-\frac{29}{5}\pi=2\pi\times(-3)+\frac{\pi}{5}$이므로 $2n\pi+\frac{\pi}{5}$ 답 $2n\pi+\frac{\pi}{5}$

0708

부채꼴의 반지름의 길이가 3, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{5}$이므로

$l=3\cdot\frac{\pi}{5}=\frac{3}{5}\pi$

$S=\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{\pi}{5}=\frac{9}{10}\pi$ 또는 $S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{5}\pi=\frac{9}{10}\pi$

답 $l=\frac{3}{5}\pi$, $S=\frac{9}{10}\pi$

0709

부채꼴의 반지름의 길이가 10, 중심각의 크기가 120°이므로

$120^\circ=120\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$에서

$l=10\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{20}{3}\pi$

$S=\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{100}{3}\pi$ 또는 $S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot\frac{20}{3}\pi=\frac{100}{3}\pi$

답 $l=\frac{20}{3}\pi$, $S=\frac{100}{3}\pi$

0710

부채꼴의 반지름의 길이 $r=10$, 호의 길이 $l=15\pi$이므로

$l=r\theta$에서 $15\pi=10\theta$ $\therefore\ \theta=\frac{3}{2}\pi$

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot15\pi=75\pi$ 답 $\theta=\frac{3}{2}\pi$, $S=75\pi$

0711

부채꼴의 호의 길이 $l=\frac{\pi}{2}$, 넓이 $S=\frac{3}{4}\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}r\cdot\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ r=3$

$l=r\theta$에서 $\frac{\pi}{2}=3\theta$ $\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$ 답 $r=3$, $\theta=\frac{\pi}{6}$

0712

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

(1) $\sin\theta=\frac{4}{5}$ (2) $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ (3) $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{4}{3}$

0713

$\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$이므로

(1) $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ (2) $\cos\theta=\frac{12}{13}$ (3) $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

답 (1) $-\frac{5}{13}$ (2) $\frac{12}{13}$ (3) $-\frac{5}{12}$

0714

(1) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

이때 점 P가 제 2 사분면 위의 점이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

(2) $\sin\theta=\frac{1}{2}$

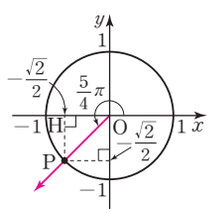
(3) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

0715

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{5}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

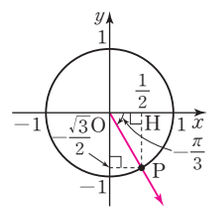
$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=1$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=1$

0716

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-\frac{\pi}{3}$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

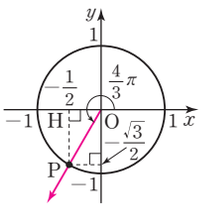
$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

0717

$240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = \frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$이고, $\angle POH = \frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

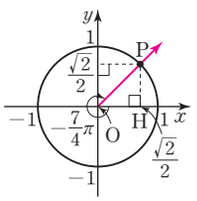
$\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = -\frac{1}{2}, \tan\theta = \sqrt{3}$

답 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = -\frac{1}{2}, \tan\theta = \sqrt{3}$

0718

$-315^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = -\frac{7}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$이고, $\angle POH = \frac{\pi}{4}$이므로

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1$

답 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1$

0719

$\theta = \frac{25}{4}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{\pi}{4}$에서 각 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, \tan\theta > 0$ 답 $\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, \tan\theta > 0$

0720

$\theta = -\frac{7}{3}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{5}{3}\pi$에서 각 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta < 0, \cos\theta > 0, \tan\theta < 0$ 답 $\sin\theta < 0, \cos\theta > 0, \tan\theta < 0$

0721

$\theta = 960^\circ = 360^\circ \times 2 + 240^\circ$에서 각 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$ 답 $\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$

0722

$\theta = -560^\circ = 360^\circ \times (-2) + 160^\circ$에서 각 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta > 0, \cos\theta < 0, \tan\theta < 0$ 답 $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0, \tan\theta < 0$

0723

$\sin\theta > 0$이면 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,
$\cos\theta < 0$이면 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로
각 θ는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0724

$\sin\theta < 0$이면 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고,
$\tan\theta > 0$이면 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로
각 θ는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0725

$\cos\theta\tan\theta > 0$에서
$\cos\theta > 0, \tan\theta > 0$ 또는 $\cos\theta < 0, \tan\theta < 0$
따라서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제2사분면

0726

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\theta = 1, \cos^2\theta = \frac{15}{16}$

이때 각 θ가 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta > 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ 답 $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \tan\theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$

0727

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1, \sin^2\theta = \frac{8}{9}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta < 0$

$\therefore \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$ 답 $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\theta = 2\sqrt{2}$

0728

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4}, \sin\theta = -\frac{3}{4}\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\left(-\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2 + \cos^2\theta = 1, \frac{25}{16}\cos^2\theta = 1, \cos^2\theta = \frac{16}{25}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{4}\cos\theta = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

답 $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = -\frac{4}{5}$

0729

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{1}{4}$

0730

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{4}}=-2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2}$

0731

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$ 답 $-\frac{4}{9}$

0732

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{-\frac{4}{9}}=-\frac{9}{4}$ 답 $-\frac{9}{4}$

0733

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

0734

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\frac{7}{16}=\frac{15}{8}$ 답 $\frac{15}{8}$

0735

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=2\cdot1=2$ 답 2

0736

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$

$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

답 $\frac{1}{\cos\theta}$

0737

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$\therefore (1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 답 1

0738

$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(\boxed{\text{(가) } 1+\sin\theta})-\boxed{\text{(나) } \cos\theta}(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta+\cos\theta\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{\boxed{\text{(다) } 2\sin\theta\cos\theta}}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta}{\boxed{\text{(라) } \cos\theta}}=2\tan\theta$

답 (가) $1+\sin\theta$ (나) $\cos\theta$ (다) $2\sin\theta\cos\theta$ (라) $\cos\theta$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 동경의 위치 개념 01

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$($n$은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)이면 각 α°를 나타내는 동경과 각 θ를 나타내는 동경이 일치한다.

0739

① $-290^\circ=360^\circ\times(-1)+70^\circ$

② $-110^\circ=360^\circ\times(-1)+250^\circ$

③ $430^\circ=360^\circ\times1+70^\circ$

④ $790^\circ=360^\circ\times2+70^\circ$

⑤ $1150^\circ=360^\circ\times3+70^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

답 ②

0740

① $-675^\circ=360^\circ\times(-2)+45^\circ$ ② $-315^\circ=360^\circ\times(-1)+45^\circ$

③ $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$ ④ $765^\circ=360^\circ\times2+45^\circ$

⑤ $1035^\circ=360^\circ\times2+315^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ⑤이다. 답 ⑤

0741

ㄱ. $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$ ㄴ. $-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$

ㄷ. $150^\circ=360^\circ\times0+150^\circ$ ㄹ. $300^\circ=360^\circ\times0+300^\circ$

ㅁ. $600^\circ=360^\circ\times1+240^\circ$ ㅂ. $840^\circ=360^\circ\times2+120^\circ$

따라서 120°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㅂ

0742

91°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=91^\circ-330^\circ+165^\circ=-74^\circ=360^\circ\times(-1)+286^\circ$

$\therefore \alpha=286$

답 286

유형 02 사분면의 각 개념 01

(1) 각 θ가 제1사분면의 각 ⇨ $360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$

(2) 각 θ가 제2사분면의 각 ⇨ $360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$

(3) 각 θ가 제3사분면의 각 ⇨ $360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$

(4) 각 θ가 제4사분면의 각 ⇨ $360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$

(단, n은 정수)

0743

각 θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+45^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times 2k<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times 2k+45^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+45^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times(2k+1)<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times(2k+1)+45^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+225^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

0744

① $-850^\circ=360^\circ\times(-3)+230^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

② $-280^\circ=360^\circ\times(-1)+80^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

③ $510^\circ=360^\circ\times1+150^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

④ $1020^\circ=360^\circ\times2+300^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

⑤ $1460^\circ=360^\circ\times4+20^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

따라서 각을 나타내는 동경이 제4사분면에 있는 것은 ④이다.

답 ④

0745

각 2θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<2\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+90^\circ<\theta<180^\circ\times n+135^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times 2k+90^\circ<\theta<180^\circ\times 2k+135^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+90^\circ<\theta<360^\circ\times k+135^\circ$

따라서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times(2k+1)+90^\circ<\theta<180^\circ\times(2k+1)+135^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+315^\circ$

따라서 각 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

0746

각 θ가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+120^\circ$ … ❶

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times 3k+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times 3k+120^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+90^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+120^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다. … ❷

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times(3k+1)+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+1)+120^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+210^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+240^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다. … ❸

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times(3k+2)+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+2)+120^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+330^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+360^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다. … ❹

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다. … ❺

답 제1사분면

채점 기준	비율
❶ 각 $\frac{\theta}{3}$를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n=3k$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	20 %
❸ $n=3k+1$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	20 %
❹ $n=3k+2$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	20 %
❺ 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 호도법과 육십분법 개념 01, 02

(1) 호도법의 각을 육십분법의 각으로 바꿀 때 ⇨ (호도법의 각) $\times \frac{180^\circ}{\pi}$

(2) 육십분법의 각을 호도법의 각으로 바꿀 때 ⇨ (육십분법의 각) $\times \frac{\pi}{180}$

0747

ㄱ. $\frac{2}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=40^\circ$ (참)

ㄴ. $64^\circ=64\times\frac{\pi}{180}=\frac{16}{45}\pi$ (거짓)

ㄷ. $\frac{7}{10}\pi=\frac{7}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=126^\circ$ (거짓)

ㄹ. $102^\circ=102\times\frac{\pi}{180}=\frac{17}{30}\pi$ (참)

ㅁ. $\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=300^\circ$ (참)

ㅂ. $168^\circ=168\times\frac{\pi}{180}=\frac{14}{15}\pi$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0748

$576^\circ=576\times\frac{\pi}{180}=\frac{16}{5}\pi$이므로 $\alpha=\frac{16}{5}\pi$

$3\pi<\frac{16}{5}\pi<4\pi$이므로 구하는 정수 n의 값은 3이다. 답 3

0749

① $-500^\circ=360^\circ\times(-2)+220^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

② $\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=210^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

③ $910^\circ=360^\circ\times2+190^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

④ $-\frac{6}{5}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{4}{5}\pi$

이때 $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=144^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

⑤ $\frac{10}{3}\pi=2\pi\times1+\frac{4}{3}\pi$

이때 $\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다. 답 ④

0750

ㄱ. $1=\frac{180^\circ}{\pi}$ (거짓)

ㄴ. $-184^\circ=360^\circ\times(-1)+176^\circ$이므로 -184°는 제2사분면의 각이다. (참)

ㄷ. $-280^\circ=360^\circ\times(-1)+80^\circ$, $\frac{40}{9}\pi=2\pi\times2+\frac{4}{9}\pi$

$\frac{58}{9}\pi=2\pi\times3+\frac{4}{9}\pi$

이때 $\frac{4}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=80^\circ$이므로 -280°, $\frac{40}{9}\pi$, $\frac{58}{9}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 04 두 동경의 위치 관계 – 일치 개념 01, 02

두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치한다.

⇨ $\beta-\alpha=2n\pi$ (단, n은 정수)



0751

각 8θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$8\theta-5\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$3\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$ …… ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로

$\frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$ $\therefore n=1$

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

0752

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$6\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{n}{3}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi<\pi$이므로

$0<n<3$ $\therefore n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$ 답 π

유형 05 두 동경의 위치 관계 – 원점에 대하여 대칭 개념 01, 02

두 각 α, β를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이다.

⇨ $\beta-\alpha=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)



0753

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<2$, $-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$

$\therefore n=0$

$n=0$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

0754

각 3θ를 나타내는 동경과 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 원점에 대하여 대칭이다.

$3\theta-\frac{\theta}{2}=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$\frac{5}{2}\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2(2n+1)}{5}\pi$ ····· ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2(2n+1)}{5}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<\frac{15}{4}$, $\frac{3}{4}<n<\frac{11}{8}$

$\therefore n=1$

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{6}{5}\pi$ 답 $\frac{6}{5}\pi$

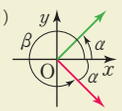
유형 06 두 동경의 위치 관계 – 좌표축 또는 직선에 대하여 대칭 개념 01, 02

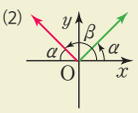
두 각 α, β를 나타내는 동경이

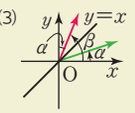
(1) x축에 대하여 대칭이다. ⇨ $\alpha+\beta=2n\pi$ (단, n은 정수)

(2) y축에 대하여 대칭이다. ⇨ $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

(3) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ⇨ $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

(1) 

(2) 

(3) 

0755

각 5θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$5\theta+2\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$7\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{7}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{7}\pi<\pi$이므로

$0<n<\frac{7}{2} \quad \therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{6}{7}\pi$

따라서 조건을 만족시키는 θ의 개수는 3이다. 답 ③

0756

각 2θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+3\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$5\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ····· ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{4}<n<2$

$\therefore n=1$

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{5}\pi$ 답 ①

0757

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{4n+1}{10}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{4n+1}{10}\pi<2\pi$이므로

$0<4n+1<20$, $-\frac{1}{4}<n<\frac{19}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$

$n=4$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{17}{10}\pi$

$n=0$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{10}$

따라서 θ의 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{17}{10}\pi+\frac{\pi}{10}=\frac{9}{5}\pi$ 답 ⑤

0758

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{4n+1}{12}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{4n+1}{12}\pi<\pi$이므로

$0<4n+1<12$, $-\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{12}+\frac{5}{12}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi$ 답 ②

유형 07 부채꼴의 호의 길이와 넓이 개념 03

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(1) $l=r\theta$ (2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

0759

반지름의 길이가 a인 부채꼴의 호의 길이가 π, 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{1}{2}a\pi=\frac{5}{2}\pi \quad \therefore a=5$

또, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{b}$이고, 부채꼴의 호의 길이가 π이므로

$5\cdot\frac{\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=5+5=10$ 답 10

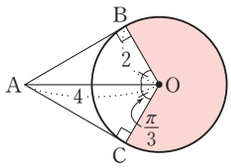
0760

오른쪽 그림에서 $\angle ABO=\angle ACO=90^\circ$

$\cos(\angle AOB)=\frac{1}{2}$이므로

$\angle AOB=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle BOC=2\angle AOB=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$



따라서 색칠한 부분은 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0761

오른쪽 그림에서 두 점 O, P를 연결하면

부채꼴 OBP에서 $\frac{\pi}{3}=1\cdot\angle POB$이므로

$\angle POB=\frac{\pi}{3}$

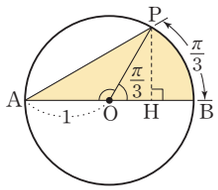
점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOP의 넓이는

$\triangle AOP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle AOP+(\text{부채꼴 OBP의 넓이})=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$



답 $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$

0762

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{16}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OA}=8$이므로 $\overline{OC}=8-r$

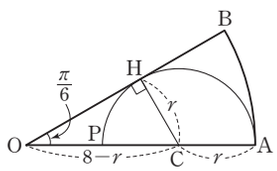
또, 선분 OB와 반원의 접점을 H라 하면 $\overline{CH}=r$

이때 $\overline{OB}\perp\overline{CH}$이므로 직각삼각형 OCH에서

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{r}{8-r}$, $\frac{r}{8-r}=\frac{1}{2}$ $\therefore r=\frac{8}{3}$

$\therefore S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\pi=\frac{32}{9}\pi$

$\therefore S_1-S_2=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}\pi=\frac{16}{9}\pi$



답 $\frac{16}{9}\pi$

유형 08 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 최대·최소 개념 03

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l, 넓이가 S인 부채꼴에서 둘레의 길이가 a로 일정한 경우

(1) $a=2r+l$ ⇨ $l=a-2r$ (2) $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(a-2r)$

0763

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 32이므로 $2r+l=32$

$\therefore l=32-2r$ (단, $0<r<16$)

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(32-2r)$

$=-r^2+16r=-(r-8)^2+64$

즉, $r=8$일 때, S는 최댓값 64를 갖는다.

따라서 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 8이다.

답 8

0764

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 넓이가 25이므로

$\frac{1}{2}rl=25$ $\therefore l=\frac{50}{r}$ … ❶

이때 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+\frac{50}{r}$ … ❷

$2r>0$, $\frac{50}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{50}{r}\ge 2\sqrt{2r\cdot\frac{50}{r}}$

$=2\cdot 10=20$ (단, 등호는 $r=5$일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 20이다. … ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ l을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 부채꼴의 둘레의 길이를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

참고 $2r+\frac{50}{r}$이 최솟값을 가질 때, $2r=\frac{50}{r}$에서

$r^2=25$ $\therefore r=5$ ($\because r>0$)

Lecture

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

발전 유형 09 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 활용 개념 03

(1) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

⇨ ① $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

② (둘레의 길이)$=2r+r\theta$

(2) 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같다.

0765

옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot 4=8\pi$

이때 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\pi=40\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$40\pi+\pi\cdot 4^2=56\pi$

답 56π

0766

사각형 AOBO′은 마름모이므로 $\angle AO'B=\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore$ (부채꼴 O′AB의 중심각의 크기)$=2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$

이때 $\overline{O'A}$, $\overline{O'B}$와 호 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면

$S_1+T=$(부채꼴 O′AB의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{7}{6}\pi=21\pi$ ····· ㉠

$S_2+T=$(부채꼴 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{5}{6}\pi=15\pi$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$S_1-S_2=21\pi-15\pi=6\pi$ 답 6π

0767

부채꼴 PAB를 원 O와 접하면서 한 바퀴 굴렸을 때 점 P로 되돌아왔으므로 부채꼴 PAB의 둘레의 길이와 원 O의 둘레의 길이가 같다.

원 O의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot1=2\pi$이고, 부채꼴 PAB의 둘레의 길이는 $2\cdot2+2\cdot\theta=4+2\theta$이므로

$4+2\theta=2\pi$, $2\theta=2\pi-4$ $\therefore\ \theta=\pi-2$ 답 ①

0768

$\overline{OP}=a$ cm라 하면 $120^\circ=\frac{2}{3}\pi$이므로 와이퍼의 블레이드가 닦은 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot70^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi(4900-a^2)$ (cm^2)

이때 와이퍼의 블레이드가 닦은 부분의 넓이가 1500π cm^{2}이므로

$\frac{1}{3}\pi(4900-a^2)=1500\pi$, $4900-a^2=4500$

$a^2=400$ $\therefore\ a=20$ ($\because\ a>0$)

$\therefore\ \overline{PQ}=70-20=50$ (cm)

이때 $\overline{PC}:\overline{QC}=3:2$이므로 $\overline{PC}=50\cdot\frac{3}{5}=30$ (cm)

따라서 와이퍼의 암 OC의 길이는

$20+30=50$ (cm) 답 50 cm

0769

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=6$인 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot6=12\pi$이고 원의 둘레를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간이 3π초이므로 점 P의 속력은

(속력)$=\frac{\text{(거리)}}{\text{(시간)}}=\frac{12\pi}{3\pi}=4$

점 P가 2초 동안 움직인 호의 길이 l은

$l=$(속력)$\times$(시간)$=4\cdot2=8$

이때 $l=ra$에서 $8=6a$ $\therefore\ a=\frac{4}{3}$

또, 구하는 부채꼴의 넓이 b는 $b=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\cdot6\cdot8=24$

$\therefore\ ab=\frac{4}{3}\cdot24=32$ 답 32

다른 풀이 $ab=a\cdot\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}l\cdot ra=\frac{1}{2}l^2=\frac{1}{2}\cdot8^2=32$

유형 10 삼각함수 개념 04

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 P(x, y)에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

(1) $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ ($x\neq0$)

0770

$\overline{OP}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sqrt{5}\sin\theta-\sqrt{5}\cos\theta+4\tan\theta$

$=\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-1-2-2=-5$ 답 ①

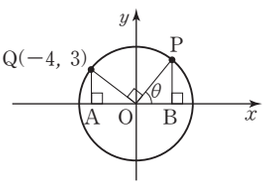
0771

점 Q와 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\angle QOA+\angle POB=90^\circ$이므로

$\triangle QAO\equiv\triangle OBP$ (RHA 합동)

즉, 점 P의 좌표는 (3, 4)이다.



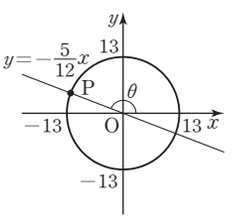
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sin\theta\tan\theta=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{15}$ 답 $\frac{16}{15}$

0772

오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원이 직선 $5x+12y=0$, 즉 $y=-\frac{5}{12}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면 P$(-12, 5)$



$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$이므로

$\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

$\therefore\ 13\cos\theta-12\tan\theta=13\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-12\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)$

$=-12+5=-7$ 답 -7

0773

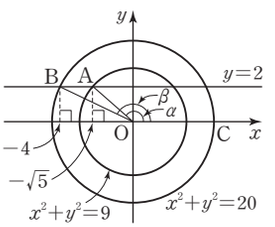
점 A는 직선 $y=2$와 원 $x^2+y^2=9$의 교점이므로

$x^2+y^2=9$에 $y=2$를 대입하면

$x^2+4=9$, $x^2=5$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}$

이때 점 A는 제2사분면 위의 점이므로 A$(-\sqrt{5},\ 2)$



즉, $\overline{OA}=3$이므로 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

점 B는 직선 $y=2$와 원 $x^2+y^2=20$의 교점이므로 $x^2+y^2=20$에 $y=2$를 대입하면

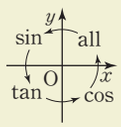
$x^2+4=20,\ x^2=16 \quad \therefore x=\pm4$

이때 점 B는 제2사분면 위의 점이므로 B$(-4,\ 2)$

즉, $\overline{OB}=2\sqrt{5}$이므로 $\sin\beta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\alpha\sin\beta=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

유형 11 삼각함수의 값의 부호 개념 05



제1사분면에서는 all
제2사분면에서는 sin
제3사분면에서는 tan
제4사분면에서는 cos
} 값이 양수이다.

0774

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$일 때

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$일 때

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제2사분면의 각이다. 답 ②

0775

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 각 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$ … ❶

따라서 $|\sin\theta|=\sin\theta,\ |\cos\theta|=-\cos\theta,$

$|\tan\theta|=-\tan\theta$이므로 … ❷

(주어진 식)

$=-\tan\theta-\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta+\cos\theta+\sin\theta$

$=2\sin\theta$ … ❸

답 $2\sin\theta$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	40 %
❷ $\lvert\sin\theta\rvert,\ \lvert\cos\theta\rvert,\ \lvert\tan\theta\rvert$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %

0776

각 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta<0,\ \cos\theta-\sin\theta>0$이므로

(주어진 식) $=|\sin\theta-\cos\theta|+|\cos\theta-\sin\theta|$

$=-(\sin\theta-\cos\theta)+\cos\theta-\sin\theta$

$=-\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta-\sin\theta$

$=2(\cos\theta-\sin\theta)$ 답 ⑤

0777

$\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$이고 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

실수 a, b에 대하여 $a<0, b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

즉, 각 θ는 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta>0$

따라서 $1-\sin\theta>0,\ 1+\tan\theta>0,\ \sin\theta+\cos\theta<0$이므로

(주어진 식)

$=|\tan\theta|+|1-\sin\theta|-|1+\tan\theta|-|\sin\theta+\cos\theta|$

$=\tan\theta+(1-\sin\theta)-(1+\tan\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\tan\theta+1-\sin\theta-1-\tan\theta+\sin\theta+\cos\theta$

$=\cos\theta$ 답 $\cos\theta$

유형 12 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식 간단히 하기 개념 06

(1) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

0778

$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$

$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0$ 답 ②

0779

ㄱ. $\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}$

$=\frac{\tan\theta(1+\cos\theta)-\tan\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2\tan\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$ (참)

ㄴ. $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\sin^2\theta\tan^2\theta$ (참)

ㄷ. $\left(1+\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}$

$=\frac{\{(\cos\theta+\sin\theta)-1\}\{(\cos\theta+\sin\theta)+1\}}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{(1+2\cos\theta\sin\theta)-1}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0780

① $\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}$

② $\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\tan\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{1}{1-\sin\theta}$

③ $\frac{2}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2-2\sin\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2-2\sin\theta-(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}=\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

④ $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta(1-\sin\theta)+\cos^2\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=2$

⑤ $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0781

$\sqrt{3+6\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{3-6\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{3(1+2\sin\theta\cos\theta)}-\sqrt{3(1-2\sin\theta\cos\theta)}$

$=\sqrt{3(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$-\sqrt{3(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{3(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{3(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{3}\,|\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{3}\,|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sqrt{3}\,(\sin\theta+\cos\theta)+\sqrt{3}\,(\sin\theta-\cos\theta)\ (\because 0<\sin\theta<\cos\theta)$

$=2\sqrt{3}\sin\theta$ 답 $2\sqrt{3}\sin\theta$

유형 13 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 개념 06

삼각함수의 값과 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

0782

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$ $\therefore \sin\theta=\frac{12}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{13}{12}+\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

0783

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

이때 각 θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$ $\therefore \cos\theta=-\frac{2}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore 3\cos\theta+\sqrt{5}\tan\theta=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0784

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$에서 $\sin\theta=-\frac{4}{3}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\left(-\frac{4}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1,\ \frac{25}{9}\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\cos\theta>0$ $\therefore \cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=-\frac{4}{3}\cos\theta=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}$

$\therefore \frac{5\sin\theta+2}{15\cos\theta-6}=\frac{5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+2}{15\cdot\frac{3}{5}-6}=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

0785

$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}$

$\frac{2}{\sin\theta}=6$에서 $\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$ $\therefore \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

유형 14 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 개념 06

$\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어진 경우

⇨ $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1\pm2\sin\theta\cos\theta$ (복호동순)

임을 이용한다.

0786

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}$$
답 $\frac{8}{3}$

0787

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$
$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{23}{27}$
답 ⑤

다른 풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$이므로

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}=\frac{23}{27}$

0788

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

$\therefore \frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{(1-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2-3}$
$=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta-3}$
$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{-2(\sin\theta+\cos\theta)}$
$=\frac{1-\sin\theta\cos\theta}{-2}=\frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}{-2}=-\frac{7}{10}$
답 $-\frac{7}{10}$

0789

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$
$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{23}{32}$

$\therefore \sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{9}{64}$ …… ㉠

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ …… ㉡

즉, $\sin\theta\cos\theta<0$이므로 ㉠에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

㉡에 의하여 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$
답 ⑤

유형 15 삼각함수와 이차방정식 개념 05, 06

이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어진 경우
⇨ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운다.
⇨ x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이면
$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{b}{a}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{c}{a}$

0790

이차방정식 $x^2+kx-k^2=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-k$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-k^2$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=k^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=k^2$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{k^2-1}{2}$

㉡에서 $-k^2=\frac{k^2-1}{2}$

$k^2=\frac{1}{3}$ $\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because k>0$)
답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0791

이차방정식 $3x^2-2x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $-\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{k}{3}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{5}{18}$

㉡에서 $-\frac{k}{3}=\frac{5}{18}$ $\therefore k=-\frac{5}{6}$
답 ①

0792

이차방정식 $2x^2+\sqrt{2}x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

㉡에서 $\frac{k}{2}=-\frac{1}{4}$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$
$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$=-\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\therefore k(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{16}$
답 $\frac{5\sqrt{2}}{16}$

0793

이차방정식 $5x^2+kx-3=0$의 두 근이 $\cos\theta$, $\tan\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\cos\theta+\tan\theta=-\frac{k}{5}$ ····· ㉠

$\cos\theta\tan\theta=-\frac{3}{5}$ ····· ㉡ … ❶

㉡에서

$\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=-\frac{3}{5}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$ $\therefore\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$ … ❷

㉠에서

$-\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=-\frac{k}{5}$ $\therefore\ k=\frac{1}{4}$ … ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

STEP 3 내신 마스터

0794

유형 02 사분면의 각

|전략| 각 θ의 값의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore\ 180^\circ\times n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times 2k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times 2k+90^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+90^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\times(2k+1)+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times(2k+1)+90^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+225^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+270^\circ$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이므로 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0795

유형 03 호도법과 육십분법

|전략| $1^\circ=\frac{\pi}{180}$라디안, 1라디안$=\frac{180^\circ}{\pi}$임을 이용한다.

① $60^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$ ② $162^\circ=162\times\frac{\pi}{180}=\frac{9}{10}\pi$

③ $\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=45^\circ$ ④ $\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=210^\circ$

⑤ $\frac{8}{5}\pi=\frac{8}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=288^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0796

유형 04 두 동경의 위치 관계 – 일치
+ 05 두 동경의 위치 관계 – 원점에 대하여 대칭

|전략| 두 동경이 일직선 위에 있는 경우는 일치하거나 일직선 위에 있지만 방향이 반대인 두 가지 경우이다.

(i) 두 동경이 일치할 때

$6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로

$5\theta=2n\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ····· ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$ $\therefore\ n=2$

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

(ii) 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때, 즉 두 동경이 원점에 대하여 대칭일 때

$6\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이므로

$5\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ····· ㉡

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{4}<n<2$ $\therefore\ n=1$

$n=1$을 ㉡에 대입하면 $\theta=\frac{3}{5}\pi$

(i), (ii)에서 모든 θ의 값의 합은 $\frac{4}{5}\pi+\frac{3}{5}\pi=\frac{7}{5}\pi$ 답 ③

0797

유형 08 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 최대·최소

|전략| 부채꼴의 넓이 S를 반지름의 길이 r에 대한 이차식으로 나타내어 이차함수의 최대·최소를 이용한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 12이므로

$2r+l=12$ $\therefore\ l=12-2r$ (단, $0<r<6$)

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)$

$=-r^2+6r=-(r-3)^2+9$

따라서 $r=3$일 때, S는 최댓값 9를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$9=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\theta$ $\therefore\ \theta=2$ 답 ④

0798

유형 09 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 활용

|전략| 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$이다.

부채꼴 OCD의 반지름의 길이를 r m라 하고, 두 부채꼴 OAB, OCD의 중심각의 크기를 θ라 하면

호 AB의 길이가 40 m, 호 CD의 길이가 16 m이므로

$(r+18)\theta=40$에서 $r\theta+18\theta=40$ ····· ㉠

$r\theta=16$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16+18\theta=40$ $\therefore \theta=\frac{4}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\frac{4}{3}r=16$ $\therefore r=12$

따라서 도형 ABDC의 넓이는

(부채꼴 OAB의 넓이)−(부채꼴 OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot(12+18)\cdot40-\frac{1}{2}\cdot12\cdot16$

$=600-96=504\ (\mathrm{m}^2)$

답 ③

0799

유형 10 삼각함수

|전략| 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\sin\theta=\frac{y}{\mathrm{OP}}$, $\cos\theta=\frac{x}{\mathrm{OP}}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$이다.

$\tan\theta_1=\frac{b}{a}$, $\tan\theta_2=-\frac{b^2}{2a^2}$

이때 $\tan\theta_1+\tan\theta_2=0$이므로

$\frac{b}{a}+\left(-\frac{b^2}{2a^2}\right)=0$, $\frac{b(2a-b)}{2a^2}=0$

$a>0$, $b>0$이므로 $b=2a$

$\therefore \cos\theta_1=\frac{a}{\mathrm{OP}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}$

$=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ②

0800

유형 11 삼각함수의 값의 부호

|전략| $ab>0$이면 a와 b의 부호가 서로 같고, $ab<0$이면 a와 b의 부호가 서로 다름을 이용한다.

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$일 때

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$일 때

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 다르므로 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\tan\theta+|\sin\theta|+|\tan\theta|$

$=\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$

답 ⑤

0801

유형 12 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식 간단히 하기

|전략| $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

$\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)^2-\left(\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\right)^2+\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)^2$

$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-2+\sin^2\theta\right)-\left(\frac{1}{\tan^2\theta}-2+\tan^2\theta\right)$

$+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-2+\cos^2\theta\right)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta\right)-2$

$=1+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)-2$

$=1+\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-2$

$=1+1+1-2=1$

답 ④

0802

유형 13 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

|전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

$12\sin\theta=5\cos\theta$에서 $\sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\left(\frac{5}{12}\cos\theta\right)^2+\cos\theta=1$, $\frac{169}{144}\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{144}{169}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$ $\therefore \cos\theta=-\frac{12}{13}$

$\sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta=\frac{5}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{5}{13}+\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{17}{13}$

답 ①

0803

유형 10 삼각함수

+ 14 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

|전략| 점 P의 x좌표와 y좌표를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

즉, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{5}{2}$이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{5}$

이때 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

0804

유형 15 삼각함수와 이차방정식

|전략| 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용한다.

이차방정식 $3x^2-\sqrt{3}x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

이때 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-\sqrt{3}$,

$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$이므로

x^2의 계수가 1이고 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+\sqrt{3}x-3=0$이다.

따라서 $a=\sqrt{3}, b=-3$이므로

$a^2+b^2=3+9=12$ 답 ④

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}$이므로 $-\frac{1}{3}=\frac{k}{3}$ $\therefore k=-1$

0805

유형 06 두 동경의 위치 관계 – 좌표축 또는 직선에 대하여 대칭

|전략| 두 각 α, β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)임을 이용한다.

각 6θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$6\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$10\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta=\frac{4n+1}{20}\pi$ …… ㉠ … ❶

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{4n+1}{20}\pi<\pi$이므로

$10<4n+1<20$, $\frac{9}{4}<n<\frac{19}{4}$

$\therefore n=3$ 또는 $n=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{13}{20}\pi$ 또는 $\theta=\frac{17}{20}\pi$ … ❷

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{13}{20}\pi+\frac{17}{20}\pi=\frac{3}{2}\pi$ … ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	배점
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ θ의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ θ의 값의 합을 구할 수 있다.	1점

0806

유형 14 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

|전략| 주어진 식의 양변을 제곱하고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ … ❶

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$ … ❷

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ … ❸

답 $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

채점 기준	배점
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	2점

0807

유형 12 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식 간단히 하기

|전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용한다.

(1) $\frac{x}{\cos\theta}=1+\tan\theta$에서

$x=\cos\theta+\cos\theta\tan\theta=\cos\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\cos\theta+\sin\theta$ …… ㉠

$\frac{y}{\cos\theta}=1-\tan\theta$에서

$y=\cos\theta-\cos\theta\tan\theta=\cos\theta-\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\cos\theta-\sin\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\sin\theta=\frac{x-y}{2}$, $\cos\theta=\frac{x+y}{2}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=1$

$\frac{x^2-2xy+y^2}{4}+\frac{x^2+2xy+y^2}{4}=1$, $2x^2+2y^2=4$

$\therefore x^2+y^2=2$

따라서 점 (x, y)가 그리는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

답 (1) $\sin\theta=\frac{x-y}{2}$, $\cos\theta=\frac{x+y}{2}$ (2) $2\sqrt{2}\pi$

채점 기준	배점
(1) $\sin\theta$와 $\cos\theta$를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	5점
(2) 점 (x, y)가 그리는 도형의 길이를 구할 수 있다.	5점

창의·융합 실력 마스터

0808

| 전략 | $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$를 정리하여 x를 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$\log_2(\sin\theta\cos\theta)=-4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\frac{1}{16}$ …… ㉠

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$에서

$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-\log_2 16$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2\frac{x}{16}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{x}{16}$

$\therefore x=16(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=16(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

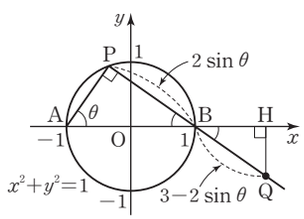
$=16(1+2\sin\theta\cos\theta)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x=16\cdot\left(1+2\cdot\frac{1}{16}\right)=18$ 답 18

0809

| 전략 | 삼각함수의 정의를 이용하여 도형의 길이를 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.



선분 AB가 원 $x^2+y^2=1$의 지름이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

이때 직각삼각형 ABP에서

$\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$이므로

$\overline{BQ}=3-2\sin\theta$

한편, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle APB=\angle QHB=\frac{\pi}{2}$, $\angle ABP=\angle QBH$이므로

$\triangle ABP\sim\triangle QBH$ (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{QB}=\overline{BP}:\overline{BH}$에서

$2:(3-2\sin\theta)=2\sin\theta:\overline{BH}$

$\therefore \overline{BH}=\sin\theta(3-2\sin\theta)$

즉, 점 Q의 x좌표는

$\overline{OB}+\overline{BH}=1+\sin\theta(3-2\sin\theta)$

$=-2\sin^2\theta+3\sin\theta+1$

$=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

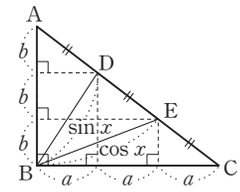
따라서 점 Q의 x좌표는 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때 최대이다. 답 $\frac{3}{4}$

0810

| 전략 | 점 D와 점 E에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 각각 수선의 발을 내린 다음 삼각형의 닮음을 이용한다.

오른쪽 그림에서

$\frac{1}{3}\overline{BC}=a$, $\frac{1}{3}\overline{AB}=b$라 하면



$\sin^2 x=a^2+(2b)^2$

$=a^2+4b^2$ …… ㉠

$\cos^2 x=(2a)^2+b^2$

$=4a^2+b^2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\sin^2 x+\cos^2 x=5a^2+5b^2$

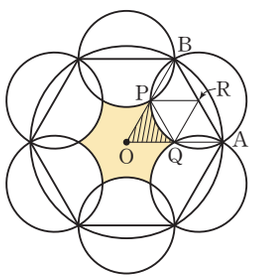
$1=5(a^2+b^2)$ $\therefore a^2+b^2=\frac{1}{5}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3b)^2}=3\sqrt{a^2+b^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

0811

| 전략 | 색칠한 도형을 6등분하여 정삼각형과 부채꼴의 넓이를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 S, 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S=6S_1$

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\triangle OAB=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 1인 정삼각형으로 4개로 이루어져 있으므로

$\triangle BPR=\triangle RQA=\frac{1}{4}\triangle OAB=\frac{\sqrt{3}}{4}$

정삼각형의 한 내각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

(부채꼴 RPQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$S_1=\triangle OAB-\{\triangle BPR+(\text{부채꼴 RPQ의 넓이})+\triangle RQA\}$

$=\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

$\therefore S=6S_1=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-\pi$ 답 ②

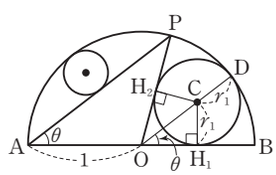
0812

| 전략 | $\angle BAP=\theta$로 놓고 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계, 원의 성질을 이용하여 r_1, r_2의 값을 구한다.

(i) [그림 1]과 같이 반지름의 길이가 r_1인 원의 중심을 C라 하고 호 BP와 직선 OC가 만나는 점을 D라 하자.

$\angle BAP=\theta$라 하면

$\angle BOP=2\theta$



[그림 1]

이때 점 C에서 선분 OB와 선분 OP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\triangle COH_1 \equiv \triangle COH_2$ (RHS 합동)이므로

$\angle COH_1 = \frac{1}{2}\angle BOP = \frac{1}{2}\cdot 2\theta = \theta$

$\overline{OD}=1$, $\overline{CD}=r_1$에서 $\overline{OC}=1-r_1$이므로

직각삼각형 COH_1에서

$\sin\theta = \frac{\overline{CH_1}}{\overline{OC}} = \frac{r_1}{1-r_1}$ ····· ㉠

한편, $\cos\theta=\frac{4}{5}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

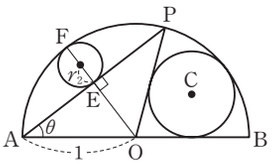
$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{r_1}{1-r_1}=\frac{3}{5}$이므로

$5r_1=3(1-r_1)$, $8r_1=3$ $\therefore r_1=\frac{3}{8}$

(ii) [그림 2]와 같이 선분 AP의 중점을 E라 하고, 호 AP와 직선 OE가 만나는 점을 F라 하자.

삼각형 AOP는 $\overline{OA}=\overline{OP}=1$인 이등변삼각형이고 점 E는 선분 AP의 중점이므로



[그림 2]

$\angle OEA=\frac{\pi}{2}$

$\overline{OF}=1$, $\overline{EF}=2r_2$에서 $\overline{OE}=1-2r_2$이므로

직각삼각형 AOE에서

$\sin\theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{AO}} = 1-2r_2$ ····· ㉢

이때 ㉡, ㉢에서 $1-2r_2=\frac{3}{5}$이므로

$2r_2=\frac{2}{5}$ $\therefore r_2=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 $r_1r_2=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$ 답 ①

0813

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a와 θ의 값을 구한다.

$x^2-\sqrt{3}x+2a=0$은 계수가 실수인 이차방정식이고 $\sin\theta$, $\cos\theta$가 실수이므로 한 근이 $\sin\theta-i\cos\theta$이면 다른 한 근은 $\sin\theta+i\cos\theta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta-i\cos\theta)+(\sin\theta+i\cos\theta)=\sqrt{3}$에서

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin\theta-i\cos\theta)(\sin\theta+i\cos\theta)=2a$에서

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=2a$, $2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

Lecture

계수가 실수인 이차방정식에서 한 근이 $a+bi$이면 다른 한 근은 $a-bi$이다.
(단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

6 삼각함수의 그래프

본책 106~125쪽

STEP 개념 마스터 1

0814

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(15)=f(13)=f(11)=\cdots=f(1)=1$ 답 1

0815

$f(x+3)=f(x)$이므로

$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)$

이때 $0\le x<3$에서 $f(x)=3-x$이므로

$f(10)=f(1)=3-1=2$ 답 2

0816

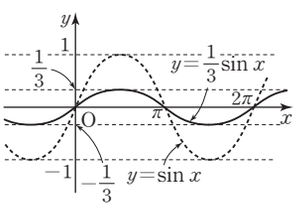
답 (가) -1 (나) 1 (다) π

0817

$-\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}\sin x\le\frac{1}{3}$이므로 치역은 $\left\{y\middle|-\frac{1}{3}\le y\le\frac{1}{3}\right\}$이다.

또, $\frac{1}{3}\sin x=\frac{1}{3}\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=\frac{1}{3}\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



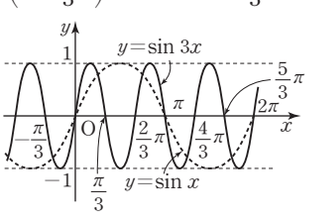
답 풀이 참조

0818

$-1\le\sin 3x\le 1$이므로 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

또, $\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$이므로 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 함수 $y=\sin 3x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

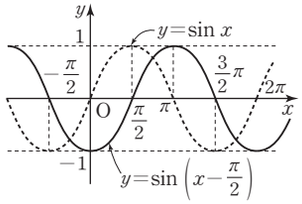
0819

함수 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\le 1$이므로 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

또, 함수 $y=\sin x$와 주기가 같으므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0820

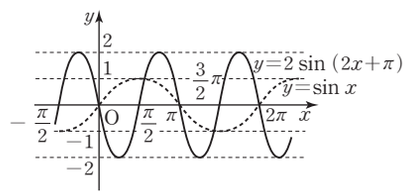
함수 $y=2\sin(2x+\pi)=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

$-2\le 2\sin(2x+\pi)\le 2$이므로 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$이다.

또, 함수 $y=2\sin 2x$와 주기가 같고

$2\sin 2x=2\sin(2x+2\pi)=2\sin 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.

따라서 함수 $y=2\sin(2x+\pi)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0821 답 (가) 실수 전체 (나) −1 (다) y축 (라) 2π

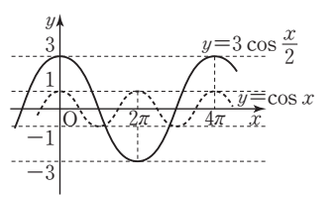
0822 답 (가) −2 (나) 2 (다) 2π

0823

$-3\le 3\cos\frac{x}{2}\le 3$이므로 치역은 $\{y\mid -3\le y\le 3\}$이다.

또, $3\cos\frac{x}{2}=3\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=3\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$이므로 주기는 4π이다.

따라서 함수 $y=3\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

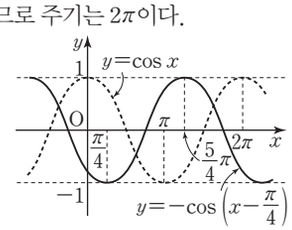
0824

함수 $y=-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=-\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le -\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$이므로 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.

또, 함수 $y=-\cos x$와 주기가 같으므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

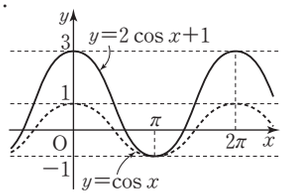
0825

함수 $y=2\cos x+1$의 그래프는 함수 $y=2\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le 2\cos x+1\le 3$이므로 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 3\}$이다.

또, 함수 $y=2\cos x$의 그래프와 주기가 같으므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=2\cos x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0826

함수 $y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{1}{2}(x+\pi)$의 그래프는 함수 $y=2\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이다.

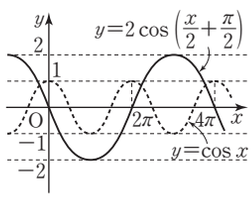
$-2\le 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\le 2$이므로 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$이다.

또, 함수 $y=2\cos\frac{x}{2}$와 주기가 같고

$y=2\cos\frac{x}{2}=2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=2\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$

이므로 주기는 4π이다.

따라서 함수 $y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0827 답 (가) $\frac{\pi}{2}$ (나) $\frac{n}{2}$ (다) $\frac{\pi}{4}$

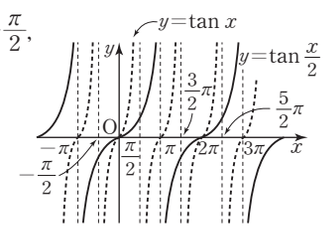
0828

$\tan\frac{x}{2}=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

또, 점근선의 방정식은 $\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$,

즉 $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0829

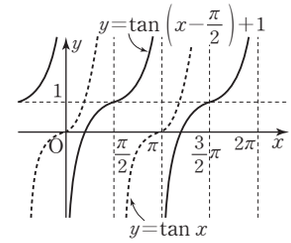
함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주기는 π이다.

또, 점근선의 방정식은

$x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$,

즉 $x=n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0830

함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x+1$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x$와 주기가 같고

$\frac{1}{3}\tan 3x=\frac{1}{3}\tan(3x+\pi)=\frac{1}{3}\tan 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

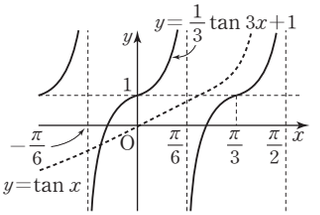
이므로 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

또, 점근선의 방정식은

$3x=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$

(n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0831

$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$에서

최댓값은 $|3|=3$, 최솟값은 $-|3|=-3$

주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

답 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: π

0832

$y=-\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+2$에서

최댓값은 $|-1|+2=3$, 최솟값은 $-|-1|+2=1$

주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

답 최댓값: 3, 최솟값: 1, 주기: $\frac{\pi}{2}$

0833

$y=4\tan(2\pi x-\pi)+1$에서

최댓값, 최솟값은 없고

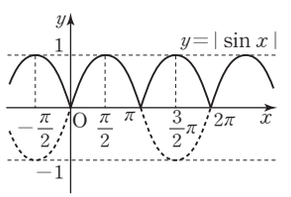
주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{1}{2}$

0834

함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 π이다.



답 π

Lecture

절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

(1) 함수 $y=|f(x)|$의 그래프

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

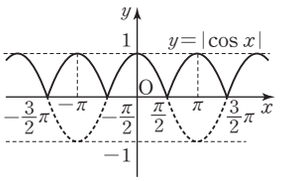
(2) 함수 $y=f(|x|)$의 그래프

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

0835

함수 $y=|\cos x|$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=|\cos x|$의 주기는 π이다.

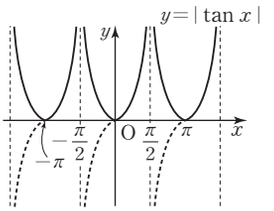


답 π

0836

함수 $y=|\tan x|$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

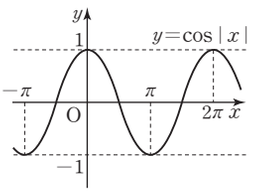


답 π

0837

함수 $y=\cos|x|$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다.



답 2π

0838

(1) $\sin\frac{17}{4}\pi=\sin\left(2\pi\cdot 2+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan 750^\circ=\tan(360^\circ\cdot 2+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0839

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0840

(1) $\cos\frac{5}{3}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(2) $\tan 315^\circ=\tan(360^\circ-45^\circ)=\tan(-45^\circ)$

$=-\tan 45^\circ=-1$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1

0841

(1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{3}$

0842

(1) $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

답 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

0843

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\sqrt{3}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

유형 01 주기함수 개념 01

(1) 함수 $f(x)$는 주기가 p인 주기함수이다.
⇨ $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=f(x+3p)=\cdots$

(2) 함수 $f(x)$는 주기가 $2a$인 주기함수이다.
⇨ $f(x)=f(x+2a) \Longleftrightarrow f(x-a)=f(x+a)$

0844

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)=f(x)$
$\therefore f(p)=f(0)=\cos 0+\sin 0+\tan 0=1+0+0=1$

답 ④

0845

조건 (가)에서 $f(15)=f(11)=f(7)=f(3)$
조건 (나)에서 $f(15)=f(3)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

답 -1

0846

모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$을 만족시키므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면 $f(x+2)=f(x)$
$\therefore f(150)=f(148)=f(146)=\cdots=f(4)=-3$
$f(181)=f(179)=f(177)=\cdots=f(3)=2$
$\therefore 2f(150)-f(181)=2\cdot(-3)-2=-8$

답 ①

0847

$f(x+2)=f(x)$이므로
$f\left(100-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(98-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(96-\frac{\pi}{4}\right)=\cdots=f\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$
이때 $0<\frac{\pi}{4}<1$이므로 $1<2-\frac{\pi}{4}<2$
$\therefore f\left(2-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left\{2-\left(2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}=1$ … ❶
$f\left(100+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(98+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(96+\frac{\pi}{4}\right)=\cdots=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$
이때 $0<\frac{\pi}{4}<1$이므로 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ … ❷
$\therefore f\left(100-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(100+\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$ … ❸

답 2

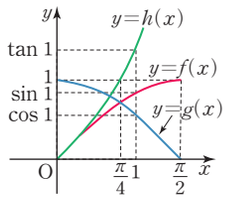
채점 기준	비율
❶ $f\left(100-\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f\left(100+\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f\left(100-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(100+\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 02 삼각함수의 값의 대소 비교 개념 02~04

삼각함수의 그래프를 이용하여 대소를 비교한다.

0848

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서
$\cos 1<\sin 1<\tan 1$
$\therefore g(1)<f(1)<h(1)$



답 ③

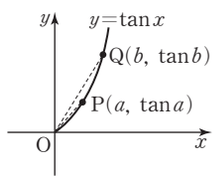
0849

$\frac{\pi}{5}<1<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값도 증가하므로
$\sin\frac{\pi}{5}<\sin 1<\sin\frac{3}{2}$

답 ③

0850

$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$0<a<b<\frac{\pi}{2}$인 함수 $y=\tan x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\tan a)$, $\mathrm{Q}(b,\tan b)$와 원점 O에 대하여
($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)<($\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기)이고



($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)$=\frac{\tan a}{a}$, ($\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기)$=\frac{\tan b}{b}$이므로
$\frac{\tan a}{a}<\frac{\tan b}{b}$
따라서 $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$이므로
$\frac{\tan\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}<\frac{\tan\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}<\frac{\tan\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$
$5\tan\frac{1}{5}<4\tan\frac{1}{4}<3\tan\frac{1}{3}$
$\therefore C<B<A$

답 $C<B<A$

0851

$A-B=(x\sin y+y\sin x)-(x\cos x+y\cos y)$
$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$
$0<x<\frac{\pi}{6}$, $0<y<\frac{\pi}{6}$인 모든 실수 x, y에 대하여
$\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x$, $\sin y<\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos y$이므로
$\sin y<\cos x$, $\sin x<\cos y$
$\sin y-\cos x<0$, $\sin x-\cos y<0$
따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로
$A-B<0$ $\quad\therefore A<B$

답 $A<B$

유형 03 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 개념 02~04

(1) 함수 $y=a\sin(bx+c)+d=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$의 그래프

⇨ 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

(2) 방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을

x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 ⇨ $f(x,-y)=0$

y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 ⇨ $f(-x,y)=0$

0852

함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=\sin 2(x-a)$ $\therefore y=\sin(2x-2a)+b$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sin(2x-4)+3$의 그래프와 겹쳐지므로

$2a=4, b=3$ $\therefore a=2, b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$ 답 ③

0853

함수 $y=\tan 2\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\tan\left\{2\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}-2$

따라서 $f(x)=\tan\left\{2\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}-2$이므로

$f\left(\frac{5}{8}\right)=\tan\left\{2\pi\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\right)\right\}-2=\tan\frac{\pi}{4}-2=1-2=-1$

답 -1

0854

함수 $y=-\cos\pi x+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\cos\pi x+3$ $\therefore y=\cos\pi x-3$ … ❶

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=\cos\pi x-3$ $\therefore y=\cos\pi x-8$ … ❷

따라서 $a=1, b=-8$이므로 $a-b=1-(-8)=9$ … ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0855

① 함수 $y=\cos 2x-1$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

② 함수 $y=\cos(2x-4\pi)=\cos 2(x-2\pi)$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 2π만큼 평행이동한 것이다.

③ 함수 $y=-2\cos 2x+5$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축에 대하여 대칭이동하고, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y=\cos(2x-\pi)+3=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+3$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=-\cos(2x+3\pi)+1=-\cos 2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+1$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}\pi$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

유형 04 삼각함수의 최대·최소와 주기 개념 05

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

0856

주어진 함수의 주기를 각각 구하면

① $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}=2\sqrt{2}$ ③ $\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}=2\sqrt{2}$

④ $\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\pi}{\pi}=2$

따라서 $f(x+\sqrt{2})=f(x)$를 만족시키는 함수는 ④이다. 답 ④

0857

$p=\frac{2\pi}{\lvert-2\pi\rvert}=1, M=\lvert-3\rvert+5=8, m=-\lvert-3\rvert+5=2$

$\therefore p+M+m=1+8+2=11$ 답 11

0858

함수 $y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sin\left\{3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+1$

이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$이므로 $a=\frac{2}{3}\pi$

최댓값은 $\lvert2\rvert+1=3$이므로 $b=3$

$\therefore ab=\frac{2}{3}\pi\cdot3=2\pi$ 답 2π

0859

주어진 함수의 주기를 각각 구하면

① $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\frac{2\pi}{2}=\pi$

④ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ⑤ π

이때 $f(x+\pi)=f(x)$를 만족시키는 함수는 ②, ③, ⑤이고 이 중에서 $-3\le f(x)\le 3$을 만족시키는 함수는 ②, ③이다.

또, $f(-x)=f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 함수는 ②이다. 답 ②

유형 05 삼각함수의 그래프의 성질 개념 02~05

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합
치역	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	실수 전체의 집합
대칭성	원점에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭	원점에 대하여 대칭
주기	2π	2π	π

0860

① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $|2|+2=4$, 최솟값은 $-|2|+2=0$이다.

③ $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2\sin 2x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

④ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2=2\sin\pi+2=2$

⑤ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+2=2\sin 0+2=2$

$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2\sin\left(\frac{5}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2=2\sin 2\pi+2=2$

$\therefore f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

0861

ㄱ. 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $f(x+\pi)=f(x)$ (거짓)

ㄴ. 최솟값은 $-|2|-1=-3$이다. (참)

ㄷ. 그래프는 함수 $y=2\cos 2x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있다. (거짓)

ㄹ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)-1=2\cos\frac{\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$

이므로 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0862

ㄱ. 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다. (거짓)

ㄴ. $2x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$이므로 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (n은 정수)이다. (참)

ㄷ. 최댓값은 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ㄴ

Lecture

함수 $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프와 성질

(1) 주기 : $\frac{\pi}{|b|}$

(2) 점근선의 방정식 : $bx+c=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

(3) 함수 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

유형 06 삼각함수의 미정계수의 결정 – 조건이 주어진 경우 개념 05

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$

⇨ a, d : 삼각함수의 최댓값, 최솟값 또는 함숫값을 이용하여 구한다.

b : 삼각함수의 주기를 이용하여 구한다.

c : 함숫값 또는 평행이동을 이용하여 구한다.

(2) $y=a\tan(bx+c)+d$

⇨ a, d : 함숫값을 이용하여 구한다.

b : 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용하여 구한다.

c : 함숫값 또는 평행이동을 이용하여 구한다.

0863

주어진 함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore b=3$

$\therefore f(x)=a\cos 3x+c$

함수의 최댓값이 3이고 $a<0$이므로

$-a+c=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1$에서 $a\cos 2\pi+c=-1$이므로

$a+c=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $c=1$

$\therefore abc=-2\cdot 3\cdot 1=-6$ 답 -6

0864

주어진 함수의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+b=5$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$에서 $a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{7}{2}$이므로

$\frac{1}{2}a+b=\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore a-b=3-2=1$ 답 ①

0865

주어진 함수의 주기가 4π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=4\pi$ $\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-c$

함수의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로 $a-c=3$ ····· ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$에서 $a\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-c=0$이므로

$-a\sin\frac{\pi}{6}-c=0$ $\therefore -\frac{1}{2}a-c=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-1$

따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-|2|+1=-1$ 답 -1

0866

주어진 함수의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=2\pi$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ … ❶

따라서 $f(x)=3\tan\left(\frac{x}{2}+b\right)-4$이므로 점근선의 방정식은

$\frac{x}{2}+b=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=2n\pi+\pi-2b$ (n은 정수)에서

$\pi-2b=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<b<\pi$) $\therefore b=\frac{\pi}{4}$ … ❷

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ … ❸

답 $\frac{\pi}{8}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 07 삼각함수의 미정계수의 결정 – 그래프가 주어진 경우

개념 02~05

주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값과 그래프가 지나는 점의 좌표를 찾고 이를 이용하여 삼각함수의 미정계수를 구한다.

0867

주어진 함수의 주기가 $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore b=3$

함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+d=3$, $-a+d=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=1$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(3x+c)+1$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=2\sin c+1$ $\therefore \sin c=0$

$0<c<2\pi$이므로 $c=\pi$

$\therefore abcd=2\cdot3\cdot\pi\cdot1=6\pi$ 답 6π

0868

주어진 함수의 주기가 $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\tan\left(\frac{3}{2}x+b\right)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로 $\tan b=0$

이때 $0<b<2\pi$이므로 $b=\pi$

$\therefore ab=\frac{3}{2}\cdot\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

0869

주어진 함수의 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 $-\frac{1}{2}$이고 $a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=a\cos(bx+c)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=4$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\frac{1}{2}\cos(4x+c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{2}\cos c$ $\therefore \cos c=0$

이때 $0<c<\pi$이므로 $c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$ 답 π

유형 08 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프

개념 05

(1) 함수 $y=|f(x)|$의 그래프

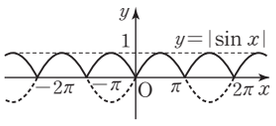
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

(2) 함수 $y=f(|x|)$의 그래프

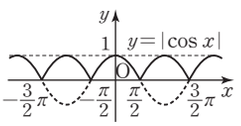
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

0870

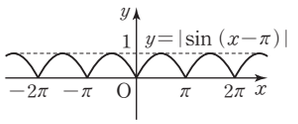
함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



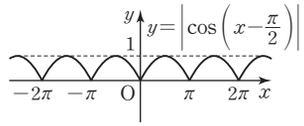
ㄱ. 함수 $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 함수 $y=|\sin(x-\pi)|$의 그래프는 함수 $y=|\sin x|$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. 함수 $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 함수 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

Lecture

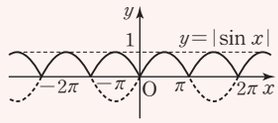
(1) 함수 $y=|\sin x|$의 그래프

① 최댓값: 1

② 최솟값: 0

③ 주기: π

④ 대칭성: y축에 대하여 대칭



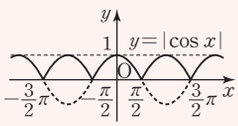
(2) 함수 $y=|\cos x|$의 그래프

① 최댓값: 1

② 최솟값: 0

③ 주기: π

④ 대칭성: y축에 대하여 대칭



0871

함수 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

ㄱ. 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

ㄴ. 함수 $y=\tan\frac{x}{2}+1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이다.

ㄷ. 함수 $y=|\cos x|+2$의 주기는 함수 $y=|\cos x|$의 주기와 같으므로 π이다.

ㄹ. 함수 $y=\sin|x|$는 주기함수가 아니므로 함수 $y=3\sin|x|$도 주기함수가 아니다.

따라서 함수 $y=|\tan x|$와 주기가 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0872

함수 $f(x)=3\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|+1$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=2\pi$ $\therefore a=2\pi$

또, $0\le\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|\le1$이므로 $0\le3\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|\le3$

$\therefore 1\le3\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|+1\le4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로

$b=4$, $c=1$

$\therefore abc=2\pi\cdot4\cdot1=8\pi$ 답 8π

참고 함수 $f(x)=3\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|+1$의 주기는 함수 $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$의 주기와 같다. 그런데 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로 함수 $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$의 주기는 $4\pi\cdot\frac{1}{2}=2\pi$이다.

0873

주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=3$

$\therefore f(x)=a|\sin3x|+c$

함수의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ ····· ㉠

$f\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{7}{2}$에서 $a\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+c=\frac{7}{2}$이므로

$\frac{1}{2}a+c=\frac{7}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$\therefore a+b-c=3+3-2=4$ 답 ④

유형 09 삼각함수의 그래프의 대칭성 개념 02-04

(1) 삼각함수 $f(x)=\sin x\ (0\le x<\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ (단, $a\ne b$, $0<k<1$)

⇨ $a+b=\pi$

(2) 삼각함수 $f(x)=\cos x\ (0\le x<2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ (단, $a\ne b$, $-1<k<1$)

⇨ $a+b=2\pi$

0874

함수 $y=\sin x$의 그래프에서

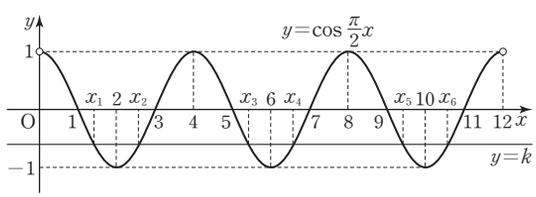
$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $a+b=\pi$

$\frac{c+d}{2}=\frac{5}{2}\pi$이므로 $c+d=5\pi$

$\therefore \frac{c+d}{a+b}=\frac{5\pi}{\pi}=5$ 답 5

0875

함수 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$



함수 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=2$이므로 $x_1+x_2=4$

$\frac{x_3+x_4}{2}=6$이므로 $x_3+x_4=12$

$\frac{x_5+x_6}{2}=10$이므로 $x_5+x_6=20$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=36$

따라서 $n=6$이므로 구하는 값은 $\frac{36}{6}=6$ 답 6

0876

함수 $y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\pi$이므로 $a+c=2\pi$ … ❶

함수 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $b+d=3\pi$ … ❷

$\therefore \cos(b-a+d-c)=\cos\{(b+d)-(a+c)\}$

$=\cos(3\pi-2\pi)=\cos\pi=-1$ … ❸

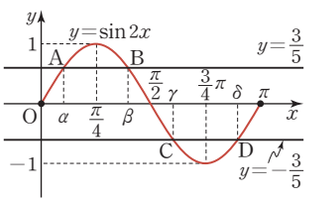
답 -1

채점 기준	비율
❶ $a+c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $b+d$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\cos(b-a+d-c)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0877

함수 $y=\sin 2x$의 주기는

$\frac{2\pi}{2}=\pi$



두 점 A, D는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha+\delta=\pi$

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma=\pi$

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\delta)+2(\beta+\gamma)$

$=\pi+2\pi=3\pi$

답 ③

다른 풀이 함수 $y=\sin 2x$의 그래프에서

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta+\gamma=\pi$

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$이므로 $\gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

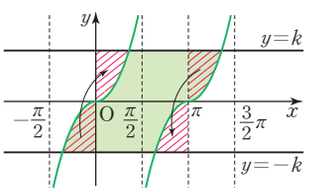
$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$

0878

오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수

$y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$

의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 가로의 길이가 π, 세로의 길이가 $2k$인 직사각형의 넓이와 같다.



즉, $2k\pi=6\pi$이므로 $k=3$

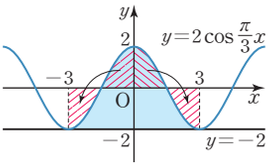
답 ⑤

참고 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 주기가 π인 주기함수이므로 그림에서 빗금친 네 부분의 넓이가 모두 같다.

0879

오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수

$y=2\cos\frac{\pi}{3}x\ (-3\le x\le 3)$의 그래프와 직선 $y=-2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같다.



$\therefore$ (구하는 넓이)$=6\cdot 2=12$

답 12

유형 10 일반각에 대한 삼각함수의 성질 개념 06

각이 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$($n$은 정수) 꼴인 삼각함수에서

(i) n이 짝수일 때, sin ⇨ sin, cos ⇨ cos, tan ⇨ tan

n이 홀수일 때, sin ⇨ cos, cos ⇨ sin, tan ⇨ $\frac{1}{\tan}$

(ii) θ를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서의 원래 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

0880

$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin\frac{2}{3}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{10}{3}\pi=\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\cos\frac{13}{4}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{7}{4}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore A=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$

$\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan(-135^\circ)=-\tan 135^\circ=-\tan(180^\circ-45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

$\therefore B=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 1=1$

$\therefore A+B=-1+1=0$

답 0

0881

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

0882

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{-\sin\theta}{-\cos^3\theta}-\frac{-\sin\theta(1+\tan^2\theta)}{-\cos\theta}$

($1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$)

$=\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}=0$

답 ③

0883

직선 $x-3y+3=0$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{3}$ … ❶

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ … ❷

$\therefore$ (주어진 식) $=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta=-\frac{1}{3}$ … ❸

답 $-\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식의 각 항을 θ에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 11 일반각에 대한 삼각함수의 성질 – 일정하게 증가하는 각 개념 06

삼각함수를 포함한 식에서 각의 크기가 여러 가지인 경우 각의 크기의 합이 $\frac{\pi}{2}$인 것끼리 짝을 지어 각을 변형한다.

⇨ $A+B=\frac{\pi}{2}$일 때, $B=\frac{\pi}{2}-A$

(1) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(2) $\tan A\times\tan B=\tan A\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\tan A\times\frac{1}{\tan A}=1$

0884

ㄱ. $\sin 89^\circ=\sin(90^\circ-1^\circ)=\cos 1^\circ$

$\sin 88^\circ=\sin(90^\circ-2^\circ)=\cos 2^\circ$

$\vdots$

$\sin 46^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\cos 44^\circ$

$\therefore \sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=1\cdot 44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2$

$=\frac{91}{2}$ (거짓)

ㄴ. $\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ$

$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$

$\cos 60^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ$

$\cos 50^\circ=\cos(90^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

$\therefore \cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cdots+\cos^2 70^\circ+\cos^2 80^\circ$

$=(\cos^2 10^\circ+\cos^2 80^\circ)+(\cos^2 20^\circ+\cos^2 70^\circ)$

$+(\cos^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ)+(\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ)$

$=(\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ)+(\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ)$

$+(\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ)+(\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ)$

$=1\cdot 4=4$ (참)

ㄷ. $\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$

$=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)$

$\times\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ$

$=\left(\tan 1^\circ\times\frac{1}{\tan 1^\circ}\right)\times\left(\tan 2^\circ\times\frac{1}{\tan 2^\circ}\right)$

$\times\cdots\times\left(\tan 44^\circ\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\right)\times\tan 45^\circ$

$=1\times 1\times\cdots\times 1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0885

$\theta=\frac{\pi}{50}$에서 $25\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin 24\theta=\sin(25\theta-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\sin 23\theta=\sin(25\theta-2\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos 2\theta$

$\vdots$

$\sin 13\theta=\sin(25\theta-12\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-12\theta\right)=\cos 12\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\sin^2\theta+\sin^2 24\theta)+(\sin^2 2\theta+\sin^2 23\theta)$

$+\cdots+(\sin^2 12\theta+\sin^2 13\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$

$+\cdots+(\sin^2 12\theta+\cos^2 12\theta)$

$=1\cdot 12=12$ 답 12

0886

$\tan 87^\circ=\tan(90^\circ-3^\circ)=\frac{1}{\tan 3^\circ}$

$\tan 83^\circ=\tan(90^\circ-7^\circ)=\frac{1}{\tan 7^\circ}$

$\tan 67^\circ=\tan(90^\circ-23^\circ)=\frac{1}{\tan 23^\circ}$

$\tan 63^\circ=\tan(90^\circ-27^\circ)=\frac{1}{\tan 27^\circ}$

$\tan 47^\circ=\tan(90^\circ-43^\circ)=\frac{1}{\tan 43^\circ}$

$\therefore AB=(\tan 3^\circ\times\tan 87^\circ)\times(\tan 23^\circ\times\tan 67^\circ)$

$\times(\tan 43^\circ\times\tan 47^\circ)\times(\tan 63^\circ\times\tan 27^\circ)$

$\times(\tan 83^\circ\times\tan 7^\circ)$

$=\left(\tan 3^\circ\times\frac{1}{\tan 3^\circ}\right)\times\left(\tan 23^\circ\times\frac{1}{\tan 23^\circ}\right)$

$\times\left(\tan 43^\circ\times\frac{1}{\tan 43^\circ}\right)\times\left(\frac{1}{\tan 27^\circ}\times\tan 27^\circ\right)$

$\times\left(\frac{1}{\tan 7^\circ}\times\tan 7^\circ\right)$

$=1\times 1\times 1\times 1\times 1=1$ 답 1

0887

$\theta=\frac{\pi}{20}$에서 $10\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos 9\theta=\cos(10\theta-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$이고,

$\cos 8\theta=\sin 2\theta$, $\cos 7\theta=\sin 3\theta$, $\cos 6\theta=\sin 4\theta$

$\cos 5\theta=\cos 5\cdot\frac{\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 5\theta=\sin 5\cdot\frac{\pi}{20}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

또, $\sin 6\theta=\sin(10\theta-4\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\theta\right)=\cos 4\theta$이고,

$\sin 7\theta=\cos 3\theta$, $\sin 8\theta=\cos 2\theta$, $\sin 9\theta=\cos\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\sin^2 4\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$+\cos^2 4\theta+\cos^2 3\theta+\cos^2 2\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$

$+(\sin^2 3\theta+\cos^2 3\theta)+(\sin^2 4\theta+\cos^2 4\theta)+\frac{1}{2}$

$=1\cdot 4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

유형 12 일반각에 대한 삼각함수의 성질 – 도형에의 활용 개념 06

삼각함수 사이의 관계와 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

⇨ 삼각형 ABC가 주어지는 경우, 세 내각의 크기의 합은 π이므로

(1) $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

(2) $C=\frac{\pi}{2}$이면 $A+B=\frac{\pi}{2}$

0888

선분 AB가 원 O의 지름이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

또, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 $2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha$

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0889

$A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

ㄱ. $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{\pi-A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$ (참)

ㄴ. $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$ (거짓)

ㄷ. $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$이므로

$-\cos A>0$에서 $\cos A<0$ $\therefore \frac{\pi}{2}<A<\pi$

즉, 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0890

$5\theta=\pi$이므로

$\sin 2\theta+\sin 7\theta+\cos\theta+\cos 4\theta$

$=\sin 2\theta+\sin(\pi+2\theta)+\cos\theta+\cos(\pi-\theta)$

$=\sin 2\theta-\sin 2\theta+\cos\theta-\cos\theta=0$ 답 ③

유형 13 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 – 일차식 꼴 개념 05, 06

(1) 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 최대·최소

⇨ $0\le|\sin x|\le 1$, $0\le|\cos x|\le 1$임을 이용한다.

(2) 두 종류 이상의 삼각함수를 포함하고 있는 삼각함수의 최대·최소

⇨ 한 종류의 삼각함수로 변형한다.

0891

$-1\le\cos 2x\le 1$이므로

$-2\le\cos 2x-1\le 0$, $0\le|\cos 2x-1|\le 2$

$\therefore b\le a|\cos 2x-1|+b\le 2a+b$ ($\because a>0$)

이때 최댓값은 $2a+b$, 최솟값은 b이므로

$2a+b=6$, $b=-2$ $\therefore a=4$, $b=-2$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$ 답 2

0892

$-1\le\sin x\le 1$이므로

$-3\le\sin x-2\le -1$, $1\le|\sin x-2|\le 3$

$\therefore -3+k\le-|\sin x-2|+k\le -1+k$

따라서 최댓값은 $-1+k$, 최솟값은 $-3+k$이고 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$(-1+k)+(-3+k)=6$, $2k-4=6$

$\therefore k=5$ 답 ⑤

0893

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos x-1$

$=\cos x-2\cos x-1$

$=-\cos x-1$

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $-2\le-\cos x-1\le 0$

따라서 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 차는 2이다. 답 ②

0894

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x+\pi)+a$

$=3\sin x+\sin x+a$

$=4\sin x+a$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $-4+a\le 4\sin x+a\le 4+a$

이때 최댓값이 6이므로 $4+a=6$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 함수의 최솟값은

$-4+2=-2$ 답 ①

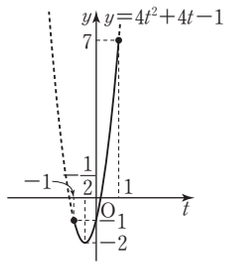
유형 14 삼각함수를 포함한 함수의 최대 · 최소 – 이차식 꼴

개념 05, 06

(i) 주어진 식을 한 종류의 삼각함수의 식으로 변형한다.
(ii) 삼각함수를 t로 치환하고 t의 값의 범위를 구한다.
(iii) 이차함수의 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

0895

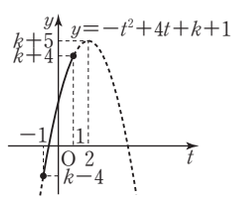
$y=-4\cos^2 x+4\sin x+3$
$=-4(1-\sin^2 x)+4\sin x+3$
$=4\sin^2 x+4\sin x-1$
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=4t^2+4t-1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2$
오른쪽 그림에서
$t=1$일 때, 최댓값은 $M=7$
$t=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 $m=-2$
$\therefore M+m=7+(-2)=5$



답 ⑤

0896

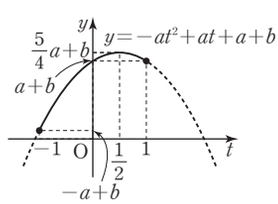
$y=\sin^2 x+4\cos x+k$
$=(1-\cos^2 x)+4\cos x+k$
$=-\cos^2 x+4\cos x+k+1$
$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-t^2+4t+k+1$
$=-(t-2)^2+k+5$
오른쪽 그림에서
$t=1$일 때 최댓값은 $k+4$
$t=-1$일 때 최솟값은 $k-4$
이때 최댓값과 최솟값의 합이 4이므로
$(k+4)+(k-4)=4,\ 2k=4$
$\therefore k=2$



답 ②

0897

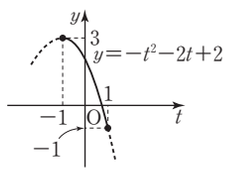
$y=a\cos^2 x+a\sin x+b$
$=a(1-\sin^2 x)+a\sin x+b$
$=-a\sin^2 x+a\sin x+a+b$
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-at^2+at+a+b$
$=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$
$a>0$이므로 오른쪽 그림에서
$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}a+b$
$\therefore \frac{5}{4}a+b=10$ ····· ㉠
$t=-1$일 때 최솟값은 $-a+b$
$\therefore -a+b=1$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=5$
$\therefore a+b=4+5=9$



답 9

0898

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x,\ \sin(\pi+x)=-\sin x$이므로
$y=\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+2\cos^2 x+2\sin(\pi+x)$
$=\sin^2 x+2(1-\sin^2 x)-2\sin x$
$=-\sin^2 x-2\sin x+2$ ····· ❶
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-t^2-2t+2$
$=-(t+1)^2+3$ ····· ❷
오른쪽 그림에서
$t=-1$일 때 최댓값은 $M=3$
$t=1$일 때 최솟값은 $m=-1$ ····· ❸
$\therefore M+m=3+(-1)=2$ ····· ❹



답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\sin x$에 대한 식으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ $\sin x=t$로 놓고 함수식을 변형할 수 있다.	30 %
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

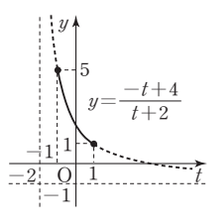
유형 15 삼각함수를 포함한 함수의 최대 · 최소 – 분수식 꼴

개념 05

(i) 주어진 식에 포함된 삼각함수를 t로 치환한다.
(ii) t의 값의 범위를 구한다.
(iii) 유리함수의 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

0899

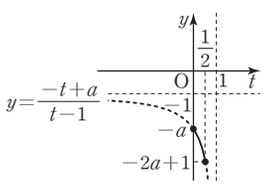
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=\frac{-t+4}{t+2}=\frac{-(t+2)+6}{t+2}$
$=\frac{6}{t+2}-1$
오른쪽 그림에서
$t=-1$일 때 최댓값은 $M=5$
$t=1$일 때 최솟값은 $m=1$
$\therefore M^2+m^2=5^2+1^2=26$



답 ②

0900

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le t\le\frac{1}{2}$이고
$y=\frac{-t+a}{t-1}=\frac{-(t-1)+a-1}{t-1}$
$=\frac{a-1}{t-1}-1$
이때 $a>1$이므로 $a-1>0$
오른쪽 그림에서
$t=0$일 때 최댓값은 $-a$이므로
$-a=-2$ $\therefore a=2$



답 2

0901

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $0\le t\le\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$$y=\frac{2t+1}{t-1}=\frac{2(t-1)+3}{t-1}$$

$$=\frac{3}{t-1}+2$$

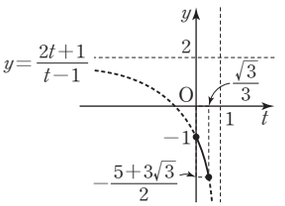
오른쪽 그림에서

$t=0$일 때 최댓값은 -1,

$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값은 $-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

이므로 구하는 치역은

$\left\{y\middle|-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\le y\le-1\right\}$



답 $\left\{y\middle|-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\le y\le-1\right\}$

0902

$|\sin x|=t$로 놓으면 $0\le t\le1$이고

$$y=\frac{t+1}{2t+1}=\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서

$t=0$일 때 최댓값은 1,

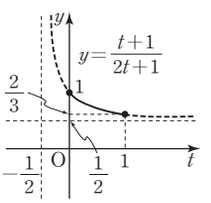
$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$

이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\middle|\frac{2}{3}\le y\le1\right\}$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=1$이므로

$\beta-\alpha=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$



답 ③

STEP 1 개념 마스터 ❷

0903 답 (가) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (나) $\frac{\pi}{4}$ (다) $\frac{3}{4}\pi$

0904

$2\sin x-1=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

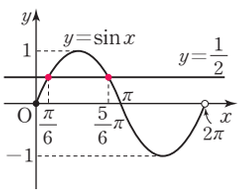
오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서

함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$



답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

0905

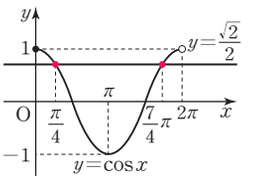
오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서

함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$

이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$



답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0906

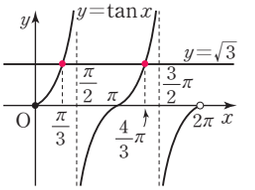
오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서

함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선

$y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$

이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



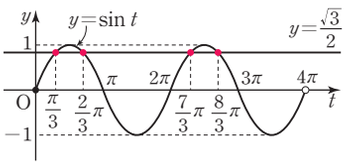
답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

0907

$2\sin2x=\sqrt{3}$에서 $\sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고

주어진 방정식은 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{8}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

0908

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고

주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

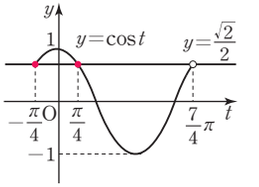
오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표가 $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$

이므로

$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$



답 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

0909

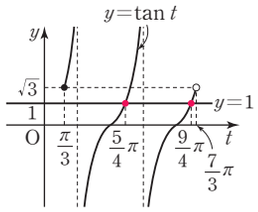
$x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고

주어진 방정식은 $\tan t=1$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서

함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$

의 교점의 t좌표가 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$이므로



$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{9}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

답 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

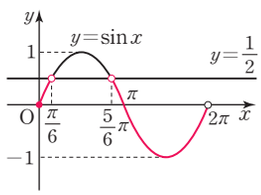
0910

부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해는 함수

$y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가

직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분

의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$

0911

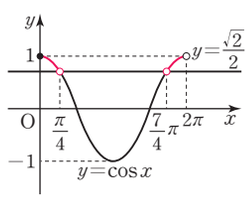
$2\cos x>\sqrt{2}$에서 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

부등식 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수

$y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가

직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의

x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

0912

$\tan x-\sqrt{3}\ge 0$에서 $\tan x\ge\sqrt{3}$

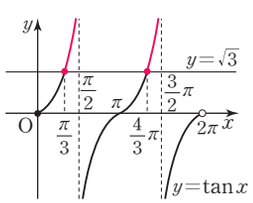
부등식 $\tan x\ge\sqrt{3}$의 해는 함수

$y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가

직선 $y=\sqrt{3}$과 만나거나 직선보다 위

쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므

로 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 16 삼각함수를 포함한 방정식 – 일차식 꼴 개념 07

(1) $\sin x=k$ (또는 $\cos x=k$ 또는 $\tan x=k$) 꼴의 방정식

⇨ 함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

(2) $\sin(ax+b)=k$ 꼴의 방정식

⇨ $ax+b=t$로 치환한 다음 (1)과 같은 방법으로 푼다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

0913

$\frac{\pi}{3}+x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고

주어진 방정식은 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore t=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{9}{4}\pi$

즉, $\frac{\pi}{3}+x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{3}+x=\frac{9}{4}\pi$이므로

$x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{5}{12}\pi+\frac{23}{12}\pi=\frac{7}{3}\pi$

답 $\frac{7}{3}\pi$

0914

$4x=t$로 놓으면 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $0\le t<2\pi$이고

주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$

즉, $4x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $4x=\frac{7}{4}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{16}$ 또는 $x=\frac{7}{16}\pi$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{7}{16}\pi\right)$

$=\sin\frac{\pi}{2}=1$

답 1

0915

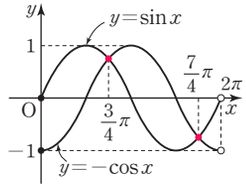
$\sin x+\cos x=0$에서

$\sin x=-\cos x$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서

두 함수 $y=\sin x$, $y=-\cos x$의 그래

프의 교점의 x좌표가 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 ⑤

다른 풀이 $\cos x=0$이면 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=1$이므로 주어진 방정식이 성립하지 않는다.

즉, $0\le x<2\pi$일 때, $\sin x+\cos x=0$에서 $\sin x=-\cos x$이고, $\cos x\ne 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면 $\tan x=-1$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0916

$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $2\pi\le x<4\pi$에서 $\frac{4}{3}\pi\le t<\frac{7}{3}\pi$이고

주어진 방정식은 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

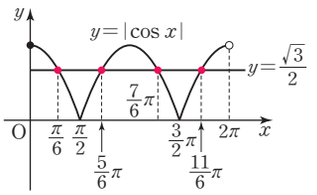
즉, $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=2\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $2\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$ 답 ④

0917

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표는



$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{11}{6}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

다른 풀이 $|\cos x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$에서

(i) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

(ii) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{11}{6}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{6}$이므로 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$

0918

$\pi\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-1\le\cos x\le1$, $-\pi\le\pi\cos x\le\pi$ $\therefore -\pi\le t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t=1$이므로 $t=\frac{\pi}{2}$

즉, $\pi\cos x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 두 근의 차는 $\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ 답 ③

유형 17 삼각함수를 포함한 방정식 – 이차식 꼴 개념 07

$\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 변형한 다음 해를 구한다.

0919

$2\cos^2x+\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2x)+\sin x-1=0$, $2\sin^2x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$ $\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

이때 $0\le x<2\pi$에서

(i) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$ 답 $\frac{7}{2}\pi$

0920

$1-2\cos x=\sqrt{4-4\cos x}$에서 $\sqrt{4-4\cos x}\ge0$이므로

$1-2\cos x\ge0$ $\therefore \cos x\le\frac{1}{2}$ …… ㉠

$1-2\cos x=\sqrt{4-4\cos x}$의 양변을 제곱하면

$1-4\cos x+4\cos^2x=4-4\cos x$, $4\cos^2x-3=0$

$\cos^2x=\frac{3}{4}$ $\therefore \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because$ ㉠)

$0\le x<2\pi$에서 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 답 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

0921

$\cos x=\sin x-1$의 양변을 제곱하면

$\cos^2x=\sin^2x-2\sin x+1$

$1-\sin^2x=\sin^2x-2\sin x+1$, $2\sin^2x-2\sin x=0$

$\sin x(\sin x-1)=0$ $\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=1$ … ❶

이때 $0\le x<\pi$에서

(i) $\sin x=0$일 때, $x=0$

(ii) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

그런데 $x=0$은 주어진 방정식을 만족시키지 않으므로 $x=\frac{\pi}{2}$ … ❷

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ … ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 방정식을 만족시키는 $\sin x$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0922

$2\cos^2x-1=0$에서 $\cos^2x=\frac{1}{2}$

$\therefore \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

이때 $\sin x\cos x<0$을 만족시키려면 $\sin x>0$이어야 하므로

$0<x<\pi$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$

(ii) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

이때 $\sin x\cos x<0$을 만족시키려면 $\sin x<0$이어야 하므로

$\pi<x<2\pi$에서 $x=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$이므로 모든 x의 값의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$ 답 $\frac{5}{2}\pi$

0923

$2\sin^2 A-\sin A\cos A+\cos^2 A=1$에서

$2\sin^2 A-\sin A\cos A+(1-\sin^2 A)=1$

$\sin^2 A-\sin A\cos A=0$

$\sin A(\sin A-\cos A)=0$

이때 $0<A<\pi$에서 $\sin A\neq 0$이므로

$\sin A=\cos A \quad \therefore A=\frac{\pi}{4}$

$A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ 답 ②

0924

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$2\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin(x+\pi)$에서 $2\sin^2 x=\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x=0$, $\sin x(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

이때 $0<x<2\pi$에서

(i) $\sin x=0$일 때, $x=\pi$

(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=2\pi$ 답 ③

발전 유형 18 삼각함수를 포함한 방정식의 실근의 개수 개념 07

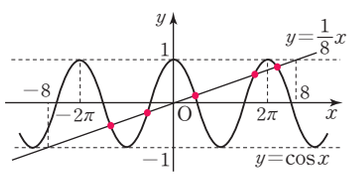
방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

⇨ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수

0925

방정식 $\cos x=\frac{1}{8}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수가 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

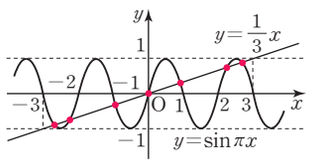


답 ③

0926

방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{3}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점의 개수가 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

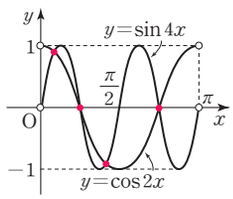


답 ⑤

0927

방정식 $\cos 2x=\sin 4x$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=\cos 2x$, $y=\sin 4x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=\cos 2x$, $y=\sin 4x$의 그래프의 교점의 개수가 4이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

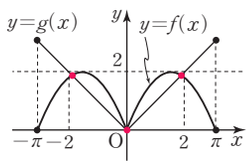


답 ④

0928

방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



답 3

발전 유형 19 삼각함수를 포함한 방정식이 실근을 가질 조건 개념 07

(i) 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한다.

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

0929

$\sin^2 x-2\cos x+a+2=0$에서 $(1-\cos^2 x)-2\cos x+a+2=0$

$\therefore \cos^2 x+2\cos x-3=a$

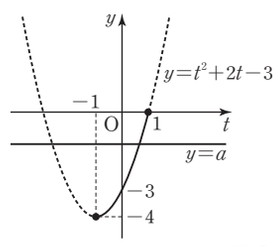
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x+2\cos x-3$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$-4\le a\le 0$



답 ②

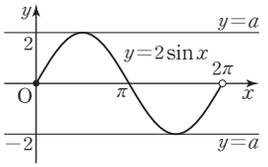
0930

$\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin x$이므로 주어진 방정식은

$\sin x=-\sin x+a \quad \therefore 2\sin x=a$

주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다.

$0\le x<2\pi$일 때, 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서



$a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\cdot 2=-4$

답 ①

0931

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

이므로 $\cos^2 x-4\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-k=0$에서 $\cos^2 x+4\cos x=k$

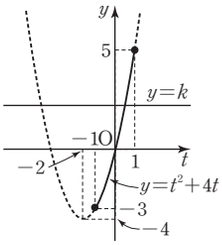
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x+4\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다. … ❶

이때 $\cos x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+4t=(t+2)^2-4$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서



$-3\le k\le 5$ … ❷

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=9$ … ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\cos^2 x+4\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0932

$\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$\cos^2 x-\sin(x+\pi)-k=0$에서 $1-\sin^2 x+\sin x-k=0$

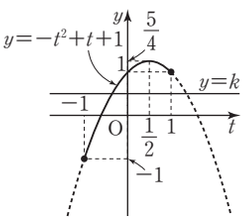
$\therefore -\sin^2 x+\sin x+1=k$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\sin^2 x+\sin x+1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서



$-1\le k\le\frac{5}{4}$

따라서 $M=\frac{5}{4}$, $m=-1$이므로

$M+m=\frac{5}{4}+(-1)=\frac{1}{4}$

답 ①

유형 20 삼각함수를 포함한 부등식 – 일차식 꼴 개념 08

(1) $\sin x>k$ (또는 $\cos x>k$ 또는 $\tan x>k$) 꼴의 부등식

⇨ 함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구한다.

(2) $\sin x<k$ (또는 $\cos x<k$ 또는 $\tan x<k$) 꼴의 부등식

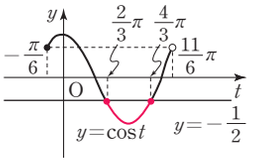
⇨ 함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구한다.

0933

$x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$이고

주어진 부등식은 $\cos t\le-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos t\le-\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{2}{3}\pi\le t\le\frac{4}{3}\pi$이므로



$\frac{2}{3}\pi\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$

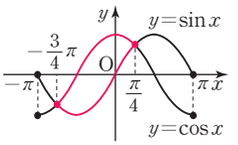
따라서 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{3}\pi$

답 $\frac{7}{3}\pi$

0934

부등식 $\cos x\ge\sin x$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 함수 $y=\sin x$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서 $-\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{\pi}{4}$



따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ⑤이다.

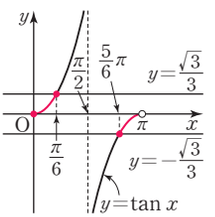
답 ⑤

0935

$|3\tan x|\le\sqrt{3}$에서 $-\sqrt{3}\le 3\tan x\le\sqrt{3}$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는



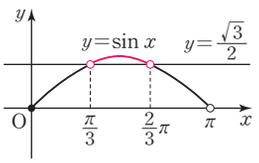
$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<\pi$

0936

$2\sin x>\sqrt{3}$에서 $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는



$\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ …… ㉠

$\tan x-1>0$에서 $\tan x>1$

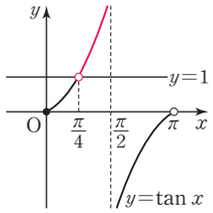
오른쪽 그림에서 부등식 $\tan x>1$의 해는

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

유형 21 삼각함수를 포함한 부등식 – 이차식 꼴 개념 08

$\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형한 다음 그래프를 이용하여 해를 구한다.

0937

$2\sin^2x\geq1-\cos x$에서 $2(1-\cos^2x)\geq1-\cos x$

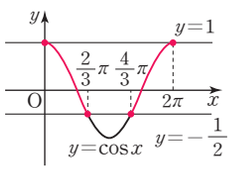
$2\cos^2x-\cos x-1\leq0$, $(2\cos x+1)(\cos x-1)\leq0$

$\therefore -\frac{1}{2}\leq\cos x\leq1$

오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{1}{2}\leq\cos x\leq1$의 해는

$0\leq x\leq\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\leq x\leq2\pi$



답 $0\leq x\leq\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\leq x\leq2\pi$

0938

$-2\cos^2x+3\leq3\sin x$에서 $-2(1-\sin^2x)+3\leq3\sin x$

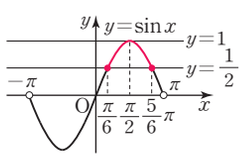
$2\sin^2x-3\sin x+1\leq0$, $(2\sin x-1)(\sin x-1)\leq0$

$\therefore \frac{1}{2}\leq\sin x\leq1$

오른쪽 그림에서 부등식

$\frac{1}{2}\leq\sin x\leq1$의 해는

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0939

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{5}{3}\pi$이고

주어진 부등식은 $2\cos^2t+\sin t-1\geq0$

$2(1-\sin^2t)+\sin t-1\geq0$

$2\sin^2t-\sin t-1\leq0$ ··· ❶

$(2\sin t+1)(\sin t-1)\leq0$

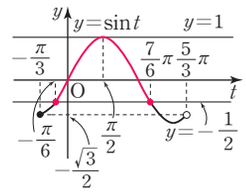
$\therefore -\frac{1}{2}\leq\sin t\leq1$ ··· ❷

오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{1}{2}\leq\sin t\leq1$의 해는 $-\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{7}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{7}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$ ··· ❸



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{\pi}{6}}=9$ ··· ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓고 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	30 %
❷ $\sin t$의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0940

$2\cos^2x+\sin x+a>0$에서 $2(1-\sin^2x)+\sin x+a>0$

$\therefore 2\sin^2x-\sin x-2<a$

$y=2\sin^2x-\sin x-2$라 할 때

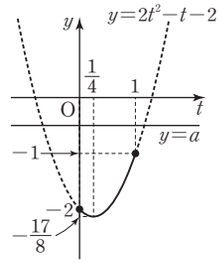
$\sin x=t$로 놓으면 $0\leq x\leq\pi$에서

$0\leq t\leq1$이고

$y=2t^2-t-2=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값 -1을 가지므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$a>-1$



답 $a>-1$

발전 유형 22 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 활용 개념 07, 08

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) $D>0\iff$ 서로 다른 두 실근

(2) $D=0\iff$ 중근

(3) $D<0\iff$ 서로 다른 두 허근

0941

$x^2-4x+2\sin\theta+3>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

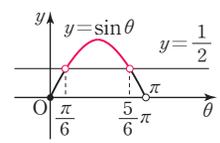
이차방정식 $x^2-4x+2\sin\theta+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2\sin\theta-3<0$

$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin\theta>\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$



답 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

0942

이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x-\cos\theta=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=2+4\cos\theta=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$

이때 $0\le\theta\le2\pi$에서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$이므로

$\sin\frac{\alpha+\beta}{3}=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0943

이차방정식 $x^2+2x\sin\theta+\cos\theta+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-\cos\theta-1\ge0$

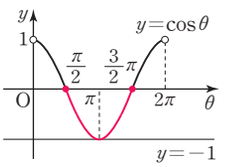
$(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1\ge0$

$\cos^2\theta+\cos\theta\le0$

$\cos\theta(\cos\theta+1)\le0$

$\therefore -1\le\cos\theta\le0$

오른쪽 그림에서 부등식 $-1\le\cos\theta\le0$의 해는



$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$

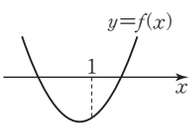
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$

답 π

0944

$f(x)=2x^2-\sqrt{2}x\cos2\theta-1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(1)<0$이어야 하므로

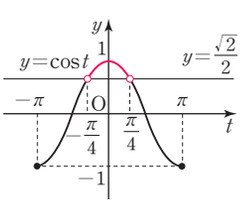
$2-\sqrt{2}\cos2\theta-1<0$에서

$\sqrt{2}\cos2\theta>1 \qquad \therefore \cos2\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $2\theta=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $-\pi\le t\le\pi$이고

주어진 부등식은 $\cos t>\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos t>\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는



$-\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{4}$

즉, $-\frac{\pi}{4}<2\theta<\frac{\pi}{4}$이므로

$-\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{8}$

따라서 θ의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

STEP 3 내신 마스터

0945

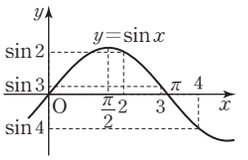
유형 02 삼각함수의 값의 대소 비교

|전략| 삼각함수의 그래프를 이용하여 대소를 비교한다.

ㄱ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4$이므로

오른쪽 그림에서

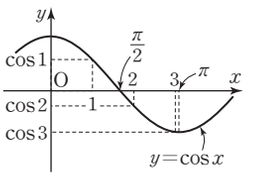
$\sin4<\sin3<\sin2$ (거짓)



ㄴ. $1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$이므로

오른쪽 그림에서

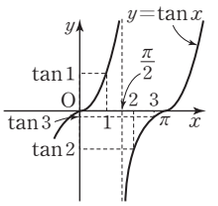
$\cos3<\cos2<\cos1$ (참)



ㄷ. $1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$이므로

오른쪽 그림에서

$\tan2<\tan3<\tan1$ (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

0946

유형 03 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=f(x-m)$임을 이용한다.

함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\tan\left\{\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}=\tan\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

이 그래프가 점 $\left(\frac{7}{6},a\right)$를 지나므로

$a=\tan\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 ⑤

0947

유형 04 삼각함수의 최대·최소와 주기

|전략| 주기가 π인 함수를 찾는다.

주어진 함수의 주기를 각각 구하면

① $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

④ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ ⑤ $\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$

따라서 $f(x+\pi)=f(x)$를 만족시키는 함수는 ②이다.

답 ②

0948

유형 07 삼각함수의 미정계수의 결정 – 그래프가 주어진 경우

|전략| 삼각함수의 주기와 그래프가 지나는 점을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi \qquad \therefore a=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\cos 2(x+b)+1$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 2\right)$를 지나므로

$2=\cos\left(\frac{4}{3}\pi+2b\right)+1$, $\cos\left(\frac{4}{3}\pi+2b\right)=1$

$0<b<\pi$이므로 $\frac{4}{3}\pi+2b=2\pi$

$2b=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore b=\frac{\pi}{3}$

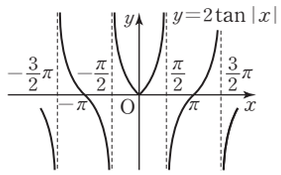
$\therefore ab=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 답 ①

0949

유형 08 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프

|전략| 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 다음 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것임을 이용한다.

함수 $y=2\tan|x|$의 그래프는 함수 $y=2\tan x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분을 그린 다음 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

③ 주기함수가 아니다.

④ 최솟값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0950

유형 09 삼각함수의 그래프의 대칭성

|전략| 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 구한다.

함수 $y=3\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 $B(2, 0)$, $C(6, 0)$

$x=2$일 때, $y=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $A\left(2, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}\cdot\overline{AB}=4\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ 답 ②

0951

유형 10 일반각에 대한 삼각함수의 성질

|전략| 주어진 각을 $90^\circ\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴로 변형한다.

$\sin 250^\circ=\sin(90^\circ\times 3-20^\circ)=-\cos 20^\circ=-0.9397$

$\cos 100^\circ=\cos(90^\circ\times 1+10^\circ)=-\sin 10^\circ=-0.1736$

$\tan 190^\circ=\tan(90^\circ\times 2+10^\circ)=\tan 10^\circ=0.1763$

$\therefore$ $\sin 250^\circ+\cos 100^\circ+\tan 190^\circ$

$=-0.9397+(-0.1736)+0.1763=-0.9370$ 답 ③

0952

유형 11 일반각에 대한 삼각함수의 성질 – 일정하게 증가하는 각 + 12 일반각에 대한 삼각함수의 성질 – 도형에의 활용

|전략| $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이면 $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$의 관계가 성립함을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

$8\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos 7\theta=\cos(8\theta-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\cos 6\theta=\cos(8\theta-2\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\sin 2\theta$

$\cos 5\theta=\cos(8\theta-3\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\sin 3\theta$

$\cos 4\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2 7\theta$

$=(\cos^2\theta+\cos^2 7\theta)+(\cos^2 2\theta+\cos^2 6\theta)$

$+(\cos^2 3\theta+\cos^2 5\theta)+\cos^2 4\theta$

$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)$

$+(\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta)+\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1\cdot 3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$ 답 ⑤

0953

유형 13 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 – 일차식 꼴

|전략| $-1\leq\sin x\leq 1$임을 이용하여 $a\sqrt{(\sin x-2)^2}+3$의 값의 범위를 구한다.

$\sqrt{(\sin x-2)^2}=|\sin x-2|$이고 $-3\leq\sin x-2\leq -1$이므로

$1\leq|\sin x-2|\leq 3$

$a\leq a\sqrt{(\sin x-2)^2}\leq 3a$ ($\because a>0$)

$\therefore a+3\leq a\sqrt{(\sin x-2)^2}+3\leq 3a+3$

이때 최댓값이 9이므로

$3a+3=9$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{(\sin x-2)^2}+3$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{6}-2\right)^2}+3$

$=2\cdot\frac{3}{2}+3=6$ 답 ④

0954

유형 14 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 – 이차식 꼴

|전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 식을 한 종류의 삼각함수로 변형한 다음 삼각함수를 t로 치환한다.

$y=1-2a\cos x-\sin^2 x$

$=1-2a\cos x-(1-\cos^2 x)$

$=\cos^2 x-2a\cos x$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\leq x\leq\pi$에서 $-1\leq t\leq 1$이고

$y=t^2-2at=(t-a)^2-a^2$

(i) $0<a<1$이면 $t=a$일 때 최솟값을 가지므로

$-a^2=-\frac{1}{9}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because 0<a<1$)

(ii) $a \geq 1$이면 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로

$1-2a=-\frac{1}{9}$ $\therefore a=\frac{5}{9}$

그런데 $a=\frac{5}{9}$는 $a \geq 1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$ 답 ②

0955

유형 15 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 – 분수식 꼴

|전략| 먼저 $\frac{\cos x+\sin x}{3\cos x-\sin x}$의 분모, 분자를 $\cos x$로 나눈다.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$에서 $\cos x \neq 0$이므로 분모, 분자를 $\cos x$로 나누면

$y=\frac{\cos x+\sin x}{3\cos x-\sin x}=\frac{1+\tan x}{3-\tan x}$

$\tan x=t$로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$에서 $0 \leq t \leq 1$이고

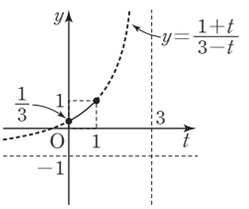
$y=\frac{1+t}{3-t}=\frac{(t-3)+4}{-(t-3)}=-\frac{4}{t-3}-1$

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값 $M=1$

$t=0$일 때 최솟값 $m=\frac{1}{3}$

$\therefore M+m=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$



답 ④

0956

유형 17 삼각함수를 포함한 방정식 – 이차식 꼴

|전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 $\sin x$, $\cos x$에 대한 방정식으로 변형한다.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$3\cos^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin x \cos x$에서

$2\cos^2 x-\sin x \cos x-\sin^2 x=0$

$(2\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

이때 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$에서 $2\cos x+\sin x>0$이므로

$\cos x-\sin x=0$, $\cos x=\sin x$ $\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 답 ③

0957

유형 19 삼각함수를 포함한 방정식이 실근을 가질 조건

|전략| 주어진 방정식을 $\cos x$에 대한 방정식으로 변형한다.

$3\sin^2 x+(3a-1)\cos x+a-3=0$에서

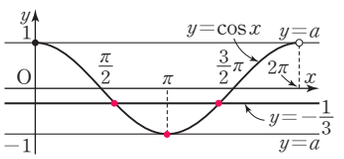
$3(1-\cos^2 x)+(3a-1)\cos x+a-3=0$

$3\cos^2 x-(3a-1)\cos x-a=0$, $(3\cos x+1)(\cos x-a)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{3}$ 또는 $\cos x=a$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림에서

$a=-1$ 또는 $a=1$



따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+1=0$ 답 ②

0958

유형 20 삼각함수를 포함한 부등식 – 일차식 꼴

|전략| $\frac{x}{30}\pi=t$로 놓고 주어진 부등식을 푼다.

$\frac{x}{30}\pi=t$로 놓으면 $0<x<60$에서 $0<t<2\pi$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{30}\pi\right)<0$에서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)<0$

$\cos t<0$ $\therefore \frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore A=\{x \mid 15<x<45\}$ ← $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{30}\pi<\frac{3}{2}\pi$에서 $15<x<45$

$\tan\left(\pi-\frac{x}{30}\pi\right)<0$에서 $\tan(\pi-t)<0$

$-\tan t<0$, $\tan t>0$ $\therefore 0<t<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore B=\{x \mid 0<x<15 \text{ 또는 } 30<x<45\}$ ← $0<\frac{x}{30}\pi<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<\frac{x}{30}\pi<\frac{3}{2}\pi$에서 $0<x<15$ 또는 $30<x<45$

따라서 $A \cap B=\{x \mid 30<x<45\}$이므로 집합 $A \cap B$의 원소 중 자연수의 개수는 $45-30-1=14$이다. 답 ④

0959

유형 21 삼각함수를 포함한 부등식 – 이차식 꼴

|전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형한다.

$\sin^2 x+(a-3)\cos x+3a-1<0$에서

$(1-\cos^2 x)+(a-3)\cos x+3a-1<0$

$\cos^2 x-(a-3)\cos x-3a>0$

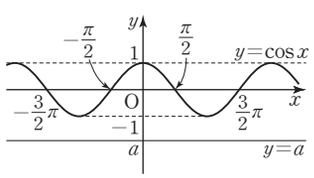
$(\cos x+3)(\cos x-a)>0$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$에서 $\cos x+3>0$이므로

$\cos x-a>0$ $\therefore \cos x>a$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 오른쪽 그림에서

$a<-1$



답 ②

0960

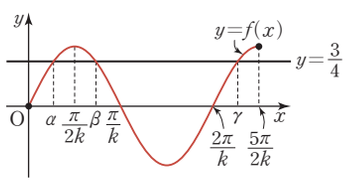
유형 09 삼각함수의 그래프의 대칭성 + 10 일반각에 대한 삼각함수의 성질

|전략| 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 α와 β 사이의 관계식을 세운다.

함수 $f(x)=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$ … ❶

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 점 $\left(\alpha, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\beta, \frac{3}{4}\right)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2k}$에 대하여 대칭이므로



$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2k}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$ … ❷

$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)=\sin(\pi+k\gamma)$

$=-\sin k\gamma=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}$ … ❸

답 $-\frac{3}{4}$

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)=\sin kx$의 주기를 구할 수 있다.	1점
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0961

유형 12 일반각에 대한 삼각함수의 성질 – 도형에의 활용

|전략| 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π임을 이용한다.

$0<\alpha<\pi$이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2} \quad \cdots ❶$$

한편, 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$$\therefore \tan\beta=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{1}{2} \quad \cdots ❷$$

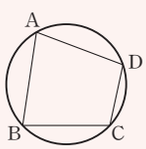
답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	배점
❶ $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ $\tan\beta$의 값을 구할 수 있다.	3점

Lecture

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

⇨ $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$



0962

유형 22 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 활용

|전략| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가짐을 이용한다.

주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2+2x\cos\theta+\sin^2\theta+\cos\theta=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

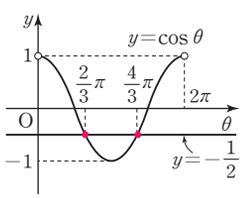
$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-(\sin^2\theta+\cos\theta)=0 \quad \cdots ❶$$

$\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta+\cos\theta)=0$, $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

이때 $0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta<1$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0<\theta<2\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 θ좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



$$\theta=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta=\frac{4}{3}\pi \quad \cdots ❷$$

즉, $\theta_1<\theta_2$이므로 $\theta_1=\frac{2}{3}\pi$, $\theta_2=\frac{4}{3}\pi$

$$\therefore \theta_2-\theta_1=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

채점 기준	배점
❶ 판별식을 이용하여 θ에 대한 방정식을 세울 수 있다.	2점
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	4점
❸ $\theta_2-\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	1점

0963

유형 14 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 – 이차식 꼴

|전략| $-1\le\sin(ax^2+b)\le1$임을 이용하여 두 함수 $(g\circ f)(x)$와 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax^2+b)=2\sin(ax^2+b)$

$-1\le\sin(ax^2+b)\le1$에서 $-2\le2\sin(ax^2+b)\le2$

$\therefore -2\le(g\circ f)(x)\le2$

따라서 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2\sin x)=4a\sin^2x+b$

이때 $0\le\sin^2x\le1$에서 $a>0$이므로

$b\le4a\sin^2x+b\le4a+b$

$\therefore b\le(f\circ g)(x)\le4a+b$

따라서 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 $4a+b$, 최솟값은 b이다.

(3) $(g\circ f)(x)$와 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 같으므로

$4a+b=2$, $b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2 (2) 최댓값: $4a+b$, 최솟값: b (3) $a=1$, $b=-2$

채점 기준	배점
(1) $(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	5점
(2) $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	5점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	2점

0964

유형 16 삼각함수를 포함한 방정식 – 일차식 꼴

|전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 주어진 함수의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

(1) $y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-1$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -1)$이다.

(2) 점 $(\sin\theta, -1)$이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$-1=2\sin\theta$ $\quad\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$이므로

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$

(3) 조건을 만족시키는 모든 θ의 값의 합은 $\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=3\pi$

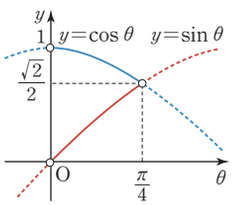
답 (1) $(\sin\theta, -1)$ (2) $\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi$ (3) 3π

채점 기준	배점
(1) 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	3점
(2) 조건을 만족시키는 θ의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) 조건을 만족시키는 모든 θ의 값의 합을 구할 수 있다.	2점

0965

|전략| 삼각함수의 그래프를 이용하여 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $\sin\theta, \cos\theta$의 값의 범위를 구한다.

ㄱ. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 두 함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0<\sin\theta<\cos\theta<1$ (참)

ㄴ. $0<\sin\theta<1$이므로 함수 $y=\log_{\sin\theta}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $\sin\theta<\cos\theta<1$이므로

$0<\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$ (참)

ㄷ. $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$

또, $0<\cos\theta<1$이므로 함수 $y=(\cos\theta)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$

$\therefore (\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ (참)

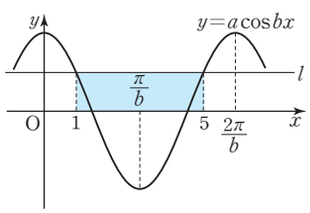
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0966

|전략| 삼각함수의 주기와 대칭성을 이용한다.

함수 $y=a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ ($\because b>0$)

오른쪽 그림에서 두 점 $(1, a\cos b)$, $(5, a\cos 5b)$는 직선 $x=\frac{\pi}{b}$에 대하여 대칭이므로



$\frac{1+5}{2}=\frac{\pi}{b}$ $\therefore b=\frac{\pi}{3}$

x축과 직선 l 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형은 가로의 길이가 4, 세로의 길이가 $a\cos b=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a$인 직사각형이고 그 넓이가 20이므로

$4\cdot\frac{1}{2}a=20$, $2a=20$ $\therefore a=10$

$\therefore ab=10\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{10}{3}\pi$ 답 $\frac{10}{3}\pi$

0967

|전략| 두 점 P, Q의 t ($t>0$)초 후의 y좌표를 각각 $f(t), g(t)$로 놓고 두 함수 $y=f(t), y=g(t)$의 그래프를 그려 두 그래프가 만나는 횟수를 구한다.

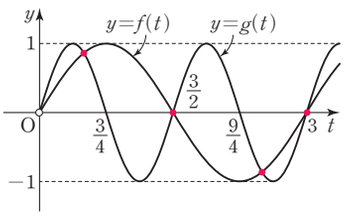
두 점 P, Q의 t ($t>0$)초 후의 y좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면 t초 후 두 점 P, Q가 움직인 거리는 $\frac{2}{3}\pi t$, $\frac{4}{3}\pi t$이다. 즉, 두 동경 OP, OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 $1\cdot\theta_1=\frac{2}{3}\pi t$, $1\cdot\theta_2=\frac{4}{3}\pi t$에서

$\theta_1=\frac{2}{3}\pi t$, $\theta_2=\frac{4}{3}\pi t$

$\therefore f(t)=\sin\frac{2}{3}\pi t$, $g(t)=\sin\frac{4}{3}\pi t$

이때 두 점 P, Q의 y좌표가 같아지는 것은 $f(t)=g(t)$일 때이므로 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 만날 때이다.

함수 $f(t)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$, 함수 $g(t)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{3}{2}$이므로 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 출발 후 3초가 될 때까지 4번 만나므로 출발 후 99초가 될 때까지 $4\cdot33=132$(번) 만난다. 또, 이후 1초 동안 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 1번 만나므로 출발 후 100초가 될 때까지 두 점 P, Q의 y좌표가 같아지는 횟수는 $132+1=133$(번)이다. 답 ②

0968

|전략| 주어진 x와 y의 값의 범위에서 식을 만족시키는 $\sin(\pi\sin x)$와 $\cos(\pi\cos y)$의 값을 찾는다.

$0\le x\le\pi$에서 $0\le\sin x\le1$, $0\le\pi\sin x\le\pi$

$\therefore 0\le\sin(\pi\sin x)\le1$

$0\le y\le\pi$에서 $-1\le\cos y\le1$, $-\pi\le\pi\cos y\le\pi$

$\therefore -1\le\cos(\pi\cos y)\le1$

따라서 $\sin(\pi\sin x)+\cos(\pi\cos y)=2$에서

$\sin(\pi\sin x)=1$, $\cos(\pi\cos y)=1$이므로

$\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$, $\pi\cos y=0$, 즉 $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos y=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$\cos y=0$에서 $y=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le y\le\pi$)

$\therefore x+y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$ 또는 $x+y=\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $x+y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$일 때

$$\sin(x+y)+\cos(x+y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(ii) $x+y=\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x+y=\pi+\frac{\pi}{3}$일 때

$$\sin(x+y)+\cos(x+y)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 합은 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=-1$ 답 -1

0969

|전략| $\sin x=a$, $\cos x=b$로 놓고 $a^2+b^2=1$임을 이용한다.

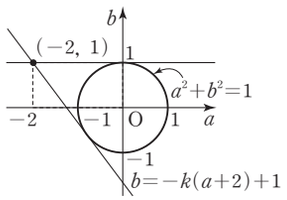
$\sin x=a$, $\cos x=b$로 놓으면

$-1\le a\le 1$, $-1\le b\le 1$이고 $a^2+b^2=1$ ····· ㉠

$\dfrac{-\cos x+1}{\sin x+2}=\dfrac{-b+1}{a+2}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$-b+1=k(a+2)$ $\therefore b=-k(a+2)+1$ ····· ㉡

직선 ㉡은 k의 값에 관계없이 점 $(-2, 1)$을 지나고, 오른쪽 그림에서 k는 직선 ㉡이 원 ㉠에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.



원 ㉠과 직선 ㉡이 접할 때, 원점 O와 직선 $b=-k(a+2)+1$, 즉 $ka+b+2k-1=0$ 사이의 거리는 1이므로

$\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, $|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3k^2-4k=0$, $k(3k-4)=0$

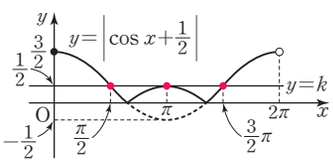
$\therefore k=0$ 또는 $k=\dfrac{4}{3}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $\dfrac{4}{3}+0=\dfrac{4}{3}$ 답 $\dfrac{4}{3}$

0970

|전략| 함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 찾는다.

방정식 $\left|\cos x+\dfrac{1}{2}\right|=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$k=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0971

|전략| 방정식 $f(x)=0$이 부호가 서로 다른 두 근을 가지면 두 근의 곱이 0보다 작음을 이용한다.

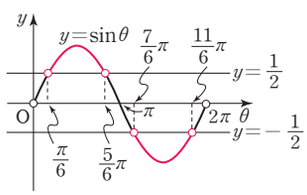
이차방정식 $x^2-x+1-4\sin^2\theta=0$이 부호가 서로 다른 두 근을 가지려면 두 근의 곱은 0보다 작아야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $1-4\sin^2\theta<0$에서

$4\sin^2\theta-1>0$, $(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)>0$

$\therefore \sin\theta<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta>\dfrac{1}{2}$ ····· ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는 $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$



따라서

$\alpha-\beta-\gamma-\delta=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{7}{6}\pi-\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{11}{3}\pi$이므로

$\cos(\alpha-\beta-\gamma-\delta)=\cos\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)=\cos\left\{2\pi\cdot(-2)+\dfrac{\pi}{3}\right\}$

$=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

7 사인법칙과 코사인법칙

본책 128~143쪽

STEP 개념 마스터

0972

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{9}{\sin 60^\circ}$이므로

$a\sin 60^\circ=9\sin 45^\circ$

$\therefore a=9\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}$ 답 $3\sqrt{6}$

0973

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$이므로

$c\sin 45^\circ=10\sin 30^\circ$

$\therefore c=10\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

0974

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$이므로

$\sqrt{6}\sin B=2\sin 60^\circ$

$\therefore \sin B=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

그런데 $A+B<180^\circ$이어야 하므로 $B=45^\circ$ 답 45°

0975

사인법칙에 의하여 $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$이므로

$\sqrt{2}\sin A=\sin 135^\circ$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A+C<180^\circ$이어야 하므로 $A=30^\circ$ 답 30°

0976

사인법칙에 의하여 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0977

사인법칙에 의하여 $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=6$ 답 6

0978

$A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

0979

코사인법칙에 의하여

$a^2=4^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ$

$=16+3-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$ 답 $\sqrt{7}$

0980

코사인법칙에 의하여

$b^2=(3\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot2\cdot\cos 45^\circ$

$=18+4-2\cdot3\sqrt{2}\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

0981

코사인법칙에 의하여

$c^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\cos 120^\circ$

$=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=61$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{61}$ 답 $\sqrt{61}$

0982

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=45^\circ$ 답 45°

0983

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{4^2+6^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot4\cdot6}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 답 60°

0984

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$ 답 120°

0985

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{(\sqrt{3})^2+1^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 답 30°

0986

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$ 답 $15\sqrt{2}$

0987

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin 150^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=10$ 답 10

0988

$\triangle ABC=\dfrac{32\sqrt{3}}{4\cdot2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0989

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot21=21$ 답 21

0990

헤론의 공식에 의하여

$s=\dfrac{7+8+9}{2}=12$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5}$ 답 $12\sqrt{5}$

다른 풀이 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9}=\dfrac{2}{3}$

이때 $\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$이므로

$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot9\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$

0991

(평행사변형 ABCD의 넓이)$=5\cdot7\cdot\sin 120^\circ$

$=5\cdot7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$

0992

$B=D=60^\circ$이므로

(평행사변형 ABCD의 넓이)$=6\cdot9\cdot\sin 60^\circ$

$=6\cdot9\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$ 답 $27\sqrt{3}$

0993

$A+B=180^\circ$이므로 $A=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

$\therefore$ (평행사변형 ABCD의 넓이)$=3\cdot4\cdot\sin 45^\circ$

$=3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ 답 $6\sqrt{2}$

0994

(사각형 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=10$ 답 10

STEP 2 유형 마스터

유형 01 사인법칙 개념 01

삼각형 ABC에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$임을 이용하는 경우

⇨ (1) 한 변의 길이와 두 각의 크기를 알 때

(2) 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 한 각의 크기를 알 때

0995

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$이므로

$2\sin A=2\sqrt{3}\sin 30^\circ$, $\sin A=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore A=60^\circ$ 또는 $A=120^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

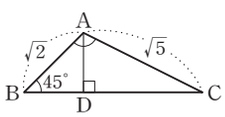
(i) $A=60^\circ$일 때, $C=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

(ii) $A=120^\circ$일 때, $C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

$\therefore C=30^\circ$ ($\because 0^\circ<C<90^\circ$) 답 30°

0996

꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AD}=\overline{BD}=1$



직각삼각형 ADC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=1+2=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{3}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$, $\sqrt{5}\sin A=3\sin 45^\circ$

$\therefore \sin A=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

0997

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BDA=\angle BCA=30^\circ$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

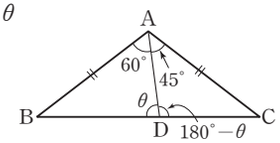
$\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{AD}\sin 30^\circ=10\sqrt{2}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AD}=10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot2=20$ 답 20

0998

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ ($a>0$)라 하고,

$\angle ADB=\theta$라 하면 $\angle ADC=180^\circ-\theta$



삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sin\theta}$이므로

$\overline{BD}\sin\theta=a\sin 60^\circ$

$\therefore \overline{BD}=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin\theta}$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DC}}{\sin 45^\circ}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\theta)}$이므로

$\overline{DC}\sin\theta=a\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{DC}=a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{2\sin\theta}$

$\therefore \overline{BD}:\overline{DC}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin\theta}:\frac{\sqrt{2}a}{2\sin\theta}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$ 답 ⑤

유형 02 사인법칙과 삼각형의 외접원 개념 01

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 할 때

⇨ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

⇨ (1) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

(2) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

0999

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=2\cdot4$

$\therefore \overline{BC}=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

1000

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\cdot6}+\frac{b}{2\cdot6}+\frac{c}{2\cdot6}$

$=\frac{a+b+c}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ 답 ③

1001

원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $B=D=90^\circ$이므로 선분 AC는 원의 지름이다.

즉, $\overline{AC}=4$이므로 원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2R=4$

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}=2R$이므로

$\overline{BD}=2R\sin\theta=4\sin\theta$ 답 ②

1002

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 두 삼각형 ABC와 ADC의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$$

이때 $\angle CAD=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$이므로

$$\frac{3}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ},\ \overline{CD}\sin 60^\circ=3\sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{CD}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

유형 03 사인법칙의 변형 – 변의 길이의 비 개념 01

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비는 사인법칙을 이용하여 구한다.

⇨ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

1003

$\frac{a+b}{5}=\frac{b+c}{6}=\frac{c+a}{7}=k\ (k>0)$라 하면

$a+b=5k,\ b+c=6k,\ c+a=7k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=18k$ $\therefore a+b+c=9k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=3k,\ b=2k,\ c=4k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3k:2k:4k$

$=3:2:4$

답 ②

1004

$a+b-2c=0$ …… ㉠

$a-3b+c=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $4b-3c=0$ $\therefore b=\frac{3}{4}c$

㉠×3+㉡을 하면 $4a-5c=0$ $\therefore a=\frac{5}{4}c$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\frac{5}{4}c:\frac{3}{4}c:c$

$=5:3:4$

답 ③

1005

$ab:bc:ca=8:9:12$이므로 양수 k에 대하여

$ab=8k^2$ …… ㉠

$bc=9k^2$ …… ㉡

$ca=12k^2$ …… ㉢

으로 놓고 ㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$(abc)^2=864k^6$ $\therefore abc=12\sqrt{6}k^3\ (\because abc>0)$ …… ㉣

㉣÷㉡에서 $a=\frac{4\sqrt{6}}{3}k$

㉣÷㉢에서 $b=\sqrt{6}k$

㉣÷㉠에서 $c=\frac{3\sqrt{6}}{2}k$

$\therefore a:b:c=\frac{4\sqrt{6}}{3}k:\sqrt{6}k:\frac{3\sqrt{6}}{2}k=8:6:9$ … ❶

따라서

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=8:6:9$ … ❷

이므로 $\sin A=8m,\ \sin B=6m,\ \sin C=9m\ (m>0)$이라 하면

$$\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{8m}{6m+9m}=\frac{8}{15}$$ … ❸

답 $\frac{8}{15}$

채점 기준	비율
❶ $a:b:c$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 사인법칙을 이용하여 $\sin A:\sin B:\sin C$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1006

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\sin(C+A)=\sin(\pi-B)=\sin B$

즉, $\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)=3:5:6$에서

$\sin C:\sin A:\sin B=3:5:6$이므로

$c:a:b=\sin C:\sin A:\sin B=3:5:6$

따라서 $a:b:c=5:6:3$이므로

$a=5k,\ b=6k,\ c=3k\ (k>0)$라 하면

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}=\frac{(5k)^2+(6k)^2+(3k)^2}{5k\cdot 6k}$$

$$=\frac{70k^2}{30k^2}=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

유형 04 삼각형의 모양 결정(1) 개념 01

삼각형 ABC의 모양을 결정할 때

(i) $\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$를 관계식에 대입한다.

(ii) a, b, c에 대한 식을 정리하여 삼각형의 모양을 판별한다.

(단, R는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이)

1007

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 $a\sin A=c\sin C$에 대입하면

$$a\cdot\frac{a}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R},\ a^2=c^2$$

$\therefore a=c\ (\because a>0, c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

Lecture

삼각형 ABC에서

(1) $a=b=c$ ⇨ 정삼각형

(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형

(3) $a^2=b^2+c^2$ ⇨ $A=90^\circ$인 직각삼각형

1008

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 $a\sin^2 A=b\sin^2 B=c\sin^2 C$에 대입하면

$a\cdot\left(\frac{a}{2R}\right)^2=b\cdot\left(\frac{b}{2R}\right)^2=c\cdot\left(\frac{c}{2R}\right)^2$, $a^3=b^3=c^3$

이때 a, b, c는 실수이므로 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 답 ①

1009

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 $a\sin A+b\sin B=c\sin C$에 대입하면

$a\cdot\frac{a}{2R}+b\cdot\frac{b}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R}$ $\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab$ 답 ①

유형 05 사인법칙의 활용 개념 01

주어진 삼각형의 각의 크기, 변의 길이, 외접원의 반지름의 길이 등을 사인법칙에 대입한다.

1010

$A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{45}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$, $\overline{AB}\sin 60^\circ=45\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AB}=45\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=15\sqrt{6}\,(\mathrm{m})$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $15\sqrt{6}$ m이다. 답 ③

1011

접시의 반지름의 길이를 R cm라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{12}{\sin 30^\circ}=2R$ $\therefore R=\frac{12}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=12$

따라서 이 접시의 둘레의 길이는

$2\pi R=2\pi\cdot 12=24\pi\,(\mathrm{cm})$ 답 ②

1012

$\angle AQB=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로 삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{25}{\sin 60^\circ}$, $\overline{AQ}\sin 60^\circ=25\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AQ}=25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{6}}{3}\,(\mathrm{m})$ … ❶

따라서 직각삼각형 PQA에서

$\overline{PQ}=\overline{AQ}\tan 30^\circ=\frac{25\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{25\sqrt{2}}{3}\,(\mathrm{m})$ … ❷

답 $\frac{25\sqrt{2}}{3}$ m

채점 기준	비율
❶ 사인법칙을 이용하여 선분 AQ의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ 삼각비를 이용하여 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $\angle AQB=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로 삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{25}{\sin 60^\circ}$, $\overline{AQ}\sin 60^\circ=25\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AQ}=25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{6}}{3}\,(\mathrm{m})$

이때 $\angle APQ=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$이므로 삼각형 PQA에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\frac{25\sqrt{6}}{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{PQ}\sin 60^\circ=\frac{25\sqrt{6}}{3}\sin 30^\circ$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{25\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{2}}{3}\,(\mathrm{m})$

유형 06 코사인법칙 개념 02

삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

⇨ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

1013

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180^\circ$ $\therefore B=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=a$ $(a>0)$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{3}a$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{14})^2=a^2+(\sqrt{3}a)^2-2\cdot a\cdot\sqrt{3}a\cdot\cos 150^\circ$

$14=a^2+3a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{3}a\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$7a^2=14$, $a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

1014

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\frac{3}{\sin 30^\circ}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$

직각삼각형 ECD에서 $\overline{EC}=\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

이때 $\angle ACE=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이므로 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

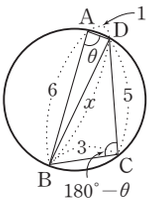
$\overline{AE}^2=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 120^\circ$

$=36+64-2\cdot 6\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=148$

$\therefore \overline{AE}=2\sqrt{37}$ $(\because \overline{AE}>0)$ 답 $2\sqrt{37}$

1015

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}=x$라 하면



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=1^2+6^2-2\cdot1\cdot6\cdot\cos\theta$

$=37-12\cos\theta$

한편, 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BCD=180^\circ-\theta$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos(180^\circ-\theta)=34+30\cos\theta$

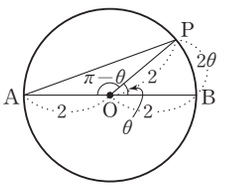
따라서 $37-12\cos\theta=34+30\cos\theta$이므로

$42\cos\theta=3 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{14}$

답 $\frac{1}{14}$

1016

오른쪽 그림의 부채꼴 BOP에서



$\overline{OB}=2$, $\widehat{BP}=2\theta$이므로

$2\theta=2\cdot\angle BOP$

$\therefore \angle BOP=\theta$, $\angle AOP=\pi-\theta$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos(\pi-\theta)$

$=8+8\cos\theta$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{8+8\cos\theta}=2\sqrt{2(1+\cos\theta)}$ ($\because \overline{AP}>0$)

답 ③

참고 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 ⇨ $l=r\theta$

유형 07 코사인법칙의 변형 개념 02

삼각형 ABC에서 세 변의 길이를 알 때, 코사인법칙을 이용하여 세 각의 크기를 구할 수 있다.

⇨ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

1017

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{5}{7}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=7^2+9^2-2\cdot7\cdot9\cdot\cos B$

$=49+81-2\cdot7\cdot9\cdot\frac{5}{7}=40$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{10}$ ($\because \overline{AC}>0$)

답 $2\sqrt{10}$

1018

$\frac{a+c}{b-c}=\frac{b}{a-c}$에서 $(a+c)(a-c)=b(b-c)$

$a^2-c^2=b^2-bc \quad \therefore a^2=b^2+c^2-bc$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b^2+c^2-bc)}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$

$\therefore A=60^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

답 ③

1019

두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$와 직선 $x=2$의 교점을 각각 A, B라 하면

A(2, 4), B(2, 1)이므로

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\overline{AB}=|4-1|=3$

따라서 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-3^2}{2\cdot2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

1020

삼각형 ABC에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

이때 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 $12:\overline{BD}=\overline{BD}:3$

$\overline{BD}^2=36 \quad \therefore \overline{BD}=6$ ($\because \overline{BD}>0$)

따라서 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=6+3=9$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{12^2+9^2-6^2}{2\cdot12\cdot9}=\frac{7}{8}$

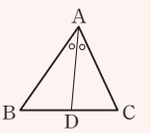
답 $\frac{7}{8}$

Lecture

각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



1021

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{6^2+4^2-6^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{1}{3}$

삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle CDB=\angle CBD=\theta$에서 $\angle ADC=\pi-\theta$

$\therefore \sin(\angle ADC)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

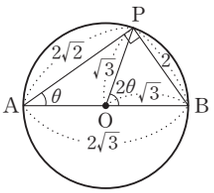
$=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ($\because 0^\circ<\theta<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

1022

선분 AB가 원의 지름이므로



$\angle APB=90^\circ$

즉, 직각삼각형 ABP에서

$\overline{BP}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$ … ❶

한편, $\angle PAB=\theta$이므로

$\angle POB=2\theta$ … ❷

따라서 삼각형 POB에서 $\overline{OP}=\overline{OB}=\sqrt{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos2\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ … ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 원의 지름을 한 변으로 하는 삼각형의 성질을 이용하여 선분 BP의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원주각의 성질을 이용하여 $\angle POB=2\theta$임을 알아낼 수 있다.	30 %
❸ 코사인법칙을 이용하여 $\cos 2\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

Lecture

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

⇨ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$



1023

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면

세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 비가 $4:2:1$이므로

$\pi r_1^2:\pi r_2^2:\pi r_3^2=4:2:1$ $\therefore r_1:r_2:r_3=2:\sqrt{2}:1$

$r_1=2k$, $r_2=\sqrt{2}k$, $r_3=k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=(2+\sqrt{2})k$, $\overline{BC}=(1+\sqrt{2})k$, $\overline{CA}=3k$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{\{(2+\sqrt{2})k\}^2+\{(1+\sqrt{2})k\}^2-(3k)^2}{2\cdot(2+\sqrt{2})k\cdot(1+\sqrt{2})k}$$
$$=\frac{\{(6+4\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})-9\}k^2}{2(4+3\sqrt{2})k^2}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+4}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}=\frac{18-12\sqrt{2}}{2}=9-6\sqrt{2}$$

답 $9-6\sqrt{2}$

유형 08 사인법칙과 코사인법칙 개념 01, 02

세 각의 크기 또는 외접원의 반지름의 길이가 주어지면 사인법칙을 이용하고, 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기 또는 세 변의 길이가 주어지면 코사인법칙을 이용한다.

1024

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=4^2+7^2-2\cdot4\cdot7\cdot\cos 120^\circ$$
$$=16+49-2\cdot4\cdot7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=93$$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{93}$ $(\because \overline{BC}>0)$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{93}}{\sin 120^\circ}=2R \qquad \therefore R=\frac{\sqrt{93}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{31}$$

답 ①

1025

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로 $A+B=180^\circ-C$

$$\therefore \sin\frac{A+B-C}{2}=\sin\frac{180^\circ-2C}{2}=\sin(90^\circ-C)=\cos C$$

이때 $\frac{\sin A}{2}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{4}=k$ $(k>0)$라 하면

$\sin A=2k$, $\sin B=3k$, $\sin C=4k$이므로

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2k:3k:4k=2:3:4$

따라서 $a=2m$, $b=3m$, $c=4m$ $(m>0)$이라 하면

$$\cos C=\frac{(2m)^2+(3m)^2-(4m)^2}{2\cdot2m\cdot3m}=\frac{-3m^2}{12m^2}=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

1026

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=2\cdot\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad \therefore \overline{AC}=\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{5}$$

$\overline{BC}=a$ $(a>0)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos 45^\circ$

$5=2+a^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ $(\because a>0)$

$\therefore \overline{BC}=3$

답 3

1027

길이가 8인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{1}{7}$$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $(\because 0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin\theta}=2R \qquad \therefore R=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\cdot\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$$

답 ③

유형 09 삼각형의 최대각과 최소각 개념 01, 02

삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 삼각형의 최대각과 최소각의 크기는 코사인법칙의 변형을 이용하여 구한다.

⇨ 길이가 가장 긴 변의 대각: 최대각

길이가 가장 짧은 변의 대각: 최소각

1028

길이가 가장 짧은 변의 대각이 최소각이므로 최소각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{4+(4+2\sqrt{3})-2}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta=30^\circ$ $(\because 0^\circ<\theta<180^\circ)$

따라서 삼각형 ABC의 최소각의 크기는 30°이다.

답 30°

1029

$\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{7}=k\ (k>0)$라 하면

$\sin A=3k$, $\sin B=5k$, $\sin C=7k$이므로

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3k:5k:7k=3:5:7$

즉, $a=3m$, $b=5m$, $c=7m\ (m>0)$이라 하면

C가 최대각이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(3m)^2+(5m)^2-(7m)^2}{2\cdot 3m\cdot 5m}=\frac{-15m^2}{30m^2}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore C=120^\circ\ (\because 0^\circ<C<180^\circ)$

따라서 삼각형 ABC의 최대각의 크기는 120°이다. 답 120°

1030

$\sqrt{3}\sin A=\sqrt{2}\sin B=(3-\sqrt{3})\sin C=k\ (k>0)$라 하면

$\sin A=\frac{1}{\sqrt{3}}k$, $\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}k$, $\sin C=\frac{1}{3-\sqrt{3}}k$이므로

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}k:\frac{1}{\sqrt{2}}k:\frac{1}{3-\sqrt{3}}k$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$=2\sqrt{3}:3\sqrt{2}:(3+\sqrt{3})$$

즉, $a=2\sqrt{3}m$, $b=3\sqrt{2}m$, $c=(3+\sqrt{3})m\ (m>0)$이라 하면

A가 최소각이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(3\sqrt{2}m)^2+\{(3+\sqrt{3})m\}^2-(2\sqrt{3}m)^2}{2\cdot 3\sqrt{2}m\cdot(3+\sqrt{3})m}$$

$$=\frac{\{18+(12+6\sqrt{3})-12\}m^2}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})m^2}$$

$$=\frac{6(3+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore A=45^\circ\ (\because 0^\circ<A<180^\circ)$

따라서 삼각형 ABC의 최소각의 크기는 45°이다. 답 45°

참고 $a=2\sqrt{3}m$, $b=3\sqrt{2}m$, $c=(3+\sqrt{3})m$에서

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=3.\times\times\times$, $3\sqrt{2}=\sqrt{18}=4.\times\times\times$, $3+\sqrt{3}=4.\times\times\times$이므로

a가 가장 짧은 변의 길이이다. 따라서 A가 최소각이다.

1031

$\overline{CA}=x\ (x>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{4^2+x^2-2^2}{2\cdot 4\cdot x}=\frac{x^2+12}{8x}=\frac{x}{8}+\frac{3}{2x}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$에서 C의 값이 증가하면 $\cos C$의 값은 감소하므로 $\cos C$의 값이 최소일 때, C의 크기는 최대이다.

㉠에서 $\frac{x}{8}>0$, $\frac{3}{2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\cos C=\frac{x}{8}+\frac{3}{2x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{8}\cdot\frac{3}{2x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $\cos C$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

이때 등호는 $\frac{x}{8}=\frac{3}{2x}$일 때 성립하므로

$x^2=12$ $\quad\therefore x=2\sqrt{3}\ (\because x>0)$

따라서 C의 크기가 최대일 때, 선분 CA의 길이는 $2\sqrt{3}$이다. 답 ③

유형 10 삼각형의 모양 결정(2) 개념 01, 02

삼각형 ABC의 모양을 결정할 때

(i) ① 사인에 대한 식: $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$임을 이용하여 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.
(단, R는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이)
② 코사인에 대한 식: 코사인법칙의 변형을 이용하여 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) a, b, c에 대한 관계식을 정리하여 삼각형의 모양을 판별한다.

1032

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=2\sin B\cos C$에서 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$이므로

$a^2=a^2+b^2-c^2$, $b^2=c^2$

$\therefore b=c\ (\because b>0, c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

1033

$a\cos B=b\cos A$에서 코사인법칙에 의하여

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$이므로

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$, $a^2=b^2$

$\therefore a=b\ (\because a>0, b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ②

1034

$\tan A\sin^2 B=\tan B\sin^2 A$에서

$$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\sin^2 B=\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\sin^2 A$$

$$\frac{\sin B}{\cos A}=\frac{\sin A}{\cos B}$$

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$이므로

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+a^2b^2-b^4$

$a^2c^2-b^2c^2-(a^4-b^4)=0$

$(a^2-b^2)c^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$\therefore (a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 $a+b\neq 0$이므로

$a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

유형 11 코사인법칙의 활용 개념 02

주어진 각의 크기, 변의 길이 등을 코사인법칙에 대입한다.

1035

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=40^2+24^2-2\cdot40\cdot24\cdot\cos60^\circ$

$=1600+576-2\cdot40\cdot24\cdot\frac{1}{2}=1216$

$\therefore \overline{BC}=8\sqrt{19}\ (\mathrm{m})\ (\because \overline{BC}>0)$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $8\sqrt{19}$ m이다. 답 ③

1036

10분 후의 두 사람 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면

$\overline{OP}=60\cdot10=600\ (\mathrm{m})=0.6\ (\mathrm{km})$

$\overline{OQ}=100\cdot10=1000\ (\mathrm{m})=1\ (\mathrm{km})$

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=0.6^2+1^2-2\cdot0.6\cdot1\cdot\cos120^\circ$

$=0.36+1-2\cdot0.6\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1.96$

$\therefore \overline{PQ}=1.4\ (\mathrm{km})\ (\because \overline{PQ}>0)$

따라서 10분 후의 두 사람 A, B 사이의 거리는 1.4 km이다. 답 ④

1037

직각삼각형 ADC에서 $\overline{AC}=\frac{15}{\sin30^\circ}=30\ (\mathrm{m})$

직각삼각형 BEC에서 $\overline{BC}=\frac{20\sqrt{2}}{\sin45^\circ}=40\ (\mathrm{m})$ … ❶

삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=30^2+40^2-2\cdot30\cdot40\cdot\cos60^\circ$

$=900+1600-2\cdot30\cdot40\cdot\frac{1}{2}=1300$

$\therefore \overline{AB}=10\sqrt{13}\ (\mathrm{m})\ (\because \overline{AB}>0)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{13}$ m이다. … ❷

답 $10\sqrt{13}$ m

채점 기준	비율
❶ 두 선분 AC, BC의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ 코사인법칙을 이용하여 두 지점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %

유형 12 삼각형의 넓이 개념 03

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

(1) 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때

⇨ $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

(2) 외접원의 반지름의 길이 R를 알 때

⇨ $S=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

1038

$\overline{AC}=x\ (x>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{19})^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot\cos120^\circ$

$19=x^2+4-2\cdot x\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+2x-15=0,\ (x+5)(x-3)=0 \quad \therefore x=3\ (\because x>0)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 ①

1039

삼각형 ABC의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot3\cdot\sin B=6\sqrt{3} \quad \therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore B=60^\circ\ (\because 0^\circ<B<90^\circ)$

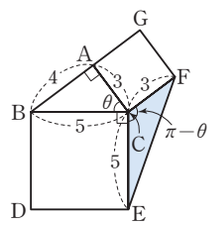
따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=8^2+3^2-2\cdot8\cdot3\cdot\cos60^\circ$

$=64+9-2\cdot8\cdot3\cdot\frac{1}{2}=49$

$\therefore b=7\ (\because b>0)$ 답 7

1040



직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\angle ACB=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

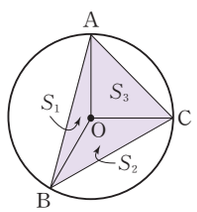
$\overline{CF}=\overline{AC}=3$, $\overline{CE}=\overline{BC}=5$이고

$\angle FCE=\pi-\theta$이므로

$\triangle CEF=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{4}{5}=6$ 답 6

1041



부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 오른쪽 그림에서

$\angle AOB=360^\circ\cdot\frac{5}{12}=150^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\cdot\frac{4}{12}=120^\circ$

$\angle COA=360^\circ\cdot\frac{3}{12}=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC=S_1+S_2+S_3$

$=\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot\sin150^\circ+\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot\sin120^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot\sin90^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\cdot1$

$=100+100\sqrt{3}+200$

$=100(3+\sqrt{3})$ 답 $100(3+\sqrt{3})$

1042

$\overline{AD}=x\ (x>0)$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로

$\frac{1}{2}\cdot20\cdot60\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot x\cdot60\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot20\cdot x\cdot\sin60^\circ$

$\frac{1}{2}\cdot20\cdot60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot20\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$300\sqrt{3}=15\sqrt{3}x+5\sqrt{3}x,\ 20\sqrt{3}x=300\sqrt{3}$

$\therefore x=15$ 답 15

다른 풀이 선분 AD가 ∠A의 이등분선이므로 $60 : 20 = \overline{BD} : \overline{CD}$

즉, $\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 1$이므로 $\overline{BD} = \frac{3}{4}\overline{BC}$

$$\therefore \triangle ABD = \frac{3}{4}\triangle ABC = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 60\cdot \sin 120^\circ\right)$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 60\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 225\sqrt{3}$$

이때 $\triangle ABD = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot 60\cdot\sin 60^\circ = 225\sqrt{3}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3},\ 15\sqrt{3}\,\overline{AD} = 225\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{AD} = 15$$

1043

코사인법칙에 의하여

$$7^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ,\ 49 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore 49 = b^2 + c^2 + bc \quad \cdots\cdots ㉠ \cdots ❶$$

이때 $b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc$이므로

$$b^2 + c^2 = 8^2 - 2bc = 64 - 2bc \quad \cdots\cdots ㉡ \cdots ❷$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $49 = 64 - 2bc + bc = 64 - bc$

$$\therefore bc = 15 \cdots ❸$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdots ❹$$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	비율
❶ 코사인법칙을 이용하여 b, c에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 b, c에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30 %
❸ bc의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $b + c = 8$이므로 $c = 8 - b$

코사인법칙에 의하여 $7^2 = b^2 + (8-b)^2 - 2\cdot b\cdot(8-b)\cdot\cos 120^\circ$

$$49 = b^2 + (64 - 16b + b^2) - 2b(8-b)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 - 8b + 15 = 0,\ (b-3)(b-5) = 0 \qquad \therefore b = 3 \text{ 또는 } b = 5$$

따라서 $b = 3, c = 5$ 또는 $b = 5, c = 3$이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

1044

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{BC}$이므로 $B = A = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$$\triangle ABC = 2\cdot 6^2\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 120^\circ$$
$$= 2\cdot 36\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

답 $9\sqrt{3}$

다른 풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = 2\cdot 6 \qquad \therefore \overline{BC} = 12\cdot\frac{1}{2} = 6$$

$\overline{AC} = \overline{BC} = 6$이고 $C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

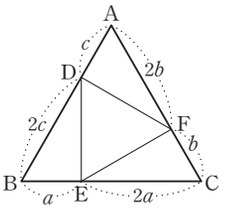
1045

오른쪽 그림에서

$\overline{BE} = a, \overline{CF} = b, \overline{AD} = c$라 하면

$\overline{CE} = 2a, \overline{AF} = 2b, \overline{BD} = 2c$이므로

두 삼각형 ABC와 ADF에서



$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3b\cdot 3c\cdot\sin A = \frac{9}{2}bc\sin A$$

$$\triangle ADF = \frac{1}{2}\cdot 2b\cdot c\cdot\sin A = bc\sin A$$

$$\therefore \triangle ADF = \frac{2}{9}\triangle ABC$$

같은 방법으로 $\triangle BED = \triangle CFE = \frac{2}{9}\triangle ABC$

$$\therefore \triangle DEF = \triangle ABC - (\triangle ADF + \triangle BED + \triangle CFE)$$
$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right)\right\}\triangle ABC$$
$$= \frac{1}{3}\triangle ABC$$

따라서 $m = 3, n = 1$이므로 $m + n = 3 + 1 = 4$ 답 ②

유형 13 삼각형의 넓이와 내접원 개념 03

세 변의 길이 a, b, c와 내접원의 반지름의 길이 r를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 ⇨ $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

1046

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos 60^\circ = 25 + 64 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 49$$

$$\therefore a = 7\ (\because a > 0)$$

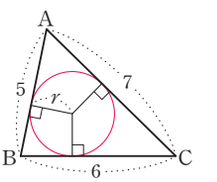
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(7+5+8) = 10r \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡에서 $10\sqrt{3} = 10r \qquad \therefore r = \sqrt{3}$ 답 ⑤

1047

오른쪽 그림과 같이 삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 구하는 원은 삼각형 ABC의 내접원이다.



$\cos B = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{5}$이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}\ (\because 0^\circ < B < 180^\circ)$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin B = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(5+6+7) = 9r \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡에서 $6\sqrt{6} = 9r \qquad \therefore r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

1048

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2\cdot 8}$, $\sin B=\frac{b}{2\cdot 8}$, $\sin C=\frac{c}{2\cdot 8}$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{16}+\frac{b}{16}+\frac{c}{16}=\frac{a+b+c}{16}$ … ❶

이때 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{5}{2}$이므로

$\frac{5}{2}=\frac{a+b+c}{16}$ $\therefore a+b+c=40$ … ❷

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\frac{7}{2}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot 40=70$ … ❸

답 70

채점 기준	비율
❶ 사인법칙을 이용하여 $\sin A+\sin B+\sin C$를 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1049

길이가 7인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\frac{4^2+9^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 9}=\frac{2}{3}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because 0^\circ<\theta<180^\circ$)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 9\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=6\sqrt{5}$

이때 $\triangle ABC=\frac{4\cdot 7\cdot 9}{4R}=\frac{63}{R}$이므로

$\frac{63}{R}=6\sqrt{5}$ $\therefore R=\frac{63}{6\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

또, $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(4+7+9)=10r$이므로

$10r=6\sqrt{5}$ $\therefore r=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore R-r=\frac{21\sqrt{5}}{10}-\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

유형 14 삼각형의 넓이와 헤론의 공식 개념 03

세 변의 길이 a, b, c를 알 때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

⇨ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

1050

세 변의 길이를 $2k, 3k, 3k$ ($k>0$)라 하면 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{2k+3k+3k}{2}=4k$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{4k(4k-2k)(4k-3k)(4k-3k)}=2\sqrt{2}k^2$

삼각형 ABC의 넓이가 $18\sqrt{2}$이므로

$2\sqrt{2}k^2=18\sqrt{2}$, $k^2=9$ $\therefore k=3$ ($\because k>0$)

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$2k+3k+3k=8k=8\cdot 3=24$

답 ④

1051

$a+b=4k$, $b+c=5k$, $c+a=6k$ ($k>0$)라 하고 세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=15k$ $\therefore a+b+c=\frac{15}{2}k$

삼각형 ABC의 둘레의 길이가 45이므로

$\frac{15}{2}k=30$ $\therefore k=4$

따라서 $a+b=16$, $b+c=20$, $c+a=24$이므로

$a=10$, $b=6$, $c=14$

따라서 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{30}{2}=15$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{15(15-10)(15-6)(15-14)}=15\sqrt{3}$

답 ④

1052

$b+c=7$에서 $c=7-b$

따라서 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7}{2}=6$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{6(6-5)(6-b)\{6-(7-b)\}}$

$=\sqrt{6(6-b)(b-1)}=6$

$6(6-b)(b-1)=36$, $b^2-7b+12=0$

$(b-3)(b-4)=0$ $\therefore b=3$ 또는 $b=4$

따라서 $a=5, b=3, c=4$ 또는 $a=5, b=4, c=3$이고

$a^2=b^2+c^2$이 성립하므로 $A=90^\circ$

답 ③

발전 유형 15 삼각형의 넓이와 최대·최소 개념 03

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$에서 $ab>0$, $\sin C>0$이므로

(1) 삼각형 ABC의 넓이가 최대이려면 ab, $\sin C$가 모두 최대이어야 한다.

(2) 삼각형 ABC의 넓이가 최소이려면 ab, $\sin C$가 모두 최소이어야 한다.

1053

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot\sin B=\frac{35}{2}\sin B$

삼각형 ABC의 넓이는 $\sin B$의 값이 최대일 때, 즉 $B=90^\circ$일 때 최대이다.

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$

답 $\sqrt{74}$

1054

$\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$ ($0<x\le 4$, $0<y\le 5$)라 하자.

삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin A\right)$

$\therefore xy=10$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy=2\cdot 10=20$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2$의 최솟값은 20이다.

답 20

유형 16 사각형의 넓이 – 삼각형 이용 개념 03

사각형의 넓이를 구할 때
(i) 사각형을 여러 개의 삼각형으로 나눈다.
(ii) 각각의 삼각형의 넓이를 구하여 더한다.

1055

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos 60^\circ=4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2}=12$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{AC}>0)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{6}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle ACD=2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

1056

선분 AC를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+(2+2\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\cos 60^\circ$

$=16+(16+8\sqrt{3})-2\cdot4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=24$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6}\ (\because \overline{AC}>0)$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin(\angle ACB)}$이므로 $2\sqrt{6}\sin(\angle ACB)=4\sin 60^\circ$

$\therefore \sin(\angle ACB)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, $\angle ACB=45^\circ\ (\because 0^\circ<\angle ACB<90^\circ)$이므로 $\angle ACD=45^\circ$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

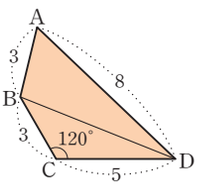
$\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot4\cdot\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=(2\sqrt{3}+6)+4\sqrt{3}=6+6\sqrt{3}$ 답 $6+6\sqrt{3}$

1057



오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 그으면
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos 120^\circ$

$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore \overline{BD}=7\ (\because \overline{BD}>0)$

삼각형 ABD에서 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{3+7+8}{2}=9$이므로

$\triangle ABD=\sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)}=6\sqrt{3}$

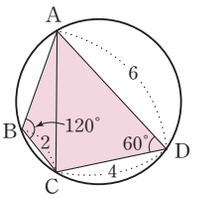
따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=6\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin 120^\circ$

$=6\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}+\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$ 답 ③

1058



오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그으면
삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\cos 60^\circ$

$=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}=28$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{7}\ (\because \overline{AC}>0)$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$B=180^\circ-D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\overline{AB}=x\ (x>0)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{7})^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot\cos 120^\circ$

$28=x^2+4-2\cdot x\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),\ x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4\ (\because x>0)$

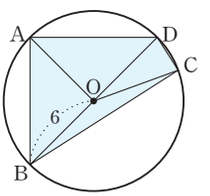
따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 답 ⑤

1059



$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}$

$=\angle AOB:\angle BOC:\angle COD:\angle DOA$

$=3:5:1:3$

$\angle AOB=360^\circ\cdot\frac{3}{12}=90^\circ$,

$\angle BOC=360^\circ\cdot\frac{5}{12}=150^\circ$,

$\angle COD=360^\circ\cdot\frac{1}{12}=30^\circ$, $\angle DOA=360^\circ\cdot\frac{3}{12}=90^\circ$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin 90^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin 150^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin 90^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot1+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot1$

$=18+9+9+18=54$ 답 ②

유형 17 평행사변형의 넓이 개념 04

이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형 ABCD의 넓이는 ⇨ $ab\sin\theta$

1060

평행사변형의 성질에 의하여

$B=180^\circ-C=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

$\therefore$ (평행사변형 ABCD의 넓이)$=6\cdot8\cdot\sin 45^\circ$

$=6\cdot8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$ 답 ④

1061

평행사변형 ABCD의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$4\cdot6\cdot\sin B=12\sqrt{3}$ $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore B=60^\circ$ ($\because 0^\circ<B<90^\circ$) 답 60°

1062

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{3^2+5^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{1}{5}$

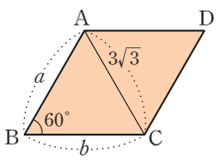
$\therefore \sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ($\because 0^\circ<B<180^\circ$)

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$3\cdot5\cdot\sin B=3\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$ 답 $6\sqrt{6}$

1063

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $(3\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$



$a^2+b^2-ab=27$, $(a+b)^2-3ab=27$

이때 $a+b=9$이므로

$9^2-3ab=27$ $\therefore ab=18$

$\therefore$ (평행사변형 ABCD의 넓이)$=ab\sin60^\circ$

$=18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ 답 ④

유형 18 사각형의 넓이 – 대각선 이용 개념 04

두 대각선의 길이가 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형 ABCD의 넓이는 ⇨ $\frac{1}{2}pq\sin\theta$

1064

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\overline{BD}\cdot\sin120^\circ=2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\cdot2\cdot\overline{BD}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BD}=4$ 답 4

1065

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because 0^\circ<\theta<180^\circ$)

$\therefore$ (사각형 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot9\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot9\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=12\sqrt{2}$ 답 $12\sqrt{2}$

1066

$p>0$, $q>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$p+q\geq2\sqrt{pq}$, $6\geq2\sqrt{pq}$ $\therefore pq\leq9$ (단, 등호는 $p=q$일 때 성립)

$\therefore$ (사각형 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}pq\sin60^\circ$

$\leq\frac{1}{2}\cdot9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 답 ②

1067

(평행사변형 ABCD의 넓이)$=2\cdot4\cdot\sin60^\circ=2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos60^\circ=4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2}=12$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC}>0$) … ❶

$A=180^\circ-B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\cos120^\circ$

$=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=28$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{7}$ ($\because \overline{BD}>0$) … ❷

따라서 (사각형 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{7}\cdot\sin\theta=4\sqrt{3}$이므로

$2\sqrt{21}\sin\theta=4\sqrt{3}$

$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ … ❸

답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 BD의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 사각형의 넓이를 이용하여 $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

STEP 3 내신 마스터

1068

유형 01 사인법칙

|전략| 삼각형 ABC에서 A의 크기를 구한 다음 사인법칙을 이용한다.

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(15^\circ+45^\circ)=120^\circ$이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin120^\circ}=\frac{12}{\sin45^\circ}$, $\overline{BC}\sin45^\circ=12\sin120^\circ$

$\therefore \overline{BC}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=6\sqrt{6}$ 답 ⑤

1069

유형 02 사인법칙과 삼각형의 외접원

|전략| C의 크기와 선분 AM의 길이를 구한 다음 사인법칙을 이용한다.

삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로 $C=45^\circ$

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot6=3$이므로 삼각형 ABM에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

삼각형 AMC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3\sqrt{5}}{\sin45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{3\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ 답 ③

1070

유형 02 사인법칙과 삼각형의 외접원

|전략| A, B, C의 크기를 구하고, $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$임을 이용한다.

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이고

$A : B : C=1 : 2 : 3$이므로

$A=180^\circ\cdot\frac{1}{6}=30^\circ$, $B=180^\circ\cdot\frac{2}{6}=60^\circ$, $C=180^\circ\cdot\frac{3}{6}=90^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A=2R\sin 30^\circ=2R\cdot\frac{1}{2}=R$

$b=2R\sin B=2R\sin 60^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$c=2R\sin C=2R\sin 90^\circ=2R\cdot 1=2R$

이때 $a+b+c=6$이므로 $a+b+c=R+\sqrt{3}R+2R$에서

$6=(3+\sqrt{3})R$

$\therefore R=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$ 답 ①

1071

유형 03 사인법칙의 변형 – 변의 길이의 비

|전략| $\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c$임을 이용한다.

$2a-b=9k$, $2b-c=k$, $2c-a=4k$ (k는 실수)로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$a+b+c=14k$ …… ㉠

$2a-b=9k$에서 $b=2a-9k$ …… ㉡

$2c-a=4k$에서 $c=\frac{a}{2}+2k$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$a+(2a-9k)+\left(\frac{a}{2}+2k\right)=14k$, $\frac{7}{2}a=21k$ $\therefore a=6k$

$a=6k$를 ㉡, ㉢에 대입하면

$b=2\cdot 6k-9k=3k$, $c=\frac{6k}{2}+2k=5k$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C=a : b : c=6k : 3k : 5k$

$=6 : 3 : 5$ 답 ④

1072

유형 04 삼각형의 모양 결정(1)

|전략| (판별식)$=0$임을 이용하여 식을 정리하고, 사인법칙을 이용하여 a, b, c에 대한 관계식을 구해 삼각형의 모양을 판별한다.

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2 C-(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)=0$

$\sin^2 C-\cos^2 A+\cos^2 B=0$

$\sin^2 C-(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=0$

$\therefore \sin^2 C+\sin^2 A-\sin^2 B=0$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2=0$ $\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다. 답 ④

1073

유형 07 코사인법칙의 변형

|전략| 코사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 $\cos B$의 값을 구하고 삼각형 ABD에서 선분 AD의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16}$

점 D가 변 BC를 $1 : 2$로 내분하므로 $\overline{BD}=2$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\cos B=16+4-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{9}{16}=11$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{11}$ ($\because \overline{AD}>0$) 답 ②

1074

유형 08 사인법칙과 코사인법칙

|전략| 사인법칙을 이용하여 선분 AP의 길이를 구하고, 코사인법칙을 이용하여 선분 AB의 길이를 구한다.

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AP}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$, $\overline{AP}\sin 60^\circ=\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=\overline{AP}=\sqrt{2}$이고

$\angle APB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 120^\circ$

$=2+2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{6}$ ($\because \overline{AB}>0$) 답 ①

다른 풀이 삼각형 ABP에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\angle APC=60^\circ$이므로

$\angle ABP=\angle BAP=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{AB}\sin 30^\circ=\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{6}$

1075

유형 09 삼각형의 최대각과 최소각

|전략| 세 변의 길이의 크기를 비교하여 가장 짧은 변의 대각이 최소각임을 이용한다.

$\frac{2b-a}{7}=\frac{2c-b}{12}=\frac{2c-a}{13}=k$ (k는 실수)라 하면

$2b-a=7k$ …… ㉠

$2c-b=12k$ …… ㉡

$2c-a=13k$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면 $a-b=-k$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=5k$, $b=6k$

$a=5k$를 ㉢에 대입하여 풀면 $c=9k$

가장 짧은 변의 길이가 a이므로 A가 삼각형 ABC의 최소각이다.

따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\cos A=\frac{(6k)^2+(9k)^2-(5k)^2}{2\cdot 6k\cdot 9k}=\frac{92k^2}{108k^2}=\frac{23}{27}$ 답 ④

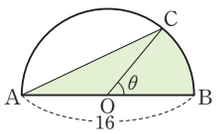
1076

유형 12 삼각형의 넓이

|전략| 주어진 부분을 삼각형과 부채꼴로 나누어 넓이를 각각 구한다.

반원의 중심을 O라 하면 $\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 16=8$

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, AC와 호 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 삼각형 OAC와 부채꼴 BOC의 넓이의 합과 같다.



$\angle BOC=\theta$라 하면 호 BC의 길이가 2π이므로

$8\theta=2\pi \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

따라서 $\angle AOC=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 64\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=8\pi+16\sqrt{2}$$

답 ⑤

1077

유형 12 삼각형의 넓이 + 13 삼각형의 넓이와 내접원

|전략| 사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 R와 r 사이의 관계식을 구한다.

$\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C$ ····· ㉠

한편, 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$이므로

$a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\{2R(\sin A+\sin B+\sin C)\}$$
$$=Rr(\sin A+\sin B+\sin C) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡에서

$2R^2\sin A\sin B\sin C=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$이므로

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{2R^2}{Rr}=\frac{2R}{r}$$

$\therefore k=2$

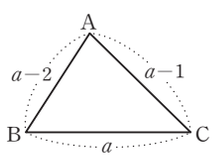
답 ②

1078

유형 14 삼각형의 넓이와 헤론의 공식

|전략| 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 a의 값을 구하고, 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$a^2=(a-1)^2+(a-2)^2$
$\quad -2\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot\cos A$

$a^2=(a^2-2a+1)+(a^2-4a+4)$
$\quad -2(a^2-3a+2)\cdot\frac{1}{5}$

$a^2-8a+7=0,\ (a-1)(a-7)=0 \quad \therefore a=7\ (\because a>3)$

따라서 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 5, 7, 6이므로 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{5+7+6}{2}=9$

$\therefore \triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-7)(9-6)}=6\sqrt{6}$

답 ④

1079

유형 15 삼각형의 넓이와 최대·최소

|전략| 코사인법칙을 이용하여 C의 크기를 구하고, $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$임을 이용한다.

$c^2-ab=(a-b)^2$에서

$c^2-ab=a^2-2ab+b^2 \quad \therefore c^2=a^2-ab+b^2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a^2-ab+b^2)}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$$

$\therefore C=60^\circ\ (\because 0^\circ<C<180^\circ)$

한편, $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab},\ 8\ge 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}\le 4 \quad \therefore ab\le 16$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$\le\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

답 ④

다른 풀이 $a+b=8$에서 $b=8-a\ (0<a<8)$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a(8-a)\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(-a^2+8a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(a-4)^2+4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다.

1080

유형 17 평행사변형의 넓이

|전략| 평행사변형의 넓이를 이용하여 $\sin B$의 값을 구하고, 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구한다.

평행사변형 ABCD의 넓이가 $10\sqrt{3}$이므로

$4\cdot 5\cdot\sin B=10\sqrt{3} \quad \therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore B=60^\circ\ (\because 0^\circ<B<90^\circ)$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=16+25-2\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=21$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{21}\ (\because \overline{AC}>0)$

답 ②

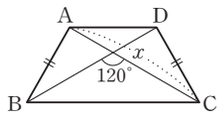
1081

유형 18 사각형의 넓이 – 대각선 이용

|전략| 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이가 서로 같음을 이용한다.

$\overline{AC}=x\ (x>0)$라 하면 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{BD}=x$



등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $9\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\sin 120^\circ=9\sqrt{3},\ \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

$x^2=36 \quad \therefore x=6\ (\because x>0)$

따라서 등변사다리꼴 ABCD의 한 대각선의 길이는 6이다.

답 ③

1082

유형 07 코사인법칙의 변형

|전략| $\angle BCA=\angle DAC=\theta$, $\overline{AC}=x$로 놓고 두 삼각형 ABC와 ACD에서 $\cos\theta$의 값이 같음을 이용한다.

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle BCA=\angle DAC=\theta$라 하고

$\overline{AC}=x\ (x>0)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{9^2+x^2-8^2}{2\cdot9\cdot x}=\frac{x^2+17}{18x} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{3^2+x^2-6^2}{2\cdot3\cdot x}=\frac{x^2-27}{6x} \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠=㉡에서 $\frac{x^2+17}{18x}=\frac{x^2-27}{6x}$이므로

$x^2+17=3x^2-81$, $x^2=49$ $\quad\therefore x=7\ (\because x>0)$

따라서 선분 AC의 길이는 7이다. $\cdots ❸$

답 7

채점 기준	배점
❶ $\angle BCA=\angle DAC=\theta$, $\overline{AC}=x$로 놓고 삼각형 ABC에서 $\cos\theta$의 값을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 삼각형 ACD에서 $\cos\theta$의 값을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	3점

1083

유형 12 삼각형의 넓이

|전략| $\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$임을 이용한다.

$\overline{AD}=x\ (x>0)$라 하면

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot x\cdot5\cdot\sin\theta_1=\frac{5}{2}x\sin\theta_1$$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin\theta_2=2x\sin\theta_2 \quad \cdots ❶$$

이때 두 삼각형 ABD와 ACD에서 $\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$이고 두 삼각형의 높이가 같으므로 $\triangle ABD:\triangle ACD=3:2$ $\cdots ❷$

따라서 $\frac{5}{2}x\sin\theta_1:2x\sin\theta_2=3:2$이므로

$$5x\sin\theta_1=6x\sin\theta_2 \quad \therefore \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{6x}{5x}=\frac{6}{5} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{6}{5}$

채점 기준	배점
❶ 두 삼각형 ABD와 ACD의 넓이를 선분 AD의 길이를 이용하여 나타낼 수 있다.	2점
❷ 두 삼각형 ABD와 ACD의 넓이의 비를 구할 수 있다.	2점
❸ $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$의 값을 구할 수 있다.	2점

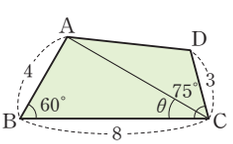
1084

유형 16 사각형의 넓이 – 삼각형 이용

|전략| 선분 AC의 길이와 $\angle ACD$의 크기를 구한 다음 사각형 ABCD의 넓이가 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합과 같음을 이용한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=4^2+8^2-2\cdot4\cdot8\cdot\cos60^\circ$$
$$=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\frac{1}{2}=48$$



$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{3}\ (\because \overline{AC}>0)$ $\cdots ❶$

$\angle ACB=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin\theta}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin60^\circ},\ 4\sqrt{3}\sin\theta=4\sin60^\circ$$

$$\sin\theta=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=30^\circ\ (\because 0^\circ<\theta<75^\circ)$ $\cdots ❷$

따라서 $\angle ACD=75^\circ-30^\circ=45^\circ$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot3\cdot\sin45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=8\sqrt{3}+3\sqrt{6} \quad \cdots ❸$$

답 $8\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

채점 기준	배점
❶ 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	2점
❷ $\angle ACB=\theta$라 할 때, 사인법칙을 이용하여 θ의 크기를 구할 수 있다.	2점
❸ 사각형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	3점

1085

유형 08 사인법칙과 코사인법칙

|전략| 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이와 외접원의 반지름의 길이를 구하고, 이를 이용하여 호수의 넓이를 구한다.

(1) 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=8^2+10^2-2\cdot8\cdot10\cdot\cos60^\circ$$
$$=64+100-2\cdot8\cdot10\cdot\frac{1}{2}=84$$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{21}\ (\mathrm{m})\ (\because \overline{AC}>0)$

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{21}}{\sin60^\circ}=2R \quad \therefore R=\frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{7}\ (\mathrm{m})$$

(3) 호수의 넓이는

$\pi\cdot(2\sqrt{7})^2=28\pi\ (\mathrm{m}^2)$

답 (1) $2\sqrt{21}$ m (2) $2\sqrt{7}$ m (3) 28π m^2

채점 기준	배점
(1) 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	4점
(2) 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	4점
(3) 호수의 넓이를 구할 수 있다.	2점

1086

유형 14 삼각형의 넓이와 헤론의 공식

|전략| 삼각형의 결정 조건으로 x의 값의 범위를 구하고, 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구한다.

(1) 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$4+(x+1)>5-x$ $\quad\therefore x>0$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$4+(5-x)>x+1$ $\quad\therefore x<4$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

$(x+1)+(5-x)>4$ $\quad\therefore 6>4$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $0<x<4$

(2) 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{4+(x+1)+(5-x)}{2}=5$이므로

$S=\sqrt{5(5-4)\{5-(x+1)\}\{5-(5-x)\}}$

$=\sqrt{5(4-x)x}=\sqrt{-5x^2+20x}$

$=\sqrt{-5(x-2)^2+20}$

$\therefore p=2, q=20$

(3) $0<x<4$에서 S의 최댓값은 $x=2$일 때 $2\sqrt{5}$이다.

답 (1) $0<x<4$ (2) $p=2, q=20$ (3) $2\sqrt{5}$

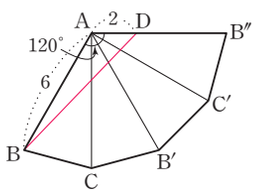
채점 기준	배점
(1) 삼각형이 결정되기 위한 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
(2) 헤론의 공식을 이용하여 상수 p, q의 값을 각각 구할 수 있다.	6점
(3) S의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

1087

|전략| 점 B에서 점 D에 이르는 최단 거리는 직선 거리이므로 대칭이동을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 선분 AC에 대하여 대칭이동한 것을 선분 AB′, 선분 AC를 선분 AB′에 대하여 대칭이동한 것을 선분 AC′, 선분 AB′을 선분 AC′에 대하여 대칭이동한 것을 선분 AB″이라 하자.



점 B를 출발하여 점 D에 이르는 최단 거리는 선분 BD의 길이와 같다.

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+6^2-2\cdot2\cdot6\cdot\cos120^\circ=4+36-2\cdot2\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=52$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{13}$ ($\because \overline{BD}>0$)

답 $2\sqrt{13}$

1088

|전략| $\angle BFE$의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내고, 세 삼각형 EFG, BGF, EFB에서 사인법칙, 코사인법칙을 적용한다.

ㄱ. 삼각형 BGF에서 $\angle FBG=120^\circ$, $\angle BGF=\theta$이므로

$\angle BFG=180^\circ-(120^\circ+\theta)=60^\circ-\theta$

$\therefore \angle BFE=\angle BFG+\angle EFG=(60^\circ-\theta)+30^\circ=90^\circ-\theta$ (참)

ㄴ. 삼각형 EFG에서 $\angle FGE=\angle EFG=30^\circ$,

$\angle FEG=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{FG}}{\sin120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin30^\circ}$, $\overline{FG}\sin30^\circ=\sqrt{2}\sin120^\circ$

$\therefore \overline{FG}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2=\sqrt{6}$

즉, 삼각형 BGF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{6}}{\sin120^\circ}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$, $\overline{BF}\sin120^\circ=\sqrt{6}\sin\theta$

$\therefore \overline{BF}=\sqrt{6}\cdot\sin\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}\sin\theta$ (거짓)

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=\overline{EF}^2+\overline{BF}^2-2\cdot\overline{EF}\cdot\overline{BF}\cdot\cos(\angle BFE)$

$=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\cos(90^\circ-\theta)$

$=2+8\sin^2\theta-8\sin^2\theta=2$

이므로 $\overline{BE}=\sqrt{2}$ ($\because \overline{BE}>0$)로 항상 일정하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

1089

|전략| 원주각의 성질과 주어진 조건을 이용하여 $\overline{AD}:\overline{BC}$를 구한다.

$\angle BAD$와 $\angle BCD$는 호 BD에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

즉, $\angle BAD=\angle BCD=\theta$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\overline{AD}\cdot\sin\theta=3\overline{AD}\sin\theta$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot4\cdot\sin\theta=2\overline{BC}\sin\theta$

이때 $S_1:S_2=9:5$이므로

$3\overline{AD}\sin\theta:2\overline{BC}\sin\theta=9:5$

$\therefore \overline{AD}:\overline{BC}=6:5$

$\overline{AD}=6k$, $\overline{BC}=5k$ ($k>0$)라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\cdot6\cdot5k\cdot\cos\alpha$

$=36+25k^2-2\cdot6\cdot5k\cdot\frac{3}{4}=25k^2-45k+36$ ····· ㉠

$\angle ABC$와 $\angle ADC$는 호 AC에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

즉, $\angle ADC=\alpha$이므로 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\cdot6k\cdot4\cdot\cos\alpha$

$=36k^2+16-2\cdot6k\cdot4\cdot\frac{3}{4}=36k^2-36k+16$ ····· ㉡

㉠=㉡에서 $25k^2-45k+36=36k^2-36k+16$이므로

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$ $\therefore k=1$ ($\because k>0$)

따라서 $\overline{AD}=6$이고,

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ($\because 0<\alpha<180^\circ$)이므로

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

답 $3\sqrt{7}$

1090

|전략| $\overline{AD}=\overline{CE}=a$로 놓고 코사인법칙을 이용하여 a의 값을 구한다.

$\overline{AD}=\overline{CE}=a$ ($a>0$)라 하면 $\overline{AE}=a+1$이므로 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=(a+1)^2+a^2-2\cdot(a+1)\cdot a\cdot\cos60^\circ$

$21=(a^2+2a+1)+a^2-2(a^2+a)\cdot\frac{1}{2}$

$a^2+a-20=0$, $(a+5)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$\therefore \triangle BDE=\triangle ADE-\triangle ABE$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\sin60^\circ-\frac{1}{2}\cdot5\cdot1\cdot\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot5\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

1091

|전략| ∠BPC=θ로 놓고 두 삼각형 PBC, ABC의 넓이가 같음을 이용한다.

∠BPC=θ로 놓으면 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}bc\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3 \quad \therefore bc=\frac{18}{\sin\theta}$ ····· ㉠

(i) 점 P가 점 A와 일치할 때, $c=\overline{AC}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

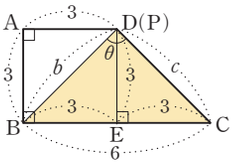
(ii) 점 P가 점 D와 일치할 때, 점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E라 하면

∠BDE=45°이고

△BDE≡△CDE이므로

∠CDE=45°

$\therefore \sin\theta=\sin(\angle BDC)=\sin90^\circ=1$



(i), (ii)에서 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\le\sin\theta\le1$이므로 ㉠에 의하여 $18\le bc\le9\sqrt{5}$

따라서 bc의 최댓값은 $9\sqrt{5}$, 최솟값은 18이다.

답 최댓값: $9\sqrt{5}$, 최솟값: 18

1092

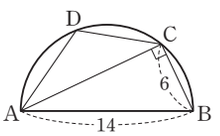
|전략| 사각형 ABCD를 두 개의 삼각형으로 나누어 생각한다.

ㄱ. 선분 AC를 그으면 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{14^2-6^2}=4\sqrt{10}$

$\therefore \sin(\angle CBA)$

$=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4\sqrt{10}}{14}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)



ㄴ. 사각형 ABCD가 원에 내접하는 사각형이므로

∠CBA=θ라 하면 ∠ADC=π−θ

$\overline{AD}=k$ ($k>0$)라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=7^2+k^2-2\cdot7\cdot k\cdot\cos(\pi-\theta)$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이고, $\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$이므로

$160=49+k^2-2\cdot7\cdot k\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$, $k^2+6k-111=0$

즉, $k=-3+2\sqrt{30}$ ($\because k>0$)이므로 $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다.

→ 점 D는 선분 AC와 평행한 접선과 반원의 접점

$\overline{AD}=\overline{CD}$이므로 $\overline{AD}=a$ ($a>0$)라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여 $(4\sqrt{10})^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos(\pi-\theta)$

$160=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$, $a^2=56$

$\therefore a=2\sqrt{14}$ ($\because a>0$)

→ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{3}{7}$

즉, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sqrt{10}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}\cdot\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sqrt{10}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}$

→ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$=12\sqrt{10}+8\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

8 등차수열과 등비수열

본책 146~167쪽

STEP 1 개념 마스터 1

1093

$a_n=10^n-1$의 n에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=10^1-1=9$, $a_2=10^2-1=99$, $a_3=10^3-1=999$

$a_4=10^4-1=9999$, $a_5=10^5-1=99999$

답 9, 99, 999, 9999, 99999

1094

$a_n=n+2^n$의 n에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=1+2^1=3$, $a_2=2+2^2=6$, $a_3=3+2^3=11$

$a_4=4+2^4=20$, $a_5=5+2^5=37$ 답 3, 6, 11, 20, 37

1095

$a_n=(n+2)(n-1)$의 n에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=(1+2)(1-1)=0$, $a_2=(2+2)(2-1)=4$

$a_3=(3+2)(3-1)=10$, $a_4=(4+2)(4-1)=18$

$a_5=(5+2)(5-1)=28$ 답 0, 4, 10, 18, 28

1096

답 $a_n=(-1)^n$

1097

답 $a_n=n^2$

1098

답 $a_n=\frac{n}{n+1}$

1099

4−1=3에서 공차가 3이므로 주어진 수열은

1, 4, [7], [10], 13, ⋯ 답 7, 10

1100

8−12=−4에서 공차가 −4이므로 주어진 수열은

20, [16], 12, 8, [4], ⋯ 답 16, 4

1101

$a_n=4n+1$에서 $a_1=4\cdot1+1=5$이므로 첫째항은 5이다.

또, $a_2=4\cdot2+1=9$이므로 공차는

$a_2-a_1=9-5=4$ 답 첫째항: 5, 공차: 4

1102

$a_n=-5n+3$에서 $a_1=-5\cdot1+3=-2$이므로 첫째항은 −2이다.

또, $a_2=-5\cdot2+3=-7$이므로 공차는

$a_2-a_1=-7-(-2)=-5$ 답 첫째항: −2, 공차: −5

1103
첫째항이 -3, 공차가 3이므로
$a_n=-3+(n-1)\cdot 3=3n-6$ 답 $a_n=3n-6$

1104
$1,\ \ -1,\ \ -3,\ \ -5,\ \ -7,\cdots$
$\quad\ +(-2)\ \ +(-2)\ \ +(-2)\ \ +(-2)$
첫째항이 1, 공차가 -2이므로
$a_n=1+(n-1)\cdot(-2)=-2n+3$ 답 $a_n=-2n+3$

1105
첫째항이 -1, 공차가 $2-(-1)=3$이므로
$a_n=-1+(n-1)\cdot 3=3n-4$
$\therefore a_{10}=3\cdot 10-4=26$ 답 26

1106
첫째항이 2, 공차가 $-2-2=-4$이므로
$a_n=2+(n-1)\cdot(-4)=-4n+6$
$\therefore a_{10}=-4\cdot 10+6=-34$ 답 -34

1107
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $a_1=6$이므로 공차를 d라 하면
$a_8=41$에서
$6+7d=41,\ 7d=35$
$\therefore d=5$ 답 5

1108
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=8,\ a_{10}=-34$에서
$a+2d=8,\ a+9d=-34$
두 식을 변끼리 빼면
$-7d=42 \qquad \therefore d=-6$ 답 -6

1109
x가 5와 17의 등차중항이므로
$x=\dfrac{5+17}{2}=11$ 답 11

1110
x가 3과 -7의 등차중항이므로
$x=\dfrac{3+(-7)}{2}=-2$ 답 -2

1111
$\dfrac{22(2+71)}{2}=803$ 답 803

1112
$\dfrac{10\{2\cdot(-10)+(10-1)\cdot 2\}}{2}=-10$ 답 -10

1113
주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로
일반항 a_n은
$a_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$
38을 제n항이라 하면
$4n-2=38,\ 4n=40 \qquad \therefore n=10$
$\therefore 2+6+10+\cdots+38=\dfrac{10(2+38)}{2}=200$ 답 200

1114
주어진 수열은 첫째항이 16, 공차가 -5인 등차수열이므로
일반항 a_n은
$a_n=16+(n-1)\cdot(-5)=-5n+21$
-19를 제n항이라 하면
$-5n+21=-19,\ -5n=-40 \qquad \therefore n=8$
$\therefore 16+11+6+\cdots+(-19)=\dfrac{8\{16+(-19)\}}{2}=-12$ 답 -12

1115
$a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+4\cdot 10)-(9^2+4\cdot 9)=23$ 답 23
다른 풀이 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+4\cdot 1=5$
(ii) $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$
$=n^2+4n-(n^2+2n-3)$
$=2n+3$ ····· ㉠
이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n=2n+3$
$\therefore a_{10}=2\cdot 10+3=23$

1116
(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2\cdot 1^2+3\cdot 1=5$
(ii) $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=2n^2+3n-(2n^2-n-1)$
$=4n+1$ ····· ㉠
이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=4n+1$ 답 $a_n=4n+1$

1117
(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-2\cdot 1+2=1$
(ii) $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n+2)-\{(n-1)^2-2(n-1)+2\}$
$=n^2-2n+2-(n^2-4n+5)$
$=2n-3$ ····· ㉠
이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로
$a_1=1,\ a_n=2n-3\ (n\geq 2)$ 답 $a_1=1,\ a_n=2n-3\ (n\geq 2)$

STEP 2 유형 마스터 ❶

유형 01 등차수열의 일반항 개념 02

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
⇨ $a_n=a+(n-1)d$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이다.
⇨ $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots$

(3) 등차수열의 일반항은 $a_n=pn+q$ (p, q는 상수)의 꼴로 n에 대한 일차식이고, 첫째항은 $p+q$, 공차는 p이다.

1118

첫째항이 -7, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=-7+(n-1)\cdot 3=3n-10$
이때 $a_k=17$이므로
$3k-10=17$, $3k=27$ $\therefore k=9$ 답 ⑤

1119

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3-a_1=a_4-a_2=\cdots=a_{99}-a_{97}=a_{100}-a_{98}=2d$
이므로
$a_{100}+a_{99}-a_{98}-a_{97}=(a_{100}-a_{98})+(a_{99}-a_{97})=4d=20$
$\therefore d=5$
$\therefore a_{10}-a_7=3d=3\cdot 5=15$ 답 15

1120

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, $\cdots$
(각 인접 항 사이 $+d$)
$\{a_{3n-1}\}$: a_2, a_5, a_8, $\cdots$
($+3d$, $+3d$)
즉, 수열 $\{a_{3n-1}\}$은 공차가 $3d$인 등차수열이다.
$\{a_{2n+1}\}$: a_3, a_5, a_7, $\cdots$
($+2d$, $+2d$)
즉, 수열 $\{a_{2n+1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 $d=2$
등차수열 $\{a_{3n-1}\}$의 공차는 $x=3d=3\cdot 2=6$
등차수열 $\{a_{2n+1}\}$의 공차는 $y=2d=2\cdot 2=4$
$\therefore x-y=6-4=2$ 답 ⑤

1121

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=35$에서 $a+2d=35$ …… ㉠
$a_7=71$에서 $a+6d=71$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=17$, $d=9$
$a_n=17+(n-1)\cdot 9=9n+8$이므로 197이 제n항이라 하면
$9n+8=197$, $9n=189$ $\therefore n=21$
따라서 197은 제21항이다. 답 제21항

유형 02 항 사이의 관계가 주어진 등차수열 개념 02

주어진 항 사이의 관계를 첫째항 a와 공차 d에 대한 식으로 표현한 다음 두 식을 연립하여 푼다.

1122

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=4a_3$에서 $a+4d=4(a+2d)$
$\therefore 3a+4d=0$ …… ㉠
$a_2+a_4=4$에서 $(a+d)+(a+3d)=4$
$\therefore a+2d=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$
따라서 $a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$이므로
$a_6=3\cdot 6-7=11$ 답 ③

1123

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=11$에서 $a+2d=11$ …… ㉠
$a_6:a_{10}=5:8$에서 $8a_6=5a_{10}$
$8(a+5d)=5(a+9d)$ $\therefore 3a-5d=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$
$a_n=5+(n-1)\cdot 3=3n+2$이므로 98이 제n항이라 하면
$3n+2=98$, $3n=96$ $\therefore n=32$
따라서 98은 제32항이다. 답 ②

1124

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 a_5와 a_{11}은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 $a_5+a_{11}=0$에서
$(a+4d)+(a+10d)=0$ $\therefore a+7d=0$ …… ㉠
$a_7=4$에서 $a+6d=4$ …… ㉡ … ❶
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=28$, $d=-4$ … ❷
$\therefore a_n=28+(n-1)\cdot(-4)=-4n+32$ … ❸
따라서 $a_{10}=-4\cdot 10+32=-8$이므로 제10항은 -8이다. … ❹
답 -8

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❹ 제10항을 구할 수 있다.	20 %

1125

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d ($d>0$)라 하면
$a_3+a_7=0$에서 $(a+2d)+(a+6d)=0$
$a+4d=0$ $\therefore a=-4d$ …… ㉠
$|a_4|=|a_5|+3$에서
$|a+3d|=|a+4d|+3$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$|-4d+3d|=|-4d+4d|+3$
$|-d|=3$ $\therefore |d|=3$

이때 $d>0$이므로 $d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면 $a=-12$

따라서 $a_n=-12+(n-1)\cdot 3=3n-15$이므로

$a_9=3\cdot 9-15=12$ 답 12

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$라 하면 a_5가 a_3과 a_7의 등차중항이므로

$a_5=\frac{a_3+a_7}{2}=0$

이것을 $|a_4|=|a_5|+3$에 대입하면 $|a_4|=3$

이때 $a_4+d=a_5=0$이고 $d>0$이므로 $a_4=-3$

$\therefore d=a_5-a_4=0-(-3)=3$

$\therefore a_9=a_5+4d=0+4\cdot 3=12$

유형 03 조건을 만족시키는 등차수열 개념 02

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

(1) 처음으로 양수가 되는 항

⇨ $a+(n-1)d>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

(2) 처음으로 음수가 되는 항

⇨ $a+(n-1)d<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

1126

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=17$에서 $a+5d=17$ …… ㉠

$a_{20}=-25$에서 $a+19d=-25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=32$, $d=-3$

$\therefore a_n=32+(n-1)\cdot(-3)=-3n+35$

$-3n+35<0$에서 $3n>35$ $\therefore n>\frac{35}{3}=11.\times\times\times$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제12항이다. 답 ②

1127

첫째항이 -40, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-40+(n-1)\cdot 3=3n-43$

$3n-43>0$에서 $3n>43$ $\therefore n>\frac{43}{3}=14.\times\times\times$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제15항이다. 답 ④

1128

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=99$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=99$

$\therefore a+d=33$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=63$에서

$(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=63$

$\therefore a+4d=21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=37$, $d=-4$

$\therefore a_n=37+(n-1)\cdot(-4)=-4n+41$

$-4k+41<10$에서 $4k>31$ $\therefore k>\frac{31}{4}=7.75$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다. 답 8

1129

$A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \cdots\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{3, 9, 15, \cdots\}$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열이므로

$c_n=3+(n-1)\cdot 6=6n-3$

$6n-3>50$에서 $6n>53$ $\therefore n>\frac{53}{6}=8.\times\times\times$

따라서 처음으로 50보다 커지는 항은 제9항이다. 답 제9항

유형 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열 개념 02

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면

⇨ 첫째항: a, 제$(n+2)$항: $b=a+(n+1)d$

1130

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 -6, 제10항이 75이므로

$-6+9d=75$, $9d=81$ $\therefore d=9$

이때 x_7은 주어진 수열의 제8항이므로

$x_7=-6+7\cdot 9=57$ 답 57

1131

첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열의 제$(n+2)$항이 34이므로

$4+(n+1)\cdot 2=34$, $2(n+1)=30$, $n+1=15$

$\therefore n=14$ 답 14

1132

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 23, 제$(n+2)$항이 35이므로

$23+(n+1)d=35$, $(n+1)d=12$

$\therefore d=\frac{12}{n+1}$ …… ㉠

이때 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 자연수이므로 d는 자연수이다.

㉠을 만족시키는 두 자연수 n, d의 값을 순서쌍 (n, d)로 나타내면

$(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(11, 1)$

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

1133

주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

수열 $0, a_1, a_2, \cdots, a_m, 10$에서 첫째항이 0, 제$(m+2)$항이 10이므로

$0+(m+1)d=10$ $\therefore d=\frac{10}{m+1}$ …… ㉠

또, 수열 $10, b_1, b_2, \cdots, b_n, 30$에서 첫째항이 10, 제$(n+2)$항이 30이므로

$10+(n+1)d=30$, $(n+1)d=20$ $\therefore d=\frac{20}{n+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{10}{m+1}=\frac{20}{n+1}$이므로

$10(n+1)=20(m+1)$, $n+1=2m+2$

$\therefore n=2m+1$ 답 ②

유형 05 등차중항 개념 02

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

⇨ $b=\frac{a+c}{2}$, 즉 $2b=a+c$

1134

x^2+4x가 $x+2$와 $3x+4$의 등차중항이므로

$x^2+4x=\frac{(x+2)+(3x+4)}{2}$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$-3+1=-2$ 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2+2x-3=0$은 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 합)$=-2$

참고 $x=-3$이면 주어진 세 수는 -1, -3, -5이므로 공차가 -2인 등차수열을 이루고, $x=1$이면 주어진 세 수는 3, 5, 7이므로 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

1135

다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(-1)=1-a+b$, $f(1)=1+a+b$, $f(2)=4+2a+b$

이때 $1+a+b$가 $1-a+b$와 $4+2a+b$의 등차중항이므로

$1+a+b=\frac{(1-a+b)+(4+2a+b)}{2}$

$2+2a+2b=5+a+2b$ $\therefore a=3$

한편, $f(x)$는 $x+2$로 나누어떨어지므로

$f(-2)=4-2a+b=0$ …… ㉠

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$4-6+b=0$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$ 답 ③

참고 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

1136

α, β가 이차방정식 $x^2-8x-4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=-4$ … ❶

m이 α와 β의 등차중항이므로

$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{8}{2}=4$ … ❷

n이 $\frac{1}{\alpha}$과 $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$n=\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{8}{2\cdot(-4)}=-1$ … ❸

$\therefore m-n=4-(-1)=5$ … ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1137

b가 a와 c의 등차중항이므로

$b=\frac{a+c}{2}$ …… ㉠

또, a^2이 c^2과 b^2의 등차중항이므로

$a^2=\frac{c^2+b^2}{2}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a^2=c^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$, $7a^2-2ac-5c^2=0$

$(7a+5c)(a-c)=0$ $\therefore c=-\frac{7}{5}a$ ($\because a\neq c$) ← a, b, c는 서로 다른 세 정수

이때 c가 정수이므로 a는 5의 배수이고 $0<a<10$이므로

$a=5$, $c=-7$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{5+(-7)}{2}=-1$

$\therefore a+b+c=5+(-1)+(-7)=-3$ 답 -3

유형 06 등차수열을 이루는 수 개념 02

등차수열을 이루는

세 수는 ⇨ $a-d, a, a+d$

네 수는 ⇨ $a-3d, a-d, a+d, a+3d$

로 놓고 식을 세운다.

1138

세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 세 수의 합이 12이므로

$(a-d)+a+(a+d)=12$

$3a=12$ $\therefore a=4$

또, 세 수의 제곱의 합이 66이므로

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=66$ …… ㉠

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$(4-d)^2+4^2+(4+d)^2=66$

$2d^2+48=66$, $d^2=9$

$\therefore d=\pm 3$ ← $d=-3$이면 세 수는 7, 4, 1 / $d=3$이면 세 수는 1, 4, 7

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로 구하는 세 수의 곱은

$1\cdot 4\cdot 7=28$ 답 28

1139

네 수를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$로 놓으면 네 수의 합이 16이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=16$

$4a=16$ $\therefore a=4$

또, 가운데 두 수의 곱은 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 8만큼 크므로

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+8$ …… ㉠

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$(4-d)(4+d)=(4-3d)(4+3d)+8$

$16-d^2=16-9d^2+8$, $d^2=1$

$\therefore d=\pm 1$ ← $d=-1$이면 네 수는 7, 5, 3, 1 / $d=1$이면 네 수는 1, 3, 5, 7

따라서 네 수는 1, 3, 5, 7이므로 구하는 네 수의 곱은

$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7=105$ 답 105

1140

삼차방정식 $x^3-3x^2+px+q=0$의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=3$, $3a=3$ $\therefore a=1$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1^3-3\cdot1^2+p\cdot1+q=0$ $\therefore p+q=2$ 답 2

1141

5명의 학생이 받은 빵의 개수를 작은 것부터 차례로

$a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$ $(d>0)$로 놓으면

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=120$

$5a=120$ $\therefore a=24$

또, $(a-2d)+(a-d)=\frac{1}{7}\{a+(a+d)+(a+2d)\}$이므로

$7(2a-3d)=3a+3d$ $\therefore 11a=24d$ …… ㉠

$a=24$를 ㉠에 대입하면 $11\cdot24=24d$ $\therefore d=11$

따라서 빵을 가장 많이 받은 학생의 빵의 개수는

$a+2d=24+2\cdot11=46$ 답 ③

유형 07 등차수열의 합 개념 03

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때 ⇨ $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때 ⇨ $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

1142

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ …… ㉠

$a_7=35$에서 $a+6d=35$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=6$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\frac{15\{2\cdot(-1)+(15-1)\cdot6\}}{2}=615$ 답 ④

1143

$a_n=4n-1$에서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3, 공차는 4이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합이 210이므로

$\frac{k\{2\cdot3+(k-1)\cdot4\}}{2}=210$

$2k^2+k-210=0$, $(2k+21)(k-10)=0$

$\therefore k=10$ ($\because k$는 자연수) 답 ③

1144

첫째항이 100, 제k항이 0인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합이 1050이므로

$\frac{k(100+0)}{2}=1050$ $\therefore k=21$

즉, $a_{21}=0$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$100+20d=0$ $\therefore d=-5$

따라서 공차는 -5이다. 답 -5

1145

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=-7$에서 $a+d=-7$ …… ㉠

$a_6=1$에서 $a+5d=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $d=2$

주어진 수열의 첫째항부터 제m항까지의 합이 0이므로

$\frac{m\{2\cdot(-9)+(m-1)\cdot2\}}{2}=0$

$m(m-10)=0$ $\therefore m=10$ ($\because m$은 자연수)

$\therefore a_{2m}=a_{20}=-9+19\cdot2=29$ 답 29

1146

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4+a_{10}=46$에서 $(a+3d)+(a+9d)=46$

$\therefore a+6d=23$ …… ㉠

$a_6+a_{14}=64$에서 $(a+5d)+(a+13d)=64$

$\therefore a+9d=32$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$

따라서 $a_1+a_2+\cdots+a_k=\frac{k\{2\cdot5+(k-1)\cdot3\}}{2}=220$에서

$3k^2+7k-440=0$, $(3k+40)(k-11)=0$

$\therefore k=11$ ($\because k$는 자연수) 답 11

1147

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=31+9d=4$ $\therefore d=-3$

$\therefore a_n=31+(n-1)\cdot(-3)=-3n+34$

$-3n+34<0$에서 $3n>34$ $\therefore n>\frac{34}{3}=11.\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제11항까지는 양수이고, 제12항부터 음수이다.

이때 $a_{11}=1$, $a_{12}=-2$, $a_{20}=-26$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11})-(a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{20})$

$=\frac{11(31+1)}{2}-\frac{9\{-2+(-26)\}}{2}=176+126=302$ 답 ④

Plus 1148~1149 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각각의 첫째항을 a, a', 제n항을 l, l', 공차를 d, d'이라 하고 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n, T_n이라 할 때 ⇨ 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a+a'$, 공차가 $d+d'$인 등차수열이다.

⇨ $S_n+T_n=\frac{n(a+l)}{2}+\frac{n(a'+l')}{2}=\frac{n\{(a+a')+(l+l')\}}{2}$

$=\frac{n\{2(a+a')+(n-1)(d+d')\}}{2}$

1148

첫째항이 $a_1+b_1=3$인 등차수열의 첫째항부터 제100항까지의 합이 550이므로

$S_{100}+T_{100}=\frac{100\{(a_1+b_1)+(a_{100}+b_{100})\}}{2}$

$=50\{3+(a_{100}+b_{100})\}=550$

$3+(a_{100}+b_{100})=11$ $\therefore a_{100}+b_{100}=8$ 답 ①

1149

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=12$, $d+d'=5$

$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_{30})+(b_1+b_2+\cdots+b_{30})$

$=\frac{30(2a_1+29d)}{2}+\frac{30(2b_1+29d')}{2}$

$=\frac{30\{2(a_1+b_1)+29(d+d')\}}{2}$

$=\frac{30(2\cdot12+29\cdot5)}{2}=2535$ 답 ②

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 12, 공차가 5인 등차수열이므로

$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_{30})+(b_1+b_2+\cdots+b_{30})$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{30}+b_{30})$

$=\frac{30\{2\cdot12+(30-1)\cdot5\}}{2}=2535$

유형 08 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열의 합 개념 03

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열의 합을 S라 하면 S는 첫째항이 a, 제$(n+2)$항이 b인 등차수열의 합이다.

⇨ $S=\frac{(n+2)(a+b)}{2}$

1150

첫째항이 1, 제$(n+2)$항이 39인 등차수열의 합이 400이므로

$\frac{(n+2)(1+39)}{2}=400$, $n+2=20$ $\therefore n=18$

이때 39는 제20항이므로

$1+(20-1)d=39$ $\therefore d=2$

$\therefore n+d=18+2=20$ 답 20

1151

주어진 수열은 첫째항이 52, 제12항이 8인 등차수열이므로

$52+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+8=\frac{12(52+8)}{2}=360$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=360-(52+8)=300$ 답 ③

1152

첫째항이 10, 공차가 4인 등차수열의 제$(n+2)$항이 42이므로

$10+(n+1)\cdot4=42$ $\therefore n=7$

따라서 첫째항이 10, 제9항이 42인 등차수열의 합은

$\frac{9(10+42)}{2}=234$ 답 234

1153

첫째항이 24, 제$(n+2)$항이 -44인 등차수열의 합은

$\frac{(n+2)\{24+(-44)\}}{2}=-10(n+2)$ …… ㉠

한편,

$24+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(-44)$

$=24+(-120)+(-44)=-140$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-10(n+2)=-140$ $\therefore n=12$ 답 ③

유형 09 부분의 합이 주어진 등차수열의 합 개념 03

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$, $S_{2n}=\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}$

⇨ 두 식을 연립하여 a, d의 값을 구한다.

1154

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=10$에서 $2a+9d=2$ …… ㉠

$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=40$에서 $2a+19d=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{10}$, $d=\frac{1}{5}$

$\therefore S_{30}=\frac{30\left\{2\cdot\frac{1}{10}+(30-1)\cdot\frac{1}{5}\right\}}{2}=90$ 답 ⑤

1155

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=S_6=\frac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=78$에서

$2a+5d=26$ …… ㉠

$a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{18}=S_{18}-S_6$

$=\frac{18\{2a+(18-1)d\}}{2}-78=-60$에서

$2a+17d=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=18$, $d=-2$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=S_{12}=\frac{12\{2\cdot18+(12-1)\cdot(-2)\}}{2}$

$=84$ 답 84

1156

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=50$에서

$a+2d=10$ …… ㉠

$S_{10}-S_5=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}-50=125$에서

$2a+9d=35$ …… ㉡ … ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=3$ … ❷

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제15항까지의 합은

$S_{15}-S_{10}=\frac{15\{2\cdot4+(15-1)\cdot3\}}{2}-(50+125)$

$=375-175=200$ … ❸

답 200

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $S_{15}-S_{10}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1157

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

$S_9=\dfrac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=90$에서 $a+4d=10$ …… ㉠

$|S_5|=\left|\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}\right|=90$에서 $|a+2d|=18$

$\therefore a+2d=-18$ …… ㉡ 또는 $a+2d=18$ …… ㉢

(i) ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-46$, $d=14$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) ㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=26$, $d=-4$이므로 공차가 음수가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=-46$, $d=14$이므로

$a_6=-46+5\cdot14=24$ 답 ①

유형 10 등차수열의 합의 최대 · 최소 개념 03

등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

(1) (첫째항)>0, (공차)<0일 때, 제$(n+1)$항에서 처음으로 음수가 나오면

⇨ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$ ($a_1+\cdots+a_n$: 양수, a_{n+1}: 음수, S_n이 최대)

(2) (첫째항)<0, (공차)>0일 때, 제$(n+1)$항에서 처음으로 양수가 나오면

⇨ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$ ($a_1+\cdots+a_n$: 음수, a_{n+1}: 양수, S_n이 최소)

1158

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=18$에서 $a+6d=18$ …… ㉠

$a_{10}=6$에서 $a+9d=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=42$, $d=-4$

$\therefore a_n=42+(n-1)\cdot(-4)=-4n+46$

$-4n+46<0$에서 $4n>46$ $\therefore n>\dfrac{23}{2}=11.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$S_{11}=\dfrac{11\{2\cdot42+10\cdot(-4)\}}{2}=242$ 답 242

다른 풀이 $S_n=\dfrac{n\{2\cdot42+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+44n=-2(n-11)^2+242$

따라서 구하는 최댓값은 $n=11$일 때, 242이다.

1159

첫째항이 -35, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=-35+(n-1)\cdot4=4n-39$

$4n-39>0$에서 $4n>39$ $\therefore n>\dfrac{39}{4}=9.75$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 양수이므로 S_n이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값은 9이다. 답 ③

1160

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_4=\dfrac{4(2\cdot10+3d)}{2}=6d+40$

$S_7=\dfrac{7(2\cdot10+6d)}{2}=21d+70$

$S_4=S_7$에서 $6d+40=21d+70$

$-15d=30$ $\therefore d=-2$

$\therefore a_n=10+(n-1)\cdot(-2)=-2n+12$

$-2n+12<0$에서 $2n>12$ $\therefore n>6$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 음수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$S_6=\dfrac{6\{2\cdot10+5\cdot(-2)\}}{2}=30$ 답 ⑤

참고 $a_6=0$이므로 $S_5=S_6=30$

1161

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=-23+(n-1)d$

이때 S_n이 최솟값을 가지므로 $d>0$이고, S_8의 값이 최소이므로

$a_8<0$, $a_9>0$이어야 한다.

$a_8=-23+7d<0$에서 $d<\dfrac{23}{7}$

$a_9=-23+8d>0$에서 $d>\dfrac{23}{8}$

$\therefore \dfrac{23}{8}<d<\dfrac{23}{7}$

이때 d는 정수이므로 $d=3$

$\therefore S_8=\dfrac{8\{2\cdot(-23)+7\cdot3\}}{2}=-100$ 답 ①

유형 11 나머지가 같은 자연수의 합 개념 03

(1) 자연수 d의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

⇨ $d, 2d, 3d, \cdots$

⇨ 첫째항과 공차가 d인 등차수열

(2) 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 a $(0\le a<d)$인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

⇨ $a, a+d, a+2d, \cdots$

⇨ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열

1162

100 이하의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는

2, 9, 16, …, 100

이 수열은 첫째항이 2이고 공차가 7인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2+(n-1)\cdot7=7n-5$

$7n-5=100$ $\therefore n=15$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 제15항이 100인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$\dfrac{15(2+100)}{2}=765$ 답 765

1163

100 이상 300 이하의 자연수 중에서 8의 배수는

104, 112, 120, ⋯, 296

이 수열은 첫째항이 104, 공차가 8인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=104+(n-1)\cdot 8=8n+96$

$8n+96=296$ $\therefore n=25$

따라서 구하는 합은 첫째항이 104, 제25항이 296인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합이므로

$\frac{25(104+296)}{2}=5000$ 답 ③

1164

100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수는

102, 105, 108, ⋯, 198

$102+(n-1)\cdot 3=198$ $\therefore n=33$

이 수열은 첫째항이 102, 제33항이 198인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{33(102+198)}{2}=4950$

100 이상 200 이하의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수는

100, 104, 108, ⋯, 200

$100+(n-1)\cdot 4=200$ $\therefore n=26$

이 수열은 첫째항이 100, 제26항이 200인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{26(100+200)}{2}=3900$

한편, 3과 4의 최소공배수가 12이므로 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 12로 나누어떨어지는 수는

108, 120, 132, ⋯, 192

$108+(n-1)\cdot 12=192$ $\therefore n=8$

이 수열은 첫째항이 108, 제8항이 192인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{8(108+192)}{2}=1200$

따라서 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 4로 나누어떨어지는 수의 총합은

$4950+3900-1200=7650$ 답 ④

1165

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, ⋯, 98

100 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, ⋯, 96

따라서 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2이고, 5로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

11, 26, 41, 56, 71, 86

이 수열은 첫째항이 11, 제6항이 86인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{6(11+86)}{2}=291$ 답 291

참고 3과 5의 최소공배수가 15이므로 구하는 수열은 공차가 15인 등차수열이다.

발전 유형 12 등차수열의 활용 개념 02, 03

(1) 등차수열

⇨ 공차와 일반항을 구하거나 등차중항을 이용한다.

(2) 등차수열의 합

⇨ 차가 일정한 수들은 차례로 등차수열을 이루므로 주어진 조건을 식으로 표현하고 등차수열의 합의 공식을 이용한다.

1166

n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\cdot(n-2)$ ····· ㉠

첫째항이 75°, 공차가 10°인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\frac{n\{2\cdot 75^\circ+(n-1)\cdot 10^\circ\}}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $180^\circ\cdot(n-2)=\frac{n\{2\cdot 75^\circ+(n-1)\cdot 10^\circ\}}{2}$

$n^2-22n+72=0$, $(n-4)(n-18)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=18$

이때 $n=18$이면 가장 큰 내각의 크기가 $75^\circ+17\cdot 10^\circ=245^\circ$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 n의 값은 4이다. 답 ①

1167

직선 $x=n$ $(n=1, 2, \cdots, 10)$이 두 곡선 $y=x^2+10$, $y=x^2-4x+10$과 각각 만나는 두 점을 이은 선분의 길이는

$(n^2+10)-(n^2-4n+10)=4n$

즉, 직선 $x=1$, $x=2$, ⋯, $x=10$이 두 곡선과 각각 만나는 두 점을 이은 10개의 선분의 길이는 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

이때 첫째항이 4, 제10항이 40인 등차수열의 합은

$\frac{10(4+40)}{2}=220$

따라서 구하는 선분의 길이의 합은 220이다. 답 ②

1168

양수 a, b, c, d, e에 대하여 점 A, B, C, D, E의 좌표를 각각

$A(-a, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, 0)$, $D(0, -d)$, $E(-e, 0)$

이라 하자.

네 삼각형 AOB, BOC, COD, DOE는 각각 서로 닮음이므로

$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$에서

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}$ ····· ㉠

한편, 세 선분 OA, OC, EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\overline{EA}}{2}$에서 $\overline{OE}=2\overline{OC}$ $\therefore e=2c$

$e=2c$를 ㉠의 $\frac{d}{c}=\frac{e}{d}$에 대입하면

$\frac{d}{c}=\frac{2c}{d}$에서 $\frac{d^2}{c^2}=2$ $\therefore \frac{d}{c}=\sqrt{2}$ $(\because c>0, d>0)$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

유형 13 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계 개념 03, 04

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어진 경우
(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1$
(ii) $n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

1169

$S_n=-2n^2+3n$이므로
$a_1=S_1=-2\cdot 1^2+3\cdot 1=1$
$a_{10}=S_{10}-S_9=(-2\cdot 10^2+3\cdot 10)-(-2\cdot 9^2+3\cdot 9)=-35$
$\therefore a_1+a_{10}=1+(-35)=-34$ 답 ③

다른 풀이 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-2\cdot 1^2+3\cdot 1=1$
(ii) $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(-2n^2+3n)-\{-2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=-4n+5$ …… ㉠
이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=-4n+5$
$\therefore a_1+a_{10}=1+(-4\cdot 10+5)=-34$

1170

$S_n=n^2+n$이라 하면
$a_5=S_5-S_4=(5^2+5)-(4^2+4)=10$
$T_n=2n^2-kn$이라 하면
$b_5=T_5-T_4=(2\cdot 5^2-k\cdot 5)-(2\cdot 4^2-k\cdot 4)=18-k$
이때 $a_5=b_5$이므로 $10=18-k$ $\therefore k=8$ 답 8

1171

$S_n=n^2+3n$에서
(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+3\cdot 1=4$
(ii) $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=2n+2$ …… ㉠
이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n+2$ … ❶
$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$은 첫째항이 $a_2=6$, 제n항이 $a_{2n}=4n+2$인 등차수열의 합이므로
$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\dfrac{n\{6+(4n+2)\}}{2}$
$=2n^2+4n=336$ … ❷
$n^2+2n-168=0$, $(n+14)(n-12)=0$
$\therefore n=12$ ($\because n$은 자연수) … ❸
답 12

채점 기준	비율
❶ 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ 등차수열의 합의 공식을 이용하여 n에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있다.	30 %

1172

ㄱ. $n=1$일 때, $a_1=S_1=-2\cdot 1^2+11\cdot 1-7=2$ (참)
ㄴ. $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(-2n^2+11n-7)-\{-2(n-1)^2+11(n-1)-7\}$
$=-4n+13$ …… ㉠
이때 ㄱ에서 $a_1=2$이고, $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로
$a_1=2$, $a_n=-4n+13$ $(n\geq 2)$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다. (거짓)
ㄷ. $-4n+13<0$에서 $4n>13$
$\therefore n>\dfrac{13}{4}=3.25$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 제4항부터 음수이므로 S_n의 최댓값은 S_3이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

STEP 개념 마스터 ❷

1173

$\dfrac{4}{2}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은
2, 4, $\boxed{8}$, $\boxed{16}$, 32, …
답 8, 16

1174

$\dfrac{-2}{2}=-1$에서 공비가 -1이므로 주어진 수열은
2, $\boxed{-2}$, 2, -2, $\boxed{2}$, …
답 -2, 2

1175

첫째항이 -5, 공비가 4이므로
$a_n=-5\cdot 4^{n-1}$
답 $a_n=-5\cdot 4^{n-1}$

1176

$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots$
$\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$이므로
$a_n=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
답 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

1177

첫째항이 729, 공비가 $\dfrac{-243}{729}=-\dfrac{1}{3}$이므로
$a_n=729\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
$\therefore a_8=729\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^7=3^6\cdot\left(-\dfrac{1}{3^7}\right)=-\dfrac{1}{3}$
답 $-\dfrac{1}{3}$

1178

첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$이므로

$a_n=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$

$\therefore a_8=(\sqrt{2})^8=16$ 답 16

1179

공비를 r라 하면 $a_4=5$에서

$625\cdot r^3=5,\ r^3=\frac{1}{125}$

이때 r는 실수이므로 $r=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

1180

공비를 r라 하면 $a_5=-64$에서

$\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot r^4=-64,\ r^4=256$

이때 r는 실수이므로 $r=\pm4$ 답 -4 또는 4

1181

x가 3과 75의 등비중항이므로

$x^2=3\cdot75=225$ $\therefore x=\pm15$ 답 -15 또는 15

$x=-15$이면 공비가 -5,
$x=15$이면 공비가 5인 등비수열이다.

1182

x가 1과 $\frac{1}{9}$의 등비중항이므로

$x^2=1\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$ $\therefore x=\pm\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}$

$x=-\frac{1}{3}$이면 공비가 $-\frac{1}{3}$,
$x=\frac{1}{3}$이면 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

1183

$\frac{2(3^5-1)}{3-1}=3^5-1=242$ 답 242

1184

주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은 $a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^9$을 제$n$항이라 하면

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^9,\ n-1=9$ $\therefore n=10$

$\therefore 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^9$

$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ 답 $\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

1185

주어진 수열은 첫째항이 0.2, 공비가 0.1인 등비수열이므로 일반항 a_n은 $a_n=0.2\cdot0.1^{n-1}$

0.00000002를 제n항이라 하면

$0.2\cdot0.1^{n-1}=0.00000002,\ 0.1^{n-1}=0.1^7,\ n-1=7$ $\therefore n=8$

$\therefore 0.2+0.02+0.002+\cdots+0.00000002$

$=\frac{0.2(1-0.1^8)}{1-0.1}=\frac{2}{9}(1-0.1^8)$ 답 $\frac{2}{9}(1-0.1^8)$

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 14 등비수열의 일반항 개념 05

(1) 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
⇨ $a_n=ar^{n-1}$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이다.
⇨ $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots$

1186

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_5=24$에서 $ar^4=24$ …… ㉠

$a_7=96$에서 $ar^6=96$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a\cdot2^4=24$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\cdot2^{n-1}$이므로

$a_{10}=\frac{3}{2}\cdot2^9=768$ 답 ⑤

1187

$a_n=\frac{3}{2^{2n-1}}$에서

$a_1=\frac{3}{2^1}=\frac{3}{2},\ a_2=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$

이때 공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비는 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$이다. 답 ②

1188

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_4=3$에서 $a\cdot(-3)^3=3$ $\therefore a=-\frac{1}{9}$

$\therefore a_n=-\frac{1}{9}\cdot(-3)^{n-1}$

이때 $a_k=243$이므로

$-\frac{1}{9}\cdot(-3)^{k-1}=243,\ (-3)^{k-1}=-3^7=(-3)^7$

$k-1=7$ $\therefore k=8$ 답 ④

1189

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공비가 $\sqrt{5}$이므로

$a_4=25$에서 $a\cdot(\sqrt{5})^3=25$ $\therefore a=\sqrt{5}$

따라서 $a_n=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^{n-1}=(\sqrt{5})^n$이므로

$a_1a_2a_3\cdots a_{15}=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^2\cdot(\sqrt{5})^3\cdot\cdots\cdot(\sqrt{5})^{15}$

$=(\sqrt{5})^{1+2+3+\cdots+15}=(\sqrt{5})^{\frac{15(1+15)}{2}}$

$=(\sqrt{5})^{120}=5^{60}$

$\therefore k=60$ 답 60

참고 $1+2+3+\cdots+15$는 첫째항이 1, 제15항이 15인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이다.

유형 15 항 사이의 관계가 주어진 등비수열 개념 05

(1) 주어진 항 사이의 관계를 이용하여 첫째항 a와 공비 r에 대한 식으로 표현한 다음 두 식을 연립하여 푼다.

(2) ① $a_n=ar^{n-1}$, $a_m=ar^{m-1}$에서 $\frac{a_n}{a_m}=r^{n-m}$

② $a_n+a_{n+2}+a_{n+4}=a_n(1+r^2+r^4)$

등을 이용하여 식을 간단하게 변형한다.

1190

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_4=24$에서 $ar^2+ar^3=24$ …… ㉠

$a_3 : a_4=2 : 1$에서 $\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{a}{4}+\frac{a}{8}=24$

$\frac{3}{8}a=24$ $\therefore a=64$

$a_n=64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $\frac{1}{128}$이 제n항이라 하면

$64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{128}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{13}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$

$n-1=13$ $\therefore n=14$

따라서 $\frac{1}{128}$은 제14항이다. 답 ④

1191

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_1^2+a_2^2=10$에서 $a^2+(ar)^2=10$

$\therefore a^2(1+r^2)=10$ …… ㉠

$a_3^2+a_4^2=160$에서 $(ar^2)^2+(ar^3)^2=160$

$\therefore a^2r^4(1+r^2)=160$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$5a^2=10$, $a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

$\therefore \frac{a_5^2}{a_2}=\frac{(ar^4)^2}{ar}=ar^7=\sqrt{2}\cdot 2^7=128\sqrt{2}$ 답 $128\sqrt{2}$

1192

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=3$에서 $a+ar+ar^2=3$

$\therefore a(1+r+r^2)=3$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=12$에서 $ar^3+ar^4+ar^5=21$

$\therefore ar^3(1+r+r^2)=21$ …… ㉡ … ❶

㉡÷㉠을 하면 $r^3=7$ … ❷

$\therefore \frac{a_7+a_9}{a_1+a_3}=\frac{ar^6+ar^8}{a+ar^2}=\frac{ar^6(1+r^2)}{a(1+r^2)}$

$=r^6=(r^3)^2=7^2=49$ … ❸

답 49

채점 기준	비율
❶ a, r에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ r^3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{a_7+a_9}{a_1+a_3}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1193

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>1)$라 하면

$a_2a_4a_6=125$에서 $ar\cdot ar^3\cdot ar^5=125$

$a^3r^9=125$, $(ar^3)^3=125$ $\therefore ar^3=5$

$\frac{a_5+a_9}{a_7}=\frac{10}{3}$에서 $\frac{ar^4+ar^8}{ar^6}=\frac{10}{3}$

$\frac{1+r^4}{r^2}=\frac{10}{3}$, $3r^4-10r^2+3=0$

$(3r^2-1)(r^2-3)=0$ $\therefore r^2=3$ $(\because r>1)$

$\therefore a_{12}=ar^{11}=ar^3\cdot r^8=ar^3\cdot(r^2)^4=5\cdot 3^4=405$ 답 405

유형 16 조건을 만족시키는 등비수열 개념 05

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 k보다 커지는 항
⇨ $ar^{n-1}>k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

1194

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ …… ㉠

$a_5=162$에서 $ar^4=162$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$ $(\because r$는 실수$)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $3a=6$ $\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$2\cdot 3^{n-1}>3000$, 즉 $3^{n-1}>1500$에서 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\geq 7$ $\therefore n\geq 8$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제8항이다. 답 ③

1195

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=50$에서 $ar+ar^3=50$ $\therefore ar(1+r^2)=50$ …… ㉠

$a_3+a_5=100$에서 $ar^2+ar^4=100$ $\therefore ar^2(1+r^2)=100$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $10a=50$ $\therefore a=5$

$\therefore a_n=5\cdot 2^{n-1}$

$5\cdot 2^{n-1}>5000$, 즉 $2^{n-1}>1000$에서 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq 10$ $\therefore n\geq 11$

따라서 처음으로 5000보다 커지는 항은 제11항이다. 답 ②

1196

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{500}$에서

$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|<\frac{1}{500}$, $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{500}$

$\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{500}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{500}$, $2^n>500$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로 $n\geq 9$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 9이다. 답 ②

1197

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log a_2=2$에서 $a_2=ar=10^2$ …… ㉠

$\log a_5=-1$에서 $a_5=ar^4=10^{-1}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=10^{-3}=\frac{1}{1000}$ $\therefore r=\frac{1}{10}$ ($\because r$은 실수)

$r=\frac{1}{10}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{10}a=100$ $\therefore a=1000$

$\therefore a_n=1000\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{10000}<a_n<\frac{1}{100}$에서 $\frac{1}{10000}<1000\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^7<\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{10}\right)^5$

$5<n-1<7$ $\therefore 6<n<8$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 7이다. 답 7

유형 17 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등비수열 개념 05

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등비수열을 만들면

⇨ 첫째항: a, 제$(n+2)$항: $b=ar^{n+1}$

1198

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제12항이 30이므로

$3r^{11}=30$ $\therefore r^{11}=10$

이때 a_1, a_{10}은 각각 주어진 수열의 제2항, 제11항이므로

$a_1=3r$, $a_{10}=3r^{10}$

$\therefore a_1a_{10}=3r\cdot3r^{10}=9r^{11}=9\cdot10=90$ 답 ⑤

1199

첫째항이 36, 공비가 $\frac{1}{3}$인 주어진 등비수열의 제$(n+2)$항이 $\frac{4}{729}$이므로

$36\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{4}{729}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{4}{3^6}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{3^8}=\left(\frac{1}{3}\right)^8$

$n+1=8$ $\therefore n=7$ 답 ②

1200

주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항이 12, 제5항이 972이므로

$12r^4=972$, $r^4=81$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

따라서 $a=12\cdot3=36$, $b=12\cdot3^2=108$, $c=12\cdot3^3=324$이므로

$c-a-b=324-108-36=180$ 답 180

1201

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 8, 제$(n+2)$항이 512이므로

$8\cdot r^{n+1}=512$

$\therefore r^{n+1}=64=8^2=4^3=2^6$

이를 만족시키는 두 자연수 r, n의 값을 순서쌍 (r, n)으로 나타내면

$(8, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 5)$

이때 $a_1=8r$이므로 r의 값이 최대일 때, a_1의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은 $a_1=8\cdot8=64$ 답 64

유형 18 등비중항 개념 05

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

⇨ $b^2=ac$

1202

$x+6$이 x와 $9x$의 등비중항이므로

$(x+6)^2=x\cdot9x$, $x^2+12x+36=9x^2$

$8x^2-12x-36=0$, $2x^2-3x-9=0$

$(2x+3)(x-3)=0$ $\therefore x=3$ ($\because x>0$) 답 ③

1203

$2\sin\theta$가 $\cos\theta$와 $\frac{1}{\cos\theta}$의 등비중항이므로

$(2\sin\theta)^2=\cos\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}$, $4\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $0^\circ<\theta<90^\circ$이므로 $0<\sin\theta<1$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=30^\circ$이므로 $\tan\theta=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1204

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=125$ …… ㉠ … ❶

$\beta-\alpha$가 α와 β의 등비중항이므로

$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$ … ❷

이때 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=\alpha\beta$ $\therefore (\beta+\alpha)^2=5\alpha\beta$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2=5\cdot125=625$

$\therefore k=25$ ($\because k>0$) … ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 등비중항을 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

1205

다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(-1)=1-2+a=a-1$, $f(1)=1+2+a=a+3$

$f(2)=4+4+a=a+8$

이때 $a+3$이 $a-1$과 $a+8$의 등비중항이므로

$(a+3)^2=(a-1)(a+8)$

$a^2+6a+9=a^2+7a-8$ $\therefore a=17$

따라서 $f(x)=x^2+2x+17$이므로 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)=4-4+17=17$ 답 ②

유형 19 등차중항과 등비중항 개념 02, 05

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로
(1) 등차수열을 이룬다. ⇨ $2b=a+c$
(2) 등비수열을 이룬다. ⇨ $b^2=ac$

1206

a가 8과 b의 등차중항이므로

$a=\frac{8+b}{2}$ $\therefore 2a=8+b$ ····· ㉠

b가 a와 36의 등비중항이므로

$b^2=36a$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b^2=18(8+b)$, $b^2-18b-144=0$

$(b+6)(b-24)=0$ $\therefore b=24$ ($\because b>0$)

$b=24$를 ㉠에 대입하면 $2a=32$ $\therefore a=16$

$\therefore a+b=16+24=40$ 답 40

1207

5가 a와 b의 등차중항이므로

$5=\frac{a+b}{2}$ $\therefore 10=a+b$

$3\sqrt{2}$가 a와 b의 등비중항이므로

$(3\sqrt{2})^2=ab$ $\therefore 18=ab$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\cdot 18=64$ 답 ④

1208

x가 a와 b의 등차중항이므로 $x=\frac{a+b}{2}$ $\therefore 2x=a+b$

y가 a와 b의 등비중항이므로 $y^2=ab$

$\frac{1}{z}$이 $\frac{1}{a}$과 $\frac{1}{b}$의 등차중항이므로

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$에서 $\frac{2}{z}=\frac{a+b}{ab}$

$\frac{2}{z}=\frac{2x}{y^2}$에서 $2y^2=2zx$ $\therefore y^2-zx=0$ 답 ③

참고 $y^2=zx$에서 y는 z와 x의 등비중항이므로 세 수 z, y, x (또는 x, y, z)가 이 순서대로 등비수열을 이루고 있음을 알 수 있다.

1209

a가 2와 b의 등차중항이므로

$a^2=2b$ ····· ㉠

c가 b와 50의 등차중항이므로

$c^2=50b$ ····· ㉡

b가 a와 c의 등차중항이므로

$b=\frac{a+c}{2}$ $\therefore 2b=a+c$ ····· ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면 $c^2=25a^2$

이때 a, c는 양수이므로 $c=5a$

이것을 ㉢에 대입하면 $2b=6a$에서 $b=3a$

따라서 등비수열을 이루는 세 수 2, a, b, 즉 2, a, $3a$에서 공비가 3이므로 $a=2\cdot 3=6$, $b=3\cdot 6=18$

또, $c=5a$이므로 $c=5\cdot 6=30$

$\therefore a-2b+3c=6-36+90=60$ 답 60

유형 20 등비수열을 이루는 수 개념 05

등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓고 식을 세운다.

1210

세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=26$ $\therefore a(1+r+r^2)=26$ ····· ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=216$, $(ar)^3=216$ $\therefore ar=6$ ····· ㉡

㉡에서 $a=\frac{6}{r}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{6}{r}(1+r+r^2)=26$, $3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$ $\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

$r=\frac{1}{3}$일 때 $a=18$, $r=3$일 때 $a=2$이므로 세 실수는 2, 6, 18이다.

따라서 세 수 중 가장 큰 수는 18이다. 답 18

1211

곡선 $y=-x^3+14x^2-56x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 방정식 $-x^3+14x^2-56x=k$, 즉 $x^3-14x^2+56x+k=0$의 실근이다.

삼차방정식 $x^3-14x^2+56x+k=0$의 서로 다른 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=14$ $\therefore a(1+r+r^2)=14$ ····· ㉠

$a^2r+a^2r^3+a^2r^2=56$ $\therefore a^2r(1+r+r^2)=56$ ····· ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=-k$, $a^3r^3=-k$ $\therefore (ar)^3=-k$ ····· ㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=4$

$ar=4$를 ㉢에 대입하면

$4^3=-k$ $\therefore k=-64$ 답 ③

발전 유형 21 등비수열의 활용 – 도형 개념 05

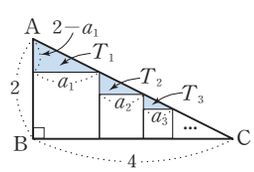
도형의 길이, 넓이, 부피 등이 일정한 비율로 변할 때
⇨ 처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악하고 등비수열의 성질을 이용한다.

1212

오른쪽 그림과 같이 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 서로 닮음이므로

$(2-a_1):a_1=2:4$에서

$8-4a_1=2a_1$ $\therefore a_1=\frac{4}{3}$



또, 삼각형 T_2와 삼각형 ABC는 서로 닮음이므로

$(a_1-a_2):a_2=2:4$에서

$4a_1-4a_2=2a_2$ $\therefore a_2=\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$

같은 방법으로 $(a_2-a_3):a_3=2:4$에서

$4a_2-4a_3=2a_3$ $\therefore a_3=\frac{2}{3}a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{3}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{4}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_7=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7$ 답 ④

1213

정사각형 T_1의 넓이가 4이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$

정사각형 T_2의 넓이가 2이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$ ($8\cdot\frac{1}{2}=4$)

정사각형 T_3의 넓이가 1이므로 한 변의 길이는 1 ($2\cdot\frac{1}{2}=1$)

⋮

따라서 정사각형 T_n의 한 변의 길이는 $2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이므로

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이 주어진 정사각형의 넓이가 8이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

정사각형 T_1의 한 변의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

정사각형 T_2의 한 변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

정사각형 T_3의 한 변의 길이는 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

⋮

따라서 정사각형 T_n의 한 변의 길이는 $2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이므로

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1214

사각형 A_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$ (두 대각선의 길이가 각각 2, 1인 마름모의 넓이)

사각형 A_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

사각형 A_3의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

사각형 A_4의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

⋮

따라서 사각형 A_n의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$, 즉 $2^{n-1}>100$에서 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-1\geq7$ $\therefore n\geq8$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 8

1215

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

첫 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}$

두 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{3}{4}$

세 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

따라서 n번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이므로

11번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ $\therefore n=10$ 답 10

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

$\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

유형 22 등비수열의 활용 – 일정한 비율로 변화하는 경우 개념 05

처음의 양을 A, 매시간 (또는 매년) 일정하게 변하는 비율을 r라 할 때, n시간 (또는 n년) 후의 양은

(1) 일정하게 증가하는 경우 $\Rightarrow A(1+r)^n$

(2) 일정하게 감소하는 경우 $\Rightarrow A(1-r)^n$

1216

처음 사용 가능한 시간은 20시간이고 한 번 충전할 때마다 사용 가능한 시간이 1 %씩 감소하므로 100번 충전한 후 사용 가능한 시간은

$20\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}=20\cdot0.99^{100}=20\cdot0.36=7.2$(시간)

따라서 사용 가능한 시간은 7시간 12분이다. 답 ②

1217

처음 개체의 수를 a, 매일 증가하는 비율을 r라 하면 n일 후의 개체의 수는 $a(1+r)^n$

20일 후 개체의 수가 44 % 증가하였으므로

$a(1+r)^{20}=a\left(1+\frac{44}{100}\right)$, $(1+r)^{20}=1.44$

또, 10일 후의 개체의 수는 $a(1+r)^{10}$이므로

$a(1+r)^{10}=a\sqrt{(1+r)^{20}}=a\sqrt{1.44}=1.2a$

즉, 10일 후의 개체의 수가 $1.2a$이므로 증가율은

$(1.2-1)\times100=20$ (%) 답 ②

1218

유해성 무기 물질의 양이 감소하는 비율이 20 %이므로 여과 장치를 n번 통과시킨 후의 유해성 무기 물질의 양은

$1000\left(1-\frac{20}{100}\right)^n=1000\cdot0.8^n$ (g)

따라서 6번 통과시킨 후 여과 장치가 걸러 낸 유해성 무기 물질의 양은

(처음 유해성 무기 물질의 양) – (6번 통과시킨 후 남아 있는 유해성 무기 물질의 양)

$=1000-1000\cdot0.8^6=1000-1000\cdot0.262$

$=1000-262=738$ (g) 답 738 g

유형 23 등비수열의 합 개념 06

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq1$일 때 $\Rightarrow S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때 $\Rightarrow S_n=na$

1219

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r ($r<0$)라 하면

$a_4=24$에서 $ar^3=24$ …… ㉠

$a_8=384$에서 $ar^7=384$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16$ $\therefore r=-2$ ($\because r<0$)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $-8a=24$ $\therefore a=-3$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{-3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=255$ 답 255

1220

주어진 식은 첫째항이 1, 공비가 $1+x$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{n-1}$

$=\dfrac{1\cdot\{(1+x)^n-1\}}{(1+x)-1}=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ 답 ④

1221

주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열이므로

$S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$

$S_k=4095$에서 $4^k-1=4095$

$4^k=4096=4^6$ $\therefore k=6$ 답 ③

1222

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_1+a_3=9$에서 $a+ar^2=9$ $\therefore a(1+r^2)=9$ ····· ㉠

$a_3+a_5=18$에서 $ar^2+ar^4=18$ $\therefore ar^2(1+r^2)=18$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$ $(\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $3a=9$ $\therefore a=3$

주어진 식은 첫째항이 $a_1^2=3^2=9$, 공비가 $r^2=(\sqrt{2})^2=2$인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=\dfrac{9(2^6-1)}{2-1}=567$ 답 567

1223

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 3이므로 (일반항은 $1\cdot3^{n-1}+1\cdot3^n=(1+3)\cdot3^{n-1}=4\cdot3^{n-1}$)

수열 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \cdots$는 첫째항이 $a_1+a_2=1+1\cdot3=4$, 공비가 $\dfrac{a_2+a_3}{a_1+a_2}=\dfrac{1\cdot3+1\cdot3^2}{1+1\cdot3}=3$인 등비수열이다.

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\dfrac{4(3^{11}-1)}{3-1}=2(3^{11}-1)$ 답 ③

Lecture

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r일 때

(1) 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \cdots$

⇨ 공비가 r인 등비수열

(2) 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$: $a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, \cdots$

⇨ 공비가 r^2인 등비수열

1224

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$이므로

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=3^{2n-1}$

$b_1=3, b_2=3^3, b_3=3^5, \cdots$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 3^2인 등비수열이므로

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=\dfrac{3\{(3^2)^{10}-1\}}{3^2-1}=\dfrac{3^{21}-3}{8}$

$\therefore p=21$ 답 21

1225

주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\left(2+\dfrac{1}{2}\right)+\left(4+\dfrac{1}{4}\right)+\left(6+\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(20+\dfrac{1}{2^{10}}\right)$

$=(2+4+6+\cdots+20)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}\right)$

$=\dfrac{10(2+20)}{2}+\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=110+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=111-\dfrac{1}{2^{10}}$ 답 ④

1226

주어진 수열의 첫째항부터 제10항의 합은

$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{10개}$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)$

$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-1\cdot10$

$=\dfrac{10(10^{10}-1)}{10-1}-10=\dfrac{100}{9}(10^9-1)$ 답 ②

유형 24 부분의 합이 주어진 등비수열의 합 개념 06

$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$에서 $S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}$

⇨ $S_{2n}\div S_n=r^n+1$ (단, $r\neq1$)

1227

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_5=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=10$ ····· ㉠

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}\cdot(r^5+1)=60$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $10(r^5+1)=60$

$r^5+1=6$ $\therefore r^5=5$

$\therefore S_{15}=\dfrac{a(r^{15}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}\cdot(r^{10}+r^5+1)$

$=10(5^2+5+1)=310$ 답 310

1228

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$S_4=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=45$ ····· ㉠

$S_8=\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}\cdot(r^4+1)=765$ ····· ㉡ … ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $45(r^4+1)=765$, $r^4+1=17$

$r^4=16$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$ … ❷

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$15a=45$ $\therefore a=3$ … ❸

따라서 $a_n=3\cdot2^{n-1}$이므로

$a_7=3\cdot2^6=192$ … ❹

답 192

채점 기준	비율
❶ S_4, S_8을 a, r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a_7의 값을 구할 수 있다.	20 %

1229

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$a_1+a_2+\cdots+a_6=S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=26$ ····· ㉠

이때 $a_7+a_8+\cdots+a_{12}=S_{12}-S_6$이므로

$S_{12}=S_6+702=26+702=728$

$\therefore S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}\cdot(r^6+1)=728$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $26(r^6+1)=728$, $r^6+1=28$

$r^6=27$, $r^2=3$ ($\because$ r는 실수) $\therefore r=\sqrt{3}$ ($\because$ $r>0$) 답 ②

다른 풀이 $a_1+a_2+\cdots+a_6=a+ar+\cdots+ar^5$

$=a(1+r+\cdots+r^5)=26$ ····· ㉠

$a_7+a_8+\cdots+a_{12}=ar^6+ar^7+\cdots+ar^{11}$

$=ar^6(1+r+\cdots+r^5)=702$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^6=27$, $r^2=3$ ($\because$ r는 실수) $\therefore r=\sqrt{3}$ ($\because$ $r>0$)

1230

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=5$ ····· ㉠

이때 $a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}=S_{3n}-S_{2n}$이므로

$S_{3n}-S_{2n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}-\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\{(r^{2n}+r^n+1)-(r^n+1)\}$

$=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\cdot r^{2n}=180$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5r^{2n}=180$, $r^{2n}=36$

$(r^n)^2=36$ $\therefore r^n=6$ ($\because$ $r>0$)

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$

$=S_{2n}-S_n=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}-\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\{(r^n+1)-1\}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\cdot r^n=5\cdot6=30$ 답 ②

유형 25 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계 개념 04, 06

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어진 경우

⇨ $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

1231

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-3=6$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=3^n(3-1)=2\cdot3^n$ ····· ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^n$

따라서 $a_k=486$에서 $2\cdot3^k=486$

$3^k=243$ $\therefore k=5$ 답 ③

1232

$\dfrac{a_{10}}{a_1}=\dfrac{S_{10}-S_9}{S_1}=\dfrac{(2^{10}-1)-(2^9-1)}{2^1-1}$

$=\dfrac{2^{10}-2^9}{2-1}=2^9(2-1)=2^9$ 답 ④

1233

$\log_2 S_n=n+1$에서 $S_n=2^{n+1}$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^2=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$ ····· ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=4$, $a_n=2^n$ $(n\geq2)$

$\therefore a_1+a_5+a_9=4+2^5+2^9=4+32+512=548$ 답 548

1234

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\cdot5^2+k=75+k$ ····· ㉠ ··· ❶

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot5^{n+1}+k)-(3\cdot5^n+k)$

$=3\cdot5^n(5-1)=12\cdot5^n$ ····· ㉡ ··· ❷

이때 이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로

$12\cdot5=75+k$ $\therefore k=-15$ ··· ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ a_1을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n\geq2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

발전 유형 26 등비수열의 합의 활용 개념 06

처음의 양을 a, 매시간 (또는 매년) 일정한 비율 r로 증가 또는 감소할 때, n시간 (또는 n년) 동안의 합은

⇨ $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

1235

괜파이프의 첫 번째 파이프의 길이를 a m, 파이프의 길이가 감소하는 일정한 비율을 r, 첫 번째 파이프부터 n번째 파이프까지의 길이의 합을 S_n m라 하면

$S_8=\dfrac{a(1-r^8)}{1-r}=3$ ····· ㉠

또, $ar^8+ar^9+\cdots+ar^{15}=S_{16}-S_8$이므로

$S_{16}=S_8+\dfrac{3}{2}=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore S_{16}=\dfrac{a(1-r^{16})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^8)}{1-r}\cdot(1+r^8)=\dfrac{9}{2}$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3(1+r^8)=\frac{9}{2}$

$1+r^8=\frac{3}{2}$ $\therefore r^8=\frac{1}{2}$

$\therefore S_{24}=\frac{a(1-r^{24})}{1-r}=\frac{a(1-r^8)}{1-r}\cdot(1+r^8+r^{16})$

$=3\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{21}{4}$ (m)

따라서 전체 파이프의 길이의 합은 $\frac{21}{4}$ m이다. 답 ②

1236

매년 이산화탄소 배출량이 감소하는 일정한 비율을 r라 하면 4년 후의 이산화탄소 배출량은 $768r^4$톤이므로

$768r^4=48$, $r^4=\frac{1}{16}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

따라서 올해부터 8년 동안의 이산화탄소 배출량의 총합은

$768+768\cdot\frac{1}{2}+768\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+768\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$=\frac{768\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1530$ (톤) 답 1530톤

1237

2017년의 방문객의 수를 a만 명, 방문객의 수가 증가하는 일정한 비율을 r라 하면 2017년부터 2020년까지 4년 동안의 방문객의 수는 20만 명이므로

$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=20$ ····· ㉠

2021년부터 2024년까지 4년 동안의 방문객의 수는 25만 명이므로

$\frac{ar^4(r^4-1)}{r-1}=25$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{5}{4}$

2025년의 방문객의 수는 ar^8만 명이므로

$ar^8=a(r^4)^2=a\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}a$

따라서 2025년의 방문객의 수는 2017년의 방문객의 수의 $\frac{25}{16}$배이다.

답 $\frac{25}{16}$배

1238

첫 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $4^2\cdot\frac{1}{4}=4$

두 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $4\cdot\frac{1}{4}\cdot3=4\cdot\frac{3}{4}$

세 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\left(4\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot3^2=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n번째 시행에서 색칠한 부분 넓이는 $4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

따라서 시행을 10회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합은

$\frac{4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=16\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$ 답 ④

1239

$\overline{A_1A_2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$이므로 $l_1=\sqrt{13}$

두 직각삼각형 A_1OA_2, A_2OA_3이 서로 닮음이므로

$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=3:2$에서

$\overline{A_2A_3}=\frac{2}{3}\overline{A_1A_2}=\sqrt{13}\cdot\frac{2}{3}$ $\therefore l_2=\sqrt{13}\cdot\frac{2}{3}$

마찬가지 방법으로 구하면

$\overline{A_3A_4}=\frac{2}{3}\overline{A_2A_3}=\sqrt{13}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\therefore l_3=\sqrt{13}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

⋮

$\overline{A_nA_{n+1}}=\sqrt{13}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore l_n=\sqrt{13}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

따라서 $l_1+l_2+l_3+\cdots+l_8$의 값은 등비수열 $\{l_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\frac{\sqrt{13}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{2}{3}}=3\sqrt{13}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^8\right\}$ 답 ⑤

발전 유형 27 원리합계 개념 06

(1) 연이율 r, 1년마다 복리로 매년 초에 a원씩 적립할 때, n년째 말의 원리합계 S_n은

⇨ $S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$

⇨ $S_n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$ (원)

(2) 연이율 r, 1년마다 복리로 매년 말에 a원씩 적립할 때, n년째 말의 원리합계 S_n은

⇨ $S_n=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}$

⇨ $S_n=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$ (원)

1240

매년 초에 50만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$50(1+0.03)+50(1+0.03)^2+\cdots+50(1+0.03)^{10}$

$=\frac{50\cdot1.03\cdot(1.03^{10}-1)}{1.03-1}=\frac{50\cdot1.03\cdot(1.3-1)}{0.03}$

$=515$ (만 원) 답 515만 원

1241

은정이의 12월 말의 적립금의 원리합계는

$10(1+0.004)+10(1+0.004)^2+\cdots+10(1+0.004)^{12}$

$=\frac{10\cdot1.004\cdot(1.004^{12}-1)}{1.004-1}=\frac{10\cdot1.004\cdot(1.05-1)}{0.004}$

$=125.5$ (만 원)

수민이의 12월 말의 적립금의 원리합계는

$12+12(1+0.005)+\cdots+12(1+0.005)^{11}$

$=\frac{12\cdot(1.005^{12}-1)}{1.005-1}=\frac{12\cdot(1.06-1)}{0.005}$

$=144$ (만 원)

따라서 두 사람의 적립금의 원리합계의 차는

$1440000-1255000=185000$ (원) 답 185000원

1242

매년 초에 a원씩 적립한다고 하면 12년째 말의 적립금의 원리합계는

$a(1+0.06)+a(1+0.06)^2+\cdots+a(1+0.06)^{12}$

$=\dfrac{a\cdot1.06\cdot(1.06^{12}-1)}{1.06-1}=\dfrac{a\cdot1.06\cdot(2.01-1)}{0.06}=1000000$

$\therefore a=\dfrac{1000000\cdot0.06}{1.06\cdot1.01}=56043.\times\times\times$

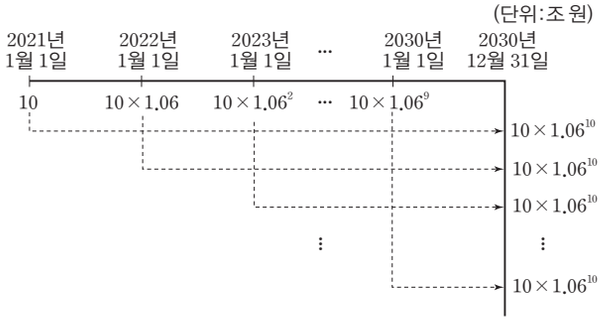
따라서 백원 미만은 버리므로 매년 초에 56000원씩 적립하면 된다.

답 56000원

1243

매년 1월 1일에 적립하는 금액의 원리합계를 나타내면 다음과 같다.

(단위:조 원)



따라서 2030년 12월 31일까지 적립되는 금액의 원리합계는

$10\times1.06^{10}\times10=10\times1.8\times10=180$ (조 원)

답 ③

STEP 3 내신 마스터

1244

유형 01 등차수열의 일반항

|전략| 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ …… ㉠

$a_{10}=32$에서 $a+9d=32$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$

$a_n=5+(n-1)\cdot3=3n+2$이므로 131이 제n항이라 하면

$3n+2=131$, $3n=129$ $\therefore n=43$

따라서 131은 제43항이다.

답 ③

1245

유형 02 항 사이의 관계가 주어진 등차수열 + 03 조건을 만족시키는 등차수열

|전략| 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하고, $a_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 찾는다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=56$에서 $a+6d=56$ …… ㉠

$a_5:a_{15}=3:8$에서 $8a_5=3a_{15}$

$8(a+4d)=3(a+14d)$ $\therefore a-2d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=7$

$\therefore a_n=14+(n-1)\cdot7=7n+7$

$7n+7>100$에서 $7n>93$ $\therefore n>\dfrac{93}{7}=13.\times\times\times$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제14항이다.

답 ③

1246

유형 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열

|전략| 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면 a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항임을 이용한다.

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}, 305, \cdots$의 공차를 d_1이라 하면 제102항이 305이므로

$305=2+101d_1$ $\therefore d_1=3$

등차수열 $3, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{50}, 309, \cdots$의 공차를 d_2라 하면 제52항이 309이므로

$309=3+51d_2$ $\therefore d_2=6$

$\therefore \dfrac{b_2-b_1}{a_{100}-a_{99}}=\dfrac{d_2}{d_1}=\dfrac{6}{3}=2$

답 ④

1247

유형 05 등차중항

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$임을 이용한다.

a가 $\log_2 3$과 $\log_2 27$의 등차중항이므로

$a=\dfrac{\log_2 3+\log_2 27}{2}=\dfrac{\log_2 81}{2}=\dfrac{2\log_2 9}{2}=\log_2 9$

또, $\log_2 27$이 a와 b, 즉 $\log_2 9$와 b의 등차중항이므로

$\log_2 27=\dfrac{\log_2 9+b}{2}$에서

$b=2\log_2 27-\log_2 9=6\log_2 3-2\log_2 3=4\log_2 3=\log_2 81$

$\therefore 2^b-2^a=2^{\log_2 81}-2^{\log_2 9}=81-9=72$

답 ④

1248

유형 06 등차수열을 이루는 수

|전략| 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 피타고라스 정리를 이용한다.

등차수열을 이루는 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a(a-4d)=0$ $\therefore a=4d$ ($\because a>0$)

조건 ㈏에서 $a+d=25$이므로 $a=4d$를 대입하면

$4d+d=25$, $5d=25$ $\therefore d=5$

따라서 $a=20$에서 직각삼각형의 세 변의 길이는 15, 20, 25이므로 직각삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot15\cdot20=150$

답 ③

1249

유형 07 등차수열의 합

|전략| 첫째항이 a, 제n항이 l, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -2, 공차가 6이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot6\}}{2}=n(3n-5)$

$\therefore \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=3n-5$

$b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$으로 놓으면 $b_n=3n-5$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=b_2+b_4+\cdots+b_{20}=\dfrac{10(b_2+b_{20})}{2}$

$=\dfrac{10(1+55)}{2}=280$ 답 ③

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -2, 공차가 6이므로

$a_n=-2+(n-1)\cdot 6=6n-8$

즉, $a_{2n}=6\cdot 2n-8=12n-8$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}=\dfrac{2n\{-2+(12n-8)\}}{2}=2n(6n-5)$

$\therefore \dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}}{2n}=6n-5$

따라서 주어진 식은 첫째항이 $6\cdot 1-5=1$이고 공차가 6인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

(주어진 식)$=\dfrac{10\{2\cdot 1+(10-1)\cdot 6\}}{2}=280$

1250

유형 10 등차수열의 합의 최대·최소

|전략| $S_8=316$, $S_{16}=440$임을 이용해 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 찾고, a_{2n-1}을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_8=\dfrac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=316$에서 $2a+7d=79$ …… ㉠

$S_{16}=\dfrac{16\{2a+(16-1)d\}}{2}=440$에서 $2a+15d=55$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=50$, $d=-3$

$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$이므로

$a_{2n-1}=-3(2n-1)+53=-6n+56$

$-6n+56<0$에서 $6n>56$ $\therefore n>\dfrac{28}{3}=9.\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 제10항부터 음수이므로 제9항까지의 합이 최대이다.

따라서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 n의 값은 9이다. 답 ②

1251

유형 13 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계

|전략| $a_1=S_1$이고 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용한다.

$S_n=an^2+bn-5$이므로

$a_4=S_4-S_3$

$=(16a+4b-5)-(9a+3b-5)$

$=7a+b$

$a_4=11$이므로 $7a+b=11$ …… ㉠

$a_7=S_7-S_6$

$=(49a+7b-5)-(36a+6b-5)$

$=13a+b$

$a_7=23$이므로 $13a+b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $S_n=2n^2-3n-5$이므로

$a_1=S_1=2\cdot 1^2-3\cdot 1-5=-6$ 답 ①

1252

유형 15 항 사이의 관계가 주어진 등비수열

|전략| 공비를 r로 놓고 주어진 식을 정리한다.

$a_3+a_5=\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_5}$에서 $a_3+a_5=\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\dfrac{1}{9}$이고 공비가 양수이므로

$a_3+a_5\neq 0$이다.

즉, $a_3+a_5=\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}$에서 $a_3a_5=1$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_3a_5=1$에서

$\dfrac{1}{9}r^2\cdot\dfrac{1}{9}r^4=1$, $r^6=81$

$(r^3)^2=81$ $\therefore r^3=9$ $(\because r>0)$

$\therefore a_{10}=\dfrac{1}{9}r^9=\dfrac{1}{9}(r^3)^3=\dfrac{1}{9}\cdot 9^3=9^2=81$ 답 ③

1253

유형 16 조건을 만족시키는 등비수열

|전략| 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하고 $a_n<k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=\dfrac{3}{16}$에서 $ar^4=\dfrac{3}{16}$ …… ㉠

$a_8=\dfrac{3}{128}$에서 $ar^7=\dfrac{3}{128}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\dfrac{1}{8}$ $\therefore r=\dfrac{1}{2}$ $(\because r$는 실수$)$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{1000}$에서 $\dfrac{1}{2^{n-1}}<\dfrac{1}{3000}$, $2^{n-1}>3000$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n-1\geq 12$ $\therefore n\geq 13$

따라서 처음으로 $\dfrac{1}{1000}$보다 작아지는 항은 제13항이다. 답 ③

1254

유형 18 등비중항

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

$4^3\times 3^9$이 a^n과 b^n의 등비중항이므로

$(4^3\times 3^9)^2=a^n\times b^n$에서

$2^{12}\times 3^{18}=(ab)^n$

그런데 a, b, n이 모두 자연수이므로 n은 12와 18의 공약수이어야 한다.

이때 n의 값이 최대일 때 ab의 값이 최소이므로 $n=6$일 때 ab는 최솟값을 갖는다. → n은 12와 18의 최대공약수

즉, $n=6$일 때 $(ab)^6=2^{12}\times 3^{18}=(2^2\times 3^3)^6$에서

$ab=2^2\times 3^3=4\times 27=108$

따라서 구하는 ab의 최솟값은 108이다. 답 ⑤

1255

유형 13 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계 + 23 등비수열의 합

|전략| $b_n=\log_3 a_n$으로 놓고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

$b_n=\log_3 a_n$이라 하면 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n=\dfrac{n^2-n}{2}$

(i) $n=1$일 때, $b_1=S_1=\dfrac{1^2-1}{2}=0$

(ii) $n\geq 2$일 때

$b_n=S_n-S_{n-1}$

$=\dfrac{n^2-n}{2}-\dfrac{(n-1)^2-(n-1)}{2}=n-1$ …… ㉠

이때 $b_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=n-1$

즉, $\log_3 a_n=n-1$이므로 $a_n=3^{n-1}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$\dfrac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=121$ 답 ①

1256

유형 21 등비수열의 활용 – 도형

|전략| 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.

처음 정사각형의 넓이는 $3\cdot 3=9$

첫 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $9\cdot\dfrac{8}{9}$

두 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $9\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^2$

세 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $9\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^3$

⋮

따라서 n번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $9\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$이므로

10회 반복했을 때, 남아 있는 종이의 넓이는

$9\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}=\dfrac{8^{10}}{9^9}$ 답 ④

1257

유형 25 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

|전략| $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$임을 이용하여 a_n을 구한 다음 a_1과 S_1의 값을 비교한다.

ㄱ. (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^1-1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}(3-1)=2\cdot 3^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$ (참)

ㄴ. 수열 $a_2, a_4, a_6, \cdots$은 등비수열이므로 공비는

$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{2\cdot 3^3}{2\cdot 3}=3^2=9$ (거짓)

ㄷ. $a_1+a_3+a_5+a_7=2+2\cdot 3^2+2\cdot 3^4+2\cdot 3^6$

$=\dfrac{2\cdot\{(3^2)^4-1\}}{3^2-1}=\dfrac{3^8-1}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

1258

유형 27 원리합계

|전략| 매년 초에 적립해야 하는 금액을 a만 원으로 놓고 등비수열의 합을 이용하여 원리합계를 구한다.

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a만 원이라 하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+\cdots+a(1+0.04)^{10}$

$=\dfrac{a\cdot 1.04\cdot(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\dfrac{a\cdot 1.04\cdot(1.5-1)}{0.04}=5200$

$13a=5200$ $\therefore a=400$

따라서 매년 초에 400만 원씩 적립해야 한다. 답 ①

1259

유형 10 등차수열의 합의 최대·최소

|전략| 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하자.

첫째항이 양수이므로 $S_{42}\cdot S_{44}<0$이려면 $d<0$이어야 하고

$S_{42}>0$, $S_{44}<0$이다.

$S_{42}=\dfrac{42(2\cdot 209+41d)}{2}>0$에서 $41d>-418$

$\therefore d>-10.\times\times\times$

$S_{44}=\dfrac{44(2\cdot 209+43d)}{2}<0$에서 $43d<-418$

$\therefore d<-9.\times\times\times$

즉, $-10.\times\times\times<d<-9.\times\times\times$에서 d는 정수이므로

$d=-10$ … ❶

$\therefore a_n=209+(n-1)\cdot(-10)=-10n+219$ … ❷

$-10n+219<0$에서 $10n>219$ $\therefore n>21.9$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제22항부터 음수이므로 S_n이 최대가 되도록 하는 자연수 n의 값은 21이다. … ❸

답 21

채점 기준	배점
❶ 공차 d의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	1점
❸ S_n이 최대가 되는 n의 값을 구할 수 있다.	3점

1260

유형 19 등차중항과 등비중항

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

a가 4와 b의 등차중항이므로

$a=\dfrac{4+b}{2}$ $\therefore b=2a-4$ …… ㉠

b가 a와 4의 등비중항이므로 $b^2=4a$ …… ㉡ … ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2a-4)^2=4a$, $a^2-5a+4=0$

$(a-1)(a-4)=0$ $\therefore a=1\ (\because a\neq 4)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$ … ❷

$\therefore ab=1\cdot(-2)=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	배점
❶ 등차중항과 등비중항을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

1261

유형 23 등비수열의 합

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$임을 이용한다.

$f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$이라 하면 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \cdots ❶$$

$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=2-\frac{1}{1024}=\frac{2047}{1024} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{2047}{1024}$

채점 기준	배점
❶ 나머지정리를 이용하여 나머지를 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ 등비수열의 합을 이용하여 나머지를 구할 수 있다.	3점

1262

유형 09 부분의 합이 주어진 등차수열의 합

|전략| 등차수열의 공차가 d일 때, 홀수 번째 항으로 이루어진 수열은 공차가 $2d$인 등차수열임을 이용한다.

(1) 주어진 등차수열의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{47}$은 첫째항이 a, 공차가 $2d$인 등차수열이고 a_{47}은 이 수열의 제24항이므로

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{47}=\frac{24\{2a+(24-1)\cdot 2d\}}{2}=504$$

$\therefore a+23d=21$

(2) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{47}=\frac{47\{2a+(47-1)d\}}{2}=47(a+23d)$

$=47\cdot 21=987$

답 (1) $a+23d=21$ (2) 987

채점 기준	배점
(1) a, d 사이의 관계식을 구할 수 있다.	6점
(2) 첫째항부터 제47항까지의 합을 구할 수 있다.	4점

1263

유형 24 부분의 합이 주어진 등비수열의 합

|전략| 제m항부터 제n항까지의 합은 S_n-S_{m-1}임을 이용한다.

(1) 주어진 수열의 제m항부터 제n항까지의 합이 720이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n-S_{m-1}=720$

$$\frac{2(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(3^{m-1}-1)}{3-1}=720$$

$3^n-3^{m-1}=720$, $3^{m-1}(3^{n-m+1}-1)=720$

$\therefore p=m-1, q=n-m+1$

(2) $3^{m-1}(3^{n-m+1}-1)=720=3^2\cdot 80$에서

m은 $m>2$인 자연수이므로 $3^{m-1}=3^2$

$m-1=2 \quad \therefore m=3$

(3) n은 자연수이므로 $3^{n-m+1}-1=80$에서

$3^{n-m+1}=81=3^4$

따라서 $n-m+1=4$이고, $m=3$이므로 $n=6$

답 (1) $p=m-1, q=n-m+1$ (2) 3 (3) 6

채점 기준	배점
(1) p, q를 m, n에 대한 식으로 각각 나타낼 수 있다.	6점
(2) m의 값을 구할 수 있다.	3점
(3) n의 값을 구할 수 있다.	3점

창의·융합 실력 마스터

1264

|전략| 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 이용한다.

조건 (가)에서 a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등차중항이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d\geq 0)$라 하면 조건 (나)에서

$(a+2d)(a+21d)=(a+6d)(a+7d)+10$

$a^2+23ad+42d^2=a^2+13ad+42d^2+10$

$10ad=10 \quad \therefore ad=1$ ← $a>0$이므로 $d\neq 0$

이때 조건 (가)에서 $a_4+a_6=2a_5=2(a+4d)=2a+8d$이고

$2a>0, 8d>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+8d\geq 2\sqrt{2a\cdot 8d}=2\sqrt{16ad}=2\cdot 4=8$

(단, 등호는 $a=4d$일 때 성립)

따라서 a_4+a_6의 최솟값은 8이다. 답 8

1265

|전략| 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1>0$이고, $S_{20}=S_{40}$이려면 $d<0$이어야 한다. 또, $a_k>0, a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k이다.

ㄱ. $S_{20}=S_{40}$이므로

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{40}=S_{40}-S_{20}=0$ (참)

ㄴ. $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{40}=10(a_{21}+a_{40})$

$=\cdots$

$=10(a_{25}+a_{36})$

$=\cdots$

$=10(a_{30}+a_{31})=0$

즉, $a_{25}+a_{36}=0$에서 $a_{25}=-a_{36}$이므로 $|a_{25}|=|a_{36}|$ (참)

ㄷ. $a_1>0$이고 ㄴ에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 음수이다. ← 음수가 아니면 $a_{25}+a_{36}>0$

이때 $a_{30}+a_{31}=0$이므로

$a_1>a_2>\cdots>a_{30}>0>a_{31}>a_{32}>\cdots$

가 성립한다.

즉, $n=30$일 때, S_n은 최댓값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

다른 풀이 ㄴ. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d라 하면

$S_{20}=S_{40}$이므로

$\frac{20(2a+19d)}{2}=\frac{40(2a+39d)}{2}$, $2a+19d=4a+78d$

$\therefore d=-\frac{2}{59}a$

즉, $a_{25}=a+24d=a-\frac{48}{59}a=\frac{11}{59}a$,

$a_{36}=a+35d=a-\frac{70}{59}a=-\frac{11}{59}a$이므로 $|a_{25}|=|a_{36}|$ (참)

ㄷ. $a_n=a+(n-1)d=a+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{59}a\right)=\frac{a}{59}(-2n+61)$

$\frac{a}{59}(-2n+61)<0$에서 $a>0$이므로

$-2n+61<0$, $2n>61$ $\therefore n>30.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제31항부터 음수이므로 S_n이 최대가 되도록 하는 n의 값은 30이다. (거짓)

1266

|전략| 등차수열의 합과 이차함수의 성질을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면 두 조건 (가), (나)에서

$T_{16}<T_{17}$, $T_{17}>T_{18}$이므로 $a_{17}>0$, $a_{18}<0$ …… ㉠

㉠에서 $a_{17}=50+16d>0$이므로 $d>-3.125$

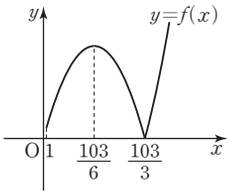
$a_{18}=50+17d<0$이므로 $d<-2.\times\times\times$

즉, $-3.125<d<-2.\times\times\times$에서 $d=-3$ ($\because$ d는 정수)

$\therefore T_n=\left|\frac{n\{2\cdot50+(n-1)\cdot(-3)\}}{2}\right|=\frac{|3n^2-103n|}{2}$

이때 $f(x)=\frac{|3x^2-103x|}{2}$ $(x\geq1)$

라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$17<\frac{103}{6}<18$, $34<\frac{103}{3}<35$이고

n은 자연수이므로 T_{17}, T_{18}과 T_{34}, T_{35}의 값을 각각 구해보면

$T_{17}=\frac{|3\cdot17^2-103\cdot17|}{2}=442$, $T_{18}=\frac{|3\cdot18^2-103\cdot18|}{2}=441$ …… ㉡

$T_{34}=\frac{|3\cdot34^2-103\cdot34|}{2}=17$, $T_{35}=\frac{|3\cdot35^2-103\cdot35|}{2}=35$ …… ㉢

함수 $y=f(x)$의 그래프와 ㉡, ㉢에 의하여 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n은 17, 18, 19, …, 33이므로 최댓값은 33이고 최솟값은 17이다.

따라서 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 차는 $33-17=16$ 답 16

1267

|전략| 주어진 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 a, b, c, d 사이의 관계식을 찾는다.

$\log_{\frac{1}{2}}d=a$에서 $d=\left(\frac{1}{2}\right)^a$ …… ㉠

$2^c=d$ …… ㉡

$\log_{\frac{1}{2}}b=c$에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^c$ …… ㉢

㉠, ㉡에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=2^c$ $\therefore a=-c$ …… ㉣

㉠, ㉢에서 $bd=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+c}=1$ ($\because$ ㉣) …… ㉤

이때 $2c$가 b와 $5d$의 등비중항이므로 $4c^2=5bd$에서

$4c^2=5$ ($\because$ ㉤) $\therefore c=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ($\because$ $c>0$)

$\therefore a=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ($\because$ ㉣) 답 ②

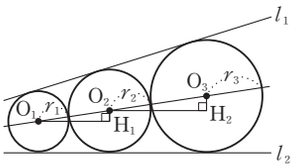
1268

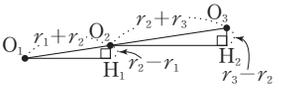
|전략| 연속으로 접하는 세 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3으로 놓고, 직각삼각형의 닮음비를 이용한다.

다음 그림과 같이 임의의 연속으로 접하는 세 원의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하고 이 원들의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3 $(r_1<r_2<r_3)$이라 하자.

이때 점 O_2에서 점 O_1을 지나고 직선 l_2에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_1, 점 O_3에서 점 O_2를 지나고 직선 l_2에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\triangle O_1H_1O_2\backsim\triangle O_2H_2O_3$





$\overline{O_1O_2}:\overline{O_2O_3}=\overline{O_2H_1}:\overline{O_3H_2}$이므로

$(r_1+r_2):(r_2+r_3)=(r_2-r_1):(r_3-r_2)$

$(r_1+r_2)(r_3-r_2)=(r_2+r_3)(r_2-r_1)$

$\therefore r_2^2=r_1r_3$

즉, r_1, r_2, r_3 (또는 r_3, r_2, r_1)은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

따라서 주어진 5개의 원의 반지름의 길이는 등비수열을 이루므로 한가운데에 있는 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 r는 8과 18의 등비중항이다. → 5개의 원의 반지름의 길이를 작은 것부터 차례로 8, a, r, b, 18이라 하면 세 수 8, r, 18은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$r^2=8\cdot18$ $\therefore r=12$ ($\because$ $r>0$) 답 12

1269

|전략| 주어진 식을 일반항 a_n에 대한 식으로 정리한 다음 n에 1과 2를 차례로 대입한다.

$S_{n+3}-S_n=13\cdot3^{n-1}$에서

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\cdot3^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$n=1$일 때, $a_2+a_3+a_4=13$이므로

$ar+ar^2+ar^3=ar(1+r+r^2)=13$ …… ㉠

$n=2$일 때, $a_3+a_4+a_5=39$이므로

$ar^2+ar^3+ar^4=ar^2(1+r+r^2)=39$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$3a(1+3+9)=13$, $39a=13$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore a_4=ar^3=\frac{1}{3}\cdot3^3=9$ 답 9

9 수열의 합

본책 170~181쪽

STEP 1 개념 마스터

1270

$\sum_{k=1}^{5} 7k = 7\cdot1+7\cdot2+7\cdot3+7\cdot4+7\cdot5$

$=7+14+21+28+35$ 답 $7+14+21+28+35$

1271

$\sum_{n=1}^{8} 2^n = 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^8$

$=2+4+8+\cdots+256$ 답 $2+4+8+\cdots+256$

1272

$\sum_{i=1}^{n} (5i-2) = (5\cdot1-2)+(5\cdot2-2)+(5\cdot3-2)+\cdots+(5n-2)$

$=3+8+13+\cdots+(5n-2)$

답 $3+8+13+\cdots+(5n-2)$

1273

$\sum_{j=1}^{n} j(2j+1) = 1\cdot(2\cdot1+1)+2\cdot(2\cdot2+1)+3\cdot(2\cdot3+1)$

$+\cdots+n(2n+1)$

$=3+10+21+\cdots+n(2n+1)$

답 $3+10+21+\cdots+n(2n+1)$

1274

$1+4+9+16+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$ 답 $\sum_{k=1}^{n} k^2$

1275

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 답 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1276

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=2+(k-1)\cdot2=2k$

$2k=20$에서 $k=10$

$\therefore\ 2+4+6+\cdots+20=\sum_{k=1}^{10} 2k$ 답 $\sum_{k=1}^{10} 2k$

1277

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=3\cdot3^{k-1}=3^k$

$3^k=729=3^6$에서 $k=6$

$\therefore\ 3+9+27+\cdots+729=\sum_{k=1}^{6} 3^k$ 답 $\sum_{k=1}^{6} 3^k$

1278

$\sum_{k=1}^{10}(5a_k+2)=5\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}2$

$=5\cdot3+2\cdot10=35$ 답 35

1279

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\cdot3+2=8$ 답 8

1280

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=3-2+1\cdot10=11$ 답 11

1281

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k-2)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}2$

$=3\cdot3+2\cdot2-2\cdot10=-7$ 답 -7

1282

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{10}1$

$=20-1\cdot10=10$ 답 10

1283

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k{}^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\cdot20-4\cdot10+1\cdot10=50$ 답 50

1284

$\sum_{k=1}^{15}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{15}(k^2-3)=\sum_{k=1}^{15}\{(k^2+1)-(k^2-3)\}$

$=\sum_{k=1}^{15}4=4\cdot15=60$ 답 60

1285

$\sum_{k=1}^{20}(k-1)^2-\sum_{k=1}^{20}(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{20}\{(k-1)^2-(k^2-2k)\}$

$=\sum_{k=1}^{20}\{(k^2-2k+1)-(k^2-2k)\}$

$=\sum_{k=1}^{20}1=1\cdot20=20$ 답 20

1286

$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-1\cdot10$

$=110-10=100$ 답 100

1287

$\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2-4)=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}4$

$=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot10$

$=3025+385-40=3370$ 답 3370

1288

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^2+12k+9)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k^2+12\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}9$$
$$=4\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+12\cdot\frac{10\cdot11}{2}+9\cdot10$$
$$=1540+660+90=2290$$

답 2290

1289

(1) $a_k=k(k+1)$

(2) $k(k+1)=12\cdot13$에서 $k=12$이므로

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+12\cdot13$$
$$=\sum_{k=1}^{12}k(k+1)=\sum_{k=1}^{12}(k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=1}^{12}k$$
$$=\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+\frac{12\cdot13}{2}$$
$$=650+78=728$$

답 (1) $a_k=k(k+1)$ (2) 728

1290

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=2k$

$2k=30$에서 $k=15$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{15}2k=2\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=2\cdot\frac{15\cdot16}{2}=240$$

답 240

1291

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=(k+3)^2$

$(k+3)^2=15^2$에서 $k+3>0$이므로

$k+3=15$ $\therefore k=12$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{12}(k+3)^2=\sum_{k=1}^{12}(k^2+6k+9)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}k^2+6\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}9$$
$$=\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+6\cdot\frac{12\cdot13}{2}+9\cdot12$$
$$=650+468+108=1226$$

답 1226

다른 풀이 $4^2+5^2+6^2+\cdots+15^2=\sum_{k=4}^{15}k^2=\sum_{k=1}^{15}k^2-\sum_{k=1}^{3}k^2$

$$=\frac{15\cdot16\cdot31}{6}-\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$$
$$=1240-14=1226$$

1292

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

1293

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

답 $\frac{n}{2n+1}$

1294

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$
$$=2(\sqrt{n+1}-1)$$

답 $2(\sqrt{n+1}-1)$

1295

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

답 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

1296

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$

답 $\frac{36}{55}$

1297

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=2\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{14})+(\sqrt{17}-\sqrt{15})$$
$$=-1-\sqrt{2}+4+\sqrt{17}$$
$$=3-\sqrt{2}+\sqrt{17}$$

답 $3-\sqrt{2}+\sqrt{17}$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 합의 기호 Σ 개념 01

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k a_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k$

1298

$\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2$

이 식의 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3 \cdot 5^2 = 75$ 답 ①

1299

$\sum_{k=1}^{199} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{200} a_{k-1} = (a_2 + a_3 + \cdots + a_{200}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{199})$

$= a_{200} - a_1 = 55 - 5 = 50$ 답 50

1300

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} 2^k \neq \sum_{k=0}^{n} 2^k$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_j$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

1301

$\sum_{k=1}^{10} (2k)^2 + \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2$

$= (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 20^2) + (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 19^2)$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 19^2 + 20^2$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \sum_{k=0}^{19} (k+1)^2$ 답 ②

유형 02 Σ의 성질 개념 02

(1) $\sum_{k=1}^{n} (pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k$ (단, p, q는 상수)

(2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + c)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2c\sum_{k=1}^{n} a_k + c^2 n$ (단, c는 상수)

1302

$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 1) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 1 \cdot 10 = 30$

에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)(a_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 1 \cdot 10 = 50$

에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 60$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 + 4a_k + 1)$

$= 4\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 4\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1$

$= 4 \cdot 60 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 290$ 답 290

1303

$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)$

$= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

즉, $45 = 27 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 9$ 답 9

1304

$\sum_{k=1}^{5} (a_k + b_k) = -4$에서

$\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = -4$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{5} (a_k - b_k) = 16$에서

$\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k = 16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 6$, $\sum_{k=1}^{5} b_k = -10$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} (2a_k + b_k + 3) = 2\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k + \sum_{k=1}^{5} 3$

$= 2 \cdot 6 + (-10) + 3 \cdot 5 = 17$ 답 ⑤

1305

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 2n$ …… ㉠

㉠에 $n=30$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{30} a_k = 30^2 = 900$, $\sum_{k=1}^{30} b_k = 2 \cdot 30 = 60$ … ❶

㉠에 $n=20$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{20} a_k = 20^2 = 400$, $\sum_{k=1}^{20} b_k = 2 \cdot 20 = 40$ … ❷

$\therefore \sum_{k=21}^{30} (a_k - 4b_k + 2)$

$= \sum_{k=21}^{30} a_k - 4\sum_{k=21}^{30} b_k + \sum_{k=21}^{30} 2$

$= \left(\sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{20} a_k\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{30} b_k - \sum_{k=1}^{20} b_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{30} 2 - \sum_{k=1}^{20} 2\right)$

$= (900 - 400) - 4 \cdot (60 - 40) + (2 \cdot 30 - 2 \cdot 20)$

$= 440$ … ❸

답 440

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{30} a_k$, $\sum_{k=1}^{30} b_k$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sum_{k=1}^{20} a_k$, $\sum_{k=1}^{20} b_k$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=21}^{30} (a_k - 4b_k + 2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 03 Σ와 등차수열, 등비수열 개념 01, 02

(1) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열일 때

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

(2) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq 1)$인 등비수열일 때

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

1306

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=12$에서 $a+2d=12$ ····· ㉠

$a_7=28$에서 $a+6d=28$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=4$

$$\therefore \sum_{k=1}^{50} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k} = (a_3+a_5+\cdots+a_{101}) - (a_2+a_4+\cdots+a_{100})$$
$$= (a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{101}-a_{100})$$
$$= \underbrace{d+d+\cdots+d}_{50\text{개}} = 50d$$
$$= 50\cdot 4 = 200$$

답 ③

1307

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 35$에서 $\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2} = 35$

$\therefore a+2d=7$

$\therefore a_2+a_4=(a+d)+(a+3d)=2a+4d$

$=2(a+2d)=2\cdot 7=14$

답 ④

다른 풀이 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 35$에서 $a+2d=7$

즉, $a_3=a+2d=7$이고 a_3은 a_2와 a_4의 등차중항이므로

$a_2+a_4=2a_3=2\cdot 7=14$

1308

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ····· ㉠

$a_3+a_4=72$에서 $ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=72$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6r(1+r)=72$, $r^2+r-12=0$

$(r+4)(r-3)=0$ $\therefore r=3\ (\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $3a=6$ $\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}$ … ❶

이때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 242$이므로

$\frac{2(3^n-1)}{3-1}=242$ … ❷

$3^n=243=3^5$ $\therefore n=5$ … ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

1309

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{2^k+(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{200} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{200} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{200}\right\}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{200}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= 2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{200}\right\} - \frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{200}\right\}$$
$$= \frac{7}{4} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{200} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{200}$$

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=7+2+1=10$

답 10

유형 04 자연수의 거듭제곱의 합 개념 02, 03

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

1310

$$\sum_{k=1}^{9} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{8} (k-1)^2$$
$$= 10^2 + \sum_{k=1}^{8} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{8} (k-1)^2$$
$$= 10^2 + \sum_{k=1}^{8} \{(k+1)^2-(k-1)^2\}$$
$$= 100 + 4\sum_{k=1}^{8} k = 100 + 4\cdot\frac{8\cdot 9}{2} = 244$$

답 244

1311

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3$$
$$= 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} + 3(n-1)$$
$$= n^2+2n-3$$

즉, $n^2+2n-3=96$이므로 $n^2+2n-99=0$

$(n+11)(n-9)=0$ $\therefore n=9\ (\because n$은 자연수)

답 ②

1312

이차방정식 $x^2-(n+1)x-(n+2)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n+1$, $\alpha_n\beta_n=-(n+2)$

$$\therefore {\alpha_n}^2+{\beta_n}^2 = (\alpha_n+\beta_n)^2 - 2\alpha_n\beta_n$$
$$= (n+1)^2+2(n+2)$$
$$= n^2+4n+5$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} ({\alpha_k}^2+{\beta_k}^2) = \sum_{k=1}^{10} (k^2+4k+5)$$
$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 4\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 5$$
$$= \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + 4\cdot\frac{10\cdot 11}{2} + 5\cdot 10$$
$$= 385+220+50=655$$

답 655

1313

$$\sum_{k=1}^{11}(k-a)^2=\sum_{k=1}^{11}(k^2-2ak+a^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{11}k^2-2a\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}a^2$$
$$=\frac{11\cdot12\cdot23}{6}-2a\cdot\frac{11\cdot12}{2}+11a^2$$
$$=11a^2-132a+506=11(a-6)^2+110$$

따라서 $\sum_{k=1}^{11}(k-a)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 a의 값은 6이다.

답 ③

유형 05 ∑를 여러 개 포함한 식의 계산 개념 02, 03

∑를 여러 개 포함한 식의 계산에서는 괄호 안의 ∑부터 차례로 계산한다.
이때 문자에 주의하여 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별한다.

상수 취급! $\sum_{k=1}^{n}n$ 다른 문자 — 상수 취급! $\sum_{m=1}^{n}km$ 다른 문자 — 상수 취급! $\sum_{l=1}^{n}(m+l)$ 다른 문자

1314

$$\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(n\sum_{m=1}^{n}m\right)=\sum_{n=1}^{5}\left\{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{5}n^3+\sum_{n=1}^{5}n^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+\frac{5\cdot6\cdot11}{6}\right\}=140$$

답 ⑤

1315

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=120$$

즉, $n(n+1)(n+2)=720=8\cdot9\cdot10$이므로
$n=8$

답 ③

1316

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}12\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}12l\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{12\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$
$$=6\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$$
$$=6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=2n(n+1)(n+2)$$

답 ③

1317

이차방정식 $x^2-12x+35=0$의 두 근이 m, n이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$m+n=12$, $mn=35$

$$\therefore\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{n}(k+l)\right\}=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n}k+\sum_{l=1}^{n}l\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{kn+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=n\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$$
$$=\frac{mn}{2}(m+n+2)$$
$$=\frac{35}{2}(12+2)=245$$

답 245

유형 06 ∑를 이용한 여러 가지 수열의 합 개념 02, 03

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 k에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) ∑의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 수열의 합을 구한다.

1318

수열 $1\cdot2, 2\cdot3, 3\cdot4, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면
$a_k=k(k+1)=k^2+k$
주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로
$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k$$
$$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+\frac{20\cdot21}{2}$$
$$=2870+210=3080$$

답 ④

1319

수열 $1\cdot3^2, 3\cdot6^2, 5\cdot9^2, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면
$a_k=(2k-1)\cdot(3k)^2=18k^3-9k^2$
주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로
$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(18k^3-9k^2)=18\sum_{k=1}^{5}k^3-9\sum_{k=1}^{5}k^2$$
$$=18\cdot\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2-9\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}$$
$$=4050-495=3555$$

답 ①

유형 07 제k항이 n에 대한 식일 때의 수열의 합 개념 02, 03

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 k와 n에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n은 상수임에 유의하여 수열의 합을 구한다.

1320

수열 $1\cdot n, 2\cdot(n-1), 3\cdot(n-2), \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면
$a_k=k\{n-(k-1)\}=nk-k^2+k$
$$\therefore(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(nk-k^2+k)$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

1321

수열 $\left(\frac{1+n}{n}\right)^2, \left(\frac{2+n}{n}\right)^2, \left(\frac{3+n}{n}\right)^2, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=\left(\frac{k+n}{n}\right)^2=\left(\frac{k}{n}+1\right)^2=\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}+1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}+1\right)$

$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1$

$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1\cdot n$

$=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$ 답 $\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$

유형 08 같은 수가 반복되는 수열의 합 개념 01

같은 수가 반복되어 나타나는 수열의 합은 반복되는 항의 개수를 이용하여 구한다.

1322

$1^2=1$을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $a_1=1$

$2^2=4$를 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $a_2=1$

$3^2=9$를 3으로 나누었을 때의 나머지는 0이므로 $a_3=0$

$4^2=16$을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $a_4=1$

$5^2=25$를 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $a_5=1$

$6^2=36$을 3으로 나누었을 때의 나머지는 0이므로 $a_6=0$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, 0이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{50} a_k=(1+1+0)\cdot 16+(1+1)=34$ 답 34

1323

$3^1=3$을 5로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $a_1=3$

$3^2=9$를 5로 나누었을 때의 나머지는 4이므로 $a_2=4$

$3^3=27$을 5로 나누었을 때의 나머지는 2이므로 $a_3=2$

$3^4=81$을 5로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $a_4=1$

$3^5=243$을 5로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $a_5=3$

$3^6=729$를 5로 나누었을 때의 나머지는 4이므로 $a_6=4$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 3, 4, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=(3+4+2+1)\cdot 25=250$ 답 ④

1324

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{100}$ 중 1이 a개, 2가 b개 있다고 하면

$\sum_{i=1}^{100} x_i=1\cdot a+2\cdot b=95$

$\therefore a+2b=95$ ····· ㉠

$\sum_{i=1}^{100} x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=145$

$\therefore a+4b=145$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=45$, $b=25$

$\therefore \sum_{i=1}^{100} x_i^3=1^3\cdot a+2^3\cdot b=1\cdot 45+8\cdot 25=245$ 답 ②

1325

$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, ⋯이므로

수열 $\{a_n\}$은 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, ⋯이므로

수열 $\{b_n\}$은 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.

즉, 수열 $\{a_n-b_n\}$은 5, 5, −5, −5가 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{70}(a_k-b_k)=\{5+5+(-5)+(-5)\}\cdot 17+(5+5)=10$

답 10

유형 09 분수 꼴인 수열의 합 개념 04

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k를 부분분수로 변형한다.

(ii) k에 1, 2, 3, ⋯, n을 차례로 대입하여 합의 꼴로 나타내어 계산한다.

1326

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{4k^2+4k}=\frac{1}{4k(k+1)}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{5}{21}$ 답 $\frac{5}{21}$

1327

$a_n=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=6\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{60}{11}$ 답 ⑤

1328

이차방정식 $x^2+4x-(4n^2-1)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_n+\beta_n=-4$, $\alpha_n\beta_n=-(4n^2-1)$ ··· ❶

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(4n^2-1)}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$ ··· ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2k-1)(2k+1)}$

$=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$ ··· ❸

답 $\frac{40}{21}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1329

$$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(2n+1)$$
$$=(2n+1+3)(2n+1-1)$$
$$=(2n+4)\cdot 2n=4n(n+2)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{8}{(f\circ g)(k)}=\sum_{k=1}^{10}\frac{8}{4k(k+2)}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{175}{132}$$ 답 $\frac{175}{132}$

유형 10 근호가 포함된 수열의 합 개념 04

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k의 분모를 유리화한다.
(ii) k에 $1, 2, 3, \cdots, n$을 차례로 대입하여 합의 꼴로 나타내어 계산한다.

1330

수열 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$$
$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$
$$=\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제45항까지의 합이므로

$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{45}a_k=\sum_{k=1}^{45}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$$
$$=(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{48}-\sqrt{47})$$
$$=\sqrt{48}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$ 답 $3\sqrt{3}$

1331

$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{60}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{119})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{121}-1)=\frac{1}{2}(11-1)=5$$ 답 ④

1332

$f(n)=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$이므로

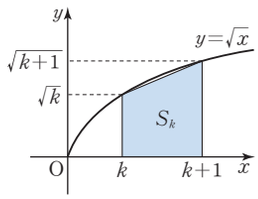
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$

즉, $\sqrt{n+2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{n+2}=3\sqrt{2}$, $n+2=18$ $\therefore n=16$ 답 ⑤

1333

오른쪽 그림과 같이 네 점 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \sqrt{k})$, $(k+1, \sqrt{k+1})$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 윗변의 길이가 $\sqrt{k}$, 아랫변의 길이가 $\sqrt{k+1}$, 높이가 1인 사다리꼴이므로 넓이 S_k는



$$S_k=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\cdot 1=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{99}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{99}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2\sum_{k=1}^{99}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=2\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\}$$
$$=2(\sqrt{100}-1)=2(10-1)=18$$ 답 18

유형 11 로그가 포함된 수열의 합 개념 01~03

로그의 성질을 이용하여 식을 변형하여 계산한다.
⇨ $a>0, a\neq 1, x>0, y>0$일 때
(1) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
(2) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
(3) $\log_a x^k=k\log_a x$ (단, k는 실수)

1334

$a_n=4\cdot 8^{n-1}=2^2\cdot 2^{3(n-1)}=2^{3n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\log_4 a_k=\sum_{k=1}^{12}\log_{2^2}2^{3k-1}=\sum_{k=1}^{12}\frac{3k-1}{2}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{12}k-\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{12\cdot 13}{2}-\frac{1}{2}\cdot 12=111$$ 답 ⑤

1335

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$
$$=\log_2\frac{\sqrt{2}}{1}+\log_2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\log_2\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}+\cdots+\log_2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$
$$=\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\log_2\sqrt{n+1}$$

즉, $\log_2\sqrt{n+1}=3$이므로

$\sqrt{n+1}=2^3=8$, $n+1=64$ $\therefore n=63$ 답 ④

다른 풀이 $\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\log_2\sqrt{k+1}-\log_2\sqrt{k})$

$=(\log_2\sqrt{2}-\log_2 1)+(\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{2})$

$+\cdots+(\log_2\sqrt{n+1}-\log_2\sqrt{n})$

$=\log_2\sqrt{n+1}-\log_2 1=\log_2\sqrt{n+1}$

즉, $\log_2\sqrt{n+1}=30$이므로 $\sqrt{n+1}=2^3=8$, $n+1=64$ $\therefore n=63$

1336

$\sum_{k=2}^{50}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$=\sum_{k=2}^{50}\log\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right)$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)$

$+\cdots+\log\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\right.$

$\left.\cdot\cdots\cdot\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)\right\}$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{50}\right)=\log\frac{51}{100}$

$=\log 51-2$ 답 ③

다른 풀이 $\sum_{k=2}^{50}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$=\sum_{k=2}^{50}\left(\log\frac{k-1}{k}+\log\frac{k+1}{k}\right)$

$=\sum_{k=2}^{50}\left(\log\frac{k-1}{k}-\log\frac{k}{k+1}\right)$

$=\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{2}{3}\right)+\left(\log\frac{2}{3}-\log\frac{3}{4}\right)$

$+\cdots+\left(\log\frac{49}{50}-\log\frac{50}{51}\right)$

$=\log\frac{1}{2}-\log\frac{50}{51}=\log\frac{51}{100}=\log 51-2$

1337

$\sum_{k=1}^{20}\log a_k=\sum_{k=1}^{10}(\log a_{2k-1}+\log a_{2k})=\sum_{k=1}^{10}\log a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}\log a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{10}\log 2^k+\sum_{k=1}^{10}\log 5^k=\sum_{k=1}^{10}k\log 2+\sum_{k=1}^{10}k\log 5$

$=\log 2\cdot\sum_{k=1}^{10}k+\log 5\cdot\sum_{k=1}^{10}k=(\log 2+\log 5)\sum_{k=1}^{10}k$

$=\log 10\cdot\sum_{k=1}^{10}k=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$ 답 55

다른 풀이 $a_{2n-1}a_{2n}=2^n\cdot 5^n=10^n$

$\therefore\sum_{k=1}^{20}\log a_k=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{20}$

$=(\log a_1+\log a_2)+(\log a_3+\log a_4)$

$+\cdots+(\log a_{19}+\log a_{20})$

$=\log a_1a_2+\log a_3a_4+\cdots+\log a_{19}a_{20}$

$=\log 10+\log 10^2+\cdots+\log 10^{10}$

$=1+2+\cdots+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

유형 12 $\sum$로 표현된 수열의 합과 일반항 사이의 관계 개념 02-04

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$가 주어진 경우

(i) $S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1$ (ii) $S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=a_n\ (n\geq 2)$

임을 이용하여 a_n을 구한다.

1338

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+2\cdot 1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ····· ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $a_{3n}=2\cdot 3n+1=6n+1$이므로

$\sum_{k=1}^{10}ka_{3k}=\sum_{k=1}^{10}k(6k+1)=6\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=6\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}=2365$ 답 ④

1339

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2(3^n-1)$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2(3^1-1)=4$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2(3^n-1)-2(3^{n-1}-1)$

$=4\cdot 3^{n-1}$ ····· ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot 3^{n-1}$

따라서 $a_{2n}=4\cdot 3^{2n-1}=\frac{4}{3}\cdot 9^n$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{4}{3}\cdot 9^k\right)=\frac{12(9^{10}-1)}{9-1}$

$=\frac{3(3^{20}-1)}{2}=\frac{3^{21}-3}{2}$ 답 ④

1340

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+3\cdot 1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ ····· ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+2$ ··· 1

따라서 $a_n a_{n+1}=(2n+2)(2n+4)=4(n+1)(n+2)$이므로 … ❷

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{20}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{8}\frac{20}{4(k+1)(k+2)}=5\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=5\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=2$$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$임을 이용하여 일반항 a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_n a_{n+1}$을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sum_{k=1}^{8}\frac{20}{a_k a_{k+1}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1341

수열 $\{na_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$이므로
(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1\cdot2\cdot3=6$
(ii) $n\geq2$일 때
$na_n=S_n-S_{n-1}$
$=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1)$
$\therefore a_n=3(n+1)$ …… ㉠
이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=3(n+1)$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}3(k+1)=3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+3\cdot10=195$$

답 195

발전 유형 13 (등차수열)×(등비수열) 꼴인 수열의 합 개념 01, 02

(i) 주어진 수열의 합 S에 등비수열의 공비 r를 곱한다. (단, $r\neq1$)
(ii) $S-rS$를 계산하여 S의 값을 구한다.

1342

$S=\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{2^{k-1}}$로 놓으면
$$S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^9}$$ …… ㉠
㉠의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면
$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}$$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}$$
$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{10}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}-\frac{10}{2^{10}}$$
$$=2-\frac{12}{2^{10}}=2-\frac{3}{2^8}$$
$\frac{12}{2^{10}}=\frac{3\cdot4}{2^{10}}=\frac{3\cdot2^2}{2^{10}}=\frac{3}{2^8}$
$\therefore S=4-\frac{3}{2^7}$
따라서 $a=4$, $b=7$이므로
$a+b=4+7=11$

답 11

1343

구하는 식의 값을 S로 놓으면
$S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+8\cdot2^7$ …… ㉠
㉠의 양변에 2를 곱하면
$2S=\quad 1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+7\cdot2^7+8\cdot2^8$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$-S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^7-8\cdot2^8$
$=\frac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}-8\cdot2^8$
$=-7\cdot2^8-1$
$\therefore S=7\cdot2^8+1=1793$
따라서 구하는 식의 값은 1793이다.

답 1793

발전 유형 14 항을 묶었을 때 규칙을 갖는 수열 (1) 개념 02, 03

(i) 주어진 수열을 규칙성을 갖는 묶음으로 나눈다.
(ii) 각 묶음의 항수를 파악한다.
(iii) 각 묶음의 첫째항 또는 끝항이 갖는 규칙성을 조사한다.

1344

주어진 수열을
$(1), (1, 2, 1), (1, 2, 3, 2, 1), (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1), \cdots$
과 같이 각 묶음의 첫째항과 끝항이 1이 되도록 묶으면 n번째 묶음은
$(1, 2, \cdots, n-1, n, n-1, \cdots, 2, 1)$이다.
n번째 묶음의 항수는 $2n-1$이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항수는
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1\cdot n=n^2$$
즉, $n=9$일 때, $9^2=81$이므로 주어진 수열의 제90항은 10번째 묶음의 9번째 항이다.
따라서 10번째 묶음은 $(1, 2, \cdots, 9, 10, 9, \cdots, 2, 1)$이므로 제90항은 9이다.

답 9

1345

주어진 수열을
$(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), \cdots$
과 같이 묶으면 n번째 묶음의 첫째항은 $2n-1$이고, n번째 묶음의 항수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항수는
$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$
한편, $19=2n-1$에서 $n=10$이므로 19는 10번째 묶음에서 나타난다.
따라서 첫 번째 묶음부터 9번째 묶음까지의 항수는 $\frac{9\cdot10}{2}=45$이므로 19가 처음으로 나타나는 항은 제46항이다.

답 제46항

1346

주어진 수열을

$(22), (202, 220), (2002, 2020, 2200), \cdots$

과 같이 자릿수가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음은 $(n+1)$자리 수이므로 20002000은 7번째 묶음의 4번째 항이다.

이때 n번째 묶음의 항수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 항수는 $\sum_{k=1}^{6} k=\frac{6\cdot 7}{2}=21$

따라서 $21+4=25$이므로 20002000은 제25항이다. 답 ③

1347

주어진 수열을

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음의 항수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항수는 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=15$일 때, $\frac{15\cdot 16}{2}=120$이므로 제125항은 16번째 묶음의 5번째 항이다.

이때 16번째 묶음은 $\left(\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \cdots, \frac{15}{17}, \frac{16}{17}\right)$이므로 제125항은 $\frac{5}{17}$이다. 답 ⑤

참고 n번째 묶음의 k번째 항은 $\frac{k}{n+1}$이고, 제125항은 16번째 묶음의 5번째 항이므로 $\frac{5}{16+1}=\frac{5}{17}$

1348

주어진 수열을

$\{(1, 1)\}, \{(2, 1), (1, 2)\}, \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\},$

$\{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}, \cdots$

와 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면 n번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이므로 $(14, 17)$은 30번째 묶음의 17번째 항이다.

이때 n번째 묶음의 항수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 29번째 묶음까지의 항수는 $\sum_{k=1}^{29} k=\frac{29\cdot 30}{2}=435$

따라서 $435+17=452$이므로 $(14, 17)$은 제452항이다.

답 제452항

발전 유형 15 항을 묶었을 때 규칙을 갖는 수열 (2) 개념 02, 03

(i) 첫 번째 줄부터 n번째 줄까지 나열된 수의 개수를 파악한다.
(ii) 각 줄에서 k번째의 수를 구한다.

1349

위에서 n번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2n-1$이므로 첫 번째 줄부터 10번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1\cdot 10=100$

따라서 위에서 11번째 줄의 왼쪽에서 7번째에 있는 수는

$100+7=107$ 답 107

1350

위에서 2번째 줄부터 나열된 수의 규칙을 살펴보면

2번째 줄: $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ — 공차가 1인 등차수열

3번째 줄: $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$ — 공차가 2인 등차수열

4번째 줄: $1, 4, 7, 10, 13, \cdots$ — 공차가 3인 등차수열

⋮

이므로 15번째 줄에 나열된 수는 공차가 14인 등차수열을 이룬다.

15번째 줄의 왼쪽에서 n번째에 나열된 수를 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\cdot 14=14n-13$

따라서 위에서 15번째 줄의 왼쪽에서 8번째에 있는 수는

$a_8=14\cdot 8-13=99$ 답 99

1351

위에서 n번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 n, 공차가 n, 항수가 n인 등차수열을 이루므로 위에서 n번째 줄에 나열된 모든 수의 합을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{n\{2n+(n-1)\cdot n\}}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$

따라서 위에서 첫 번째 줄부터 10번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} k^3+\sum_{k=1}^{10} k^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}\right\}$

$=1705$ 답 1705

STEP 3 내신 마스터

1352

유형 01 합의 기호 $\sum$

|전략| $\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$임을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{100} ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+99a_{99}+100a_{100}=200$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{99} ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+98a_{99}+99a_{100}=100$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}+a_{100}=100$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=100$ 답 ②

1353

유형 02 $\sum$의 성질

|전략| $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k$, $\sum_{k=1}^{7} b_k$의 값을 각각 구한다.

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+2b_k)=34$에서 $\sum_{k=1}^{7} a_k+2\sum_{k=1}^{7} b_k=34$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{7}(2a_k-b_k)=3$에서 $2\sum_{k=1}^{7} a_k-\sum_{k=1}^{7} b_k=3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\sum_{k=1}^{7}a_k=8$, $\sum_{k=1}^{7}b_k=13$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}(b_k-a_k)=\sum_{k=1}^{7}b_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=13-8=5$ 답 ①

1354

유형 03 $\sum$와 등차수열, 등비수열

|전략| 나머지정리를 이용하여 a_n을 구한다.

다항식 $f(x)=x^{n-1}(x-3)$을 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$a_n=f(5)=5^{n-1}\cdot(5-3)=2\cdot5^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\cdot5^{k-1}=\frac{2(5^n-1)}{5-1}=\frac{5^n-1}{2}$ 답 ③

1355

유형 03 $\sum$와 등차수열, 등비수열 + 04 자연수의 거듭제곱의 합

|전략| 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{6}a_k=12$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 2이므로 $\sum_{k=1}^{6}a_k=12$에서

$\frac{6(2a+5\cdot2)}{2}=12$, $2a+10=4$ $\therefore a=-3$

따라서 $a_n=-3+(n-1)\cdot2=2n-5$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}k(a_k-1)&=\sum_{k=1}^{6}k(2k-6)=\sum_{k=1}^{6}(2k^2-6k)\\&=2\sum_{k=1}^{6}k^2-6\sum_{k=1}^{6}k\\&=2\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}-6\cdot\frac{6\cdot7}{2}=56\end{aligned}$$ 답 ④

1356

유형 04 자연수의 거듭제곱의 합

|전략| 주어진 식을 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내 본다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(1+2+3+\cdots+10)+(2+3+4+\cdots+10)\\&\quad+(3+4+5+\cdots+10)+\cdots+10\\&=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots+10\cdot10\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=385\end{aligned}$$ 답 ③

1357

유형 05 $\sum$를 여러 개 포함한 식의 계산

|전략| 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 괄호 안의 $\sum$부터 계산한다.

$\sum_{n=1}^{20}\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\cdot(2k-1)\right\}=\sum_{n=1}^{20}\left\{(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}$

이때 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1\cdot n=n^2$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\sum_{n=1}^{20}\{(-1)^{n-1}\cdot n^2\}\\&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)\\&\quad+\cdots+(19-20)(19+20)\\&=-(1+2+3+4+\cdots+19+20)\\&=-\sum_{k=1}^{20}k=-\frac{20\cdot21}{2}=-210\end{aligned}$$ 답 ③

다른 풀이 (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2\\&=(1^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+20^2)\\&=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{10}(2k)^2\\&=\sum_{k=1}^{10}(-4k+1)\\&=-4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1\\&=-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+1\cdot10=-210\end{aligned}$$

1358

유형 07 제k항이 n에 대한 식일 때의 수열의 합

|전략| 주어진 수열의 제k항 a_k를 k와 n에 대한 식으로 나타내고, $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n은 상수임에 유의하여 수열의 합을 구한다.

수열 $1\cdot(2n-1), 2\cdot(2n-3), 3\cdot(2n-5), \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식})&=\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=1$이므로

$a+b+c=1+2+1=4$ 답 ②

1359

유형 09 분수 꼴인 수열의 합

|전략| 원의 중심과 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 $a_n{}^2$을 구한다.

점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 a_n $(a_n>0)$인 접선의 방정식은 → 점 $(-1, 0)$을 지나고 원 O_n과 제1사분면에서 접하는 직선의 기울기는 양수이다.

$y-0=a_n\{x-(-1)\}$ $\therefore y=a_n(x+1)$

원 O_n의 중심 $(n, 0)$과 직선 $y=a_n(x+1)$, 즉 $a_nx-y+a_n=0$ 사이의 거리는 원 O_n의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$\frac{|na_n+a_n|}{\sqrt{a_n{}^2+(-1)^2}}=1$

$(n+1)a_n=\sqrt{a_n{}^2+1}$ ($\because n+1>0, a_n>0$)

양변을 제곱하면

$(n+1)^2a_n{}^2=a_n{}^2+1$, $(n^2+2n)a_n{}^2=1$

$\therefore a_n{}^2=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}$

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{k=1}^{8}a_k{}^2&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}\end{aligned}$$ 답 ④

1360

유형 10 근호가 포함된 수열의 합

|전략| 주어진 등차수열의 일반항 a_n을 구하고, 이를 이용하여 수열 $\left\{\frac{3}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right\}$의 제$k$항 $\frac{3}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$의 분모를 유리화한다.

$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$이므로

$$\frac{3}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{3}{\sqrt{3k-2}+\sqrt{3k+1}}$$
$$=\frac{3(\sqrt{3k-2}-\sqrt{3k+1})}{(\sqrt{3k-2}+\sqrt{3k+1})(\sqrt{3k-2}-\sqrt{3k+1})}$$
$$=\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2}$$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{21}\frac{3}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\sum_{k=1}^{21}(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2})$$
$$=(\sqrt{4}-1)+(\sqrt{7}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{61})$$
$$=\sqrt{64}-1=8-1=7$$

답 ②

1361

유형 11 로그가 포함된 수열의 합
+ 12 Σ로 표현된 수열의 합과 일반항 사이의 관계

|전략| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 일반항을 찾고 로그의 성질을 이용한다.

$S_n=\log_3\frac{(n+2)(n+3)}{6}$이므로

(i) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=\log_3\frac{3\cdot 4}{6}=\log_3 2$$

(ii) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\log_3\frac{(n+2)(n+3)}{6}-\log_3\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$
$$=\log_3\frac{\frac{(n+2)(n+3)}{6}}{\frac{(n+1)(n+2)}{6}}$$
$$=\log_3\frac{n+3}{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\log_3 2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\log_3\frac{n+3}{n+1}$$

$$\therefore p=\sum_{k=1}^{12}a_{2k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\log_3\frac{(2k+1)+3}{(2k+1)+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\log_3\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{5}{4}+\cdots+\log_3\frac{14}{13}$$
$$=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{14}{13}\right)$$
$$=\log_3\frac{14}{2}=\log_3 7$$

$$\therefore 27^p=27^{\log_3 7}=7^{\log_3 27}=7^3=343$$

답 ⑤

참고 $a>0, a\neq 1, b>0, c>0, c\neq 1$일 때
$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

1362

유형 12 Σ로 표현된 수열의 합과 일반항 사이의 관계

|전략| $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

수열 $\left\{\frac{6n-5}{a_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6k-5}{a_k}=3n^2+4n$이므로

(i) $n=1$일 때

$$\frac{6\cdot 1-5}{a_1}=S_1=3\cdot 1^2+4\cdot 1,\ \frac{1}{a_1}=7 \qquad \therefore a_1=\frac{1}{7}$$

(ii) $n\geq 2$일 때

$$\frac{6n-5}{a_n}=S_n-S_{n-1}$$
$$=(3n^2+4n)-\{3(n-1)^2+4(n-1)\}=6n+1$$
$$\therefore a_n=\frac{6n-5}{6n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\frac{1}{7}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{6n-5}{6n+1}$$

$$\therefore a_1a_5a_9=\frac{1}{7}\cdot\frac{25}{31}\cdot\frac{49}{55}=\frac{35}{341}$$

답 ②

1363

유형 06 Σ를 이용한 여러 가지 수열의 합

|전략| 주어진 수열의 제k항 a_k를 구한다.

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=(2k-1)\cdot 2k=4k^2-2k$ … ❶

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k)$$
$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}\{4(2n+1)-6\}=\frac{n(n+1)}{3}(4n-1)$$ … ❷

따라서 $f(n)=4n-1$이므로 $f(20)=4\cdot 20-1=79$ … ❸

답 79

채점 기준	배점
❶ 주어진 수열의 제k항 a_k를 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 수열의 합 S_n을 구할 수 있다.	3점
❸ $f(20)$의 값을 구할 수 있다.	1점

1364

유형 10 근호가 포함된 수열의 합

|전략| 이차방정식을 풀어 α_n, β_n을 구한 다음 주어진 식에 대입하여 분모를 유리화한다.

$x^2-2(n+1)x+n(n+2)=0$에서 $(x-n)(x-n-2)=0$

$\therefore x=n$ 또는 $x=n+2$ … ❶

따라서 $\alpha_n=n$, $\beta_n=n+2$ 또는 $\alpha_n=n+2$, $\beta_n=n$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$ … ❷

$$\therefore \sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{\beta_k}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\}$$

$$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+7+5\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{2}(6+4\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$$ … ❸

답 $3+2\sqrt{2}$

채점 기준	배점
❶ 주어진 이차방정식의 근을 구할 수 있다.	2점
❷ $\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\beta_n}}$을 간단히 할 수 있다.	2점
❸ $\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{\beta_k}}$의 값을 구할 수 있다.	3점

1365

유형 09 분수 꼴인 수열의 합

| 전략 | 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구하고 부분분수로 변형한다.

(1) 주어진 수열의 일반항 a_n은

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

(2) 주어진 수열의 첫째항부터 제49항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{49}a_k=\sum_{k=1}^{49}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{50}\right)=\frac{49}{25}$$

답 (1) $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$ (2) $\frac{49}{25}$

채점 기준	배점
(1) 주어진 수열의 일반항 a_n을 구할 수 있다.	5점
(2) 주어진 수열의 첫째항부터 제49항까지의 합을 구할 수 있다.	5점

창의·융합 실력 마스터

1366

| 전략 | $n=2, 3, 4, \cdots$일 때, $f(n)$의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

$n=2$일 때, $\{3, 3^3\}$에서 $S=\{3^4\}$이므로

$f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3, 3^3, 3^5\}$에서 $S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$이므로

$f(3)=3$

$n=4$일 때, $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$에서 $S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$이므로

$f(4)=5$

$n=5$일 때, $\{3, 3^3, 3^5, 3^7, 3^9\}$에서 $S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}, 3^{14}, 3^{16}\}$이므로 $f(5)=7$

⋮

$$\therefore f(n)=1+(n-2)\cdot 2=2n-3\ (n\geq 2)$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{11}f(k)=\sum_{k=2}^{11}(2k-3)$$

$$=1+3+5+\cdots+19$$

$$=\frac{10(1+19)}{2}=100$$

답 100

다른 풀이 $\sum_{k=2}^{11}f(n)=\sum_{k=2}^{11}(2k-3)=\sum_{k=1}^{11}(2k-3)-(-1)$

$$=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}-3\cdot 11+1$$

$$=132-33+1=100$$

1367

| 전략 | 조건 (가), (나)를 이용하여 $a_n=0$을 만족시키는 n의 값을 먼저 구한다.

조건 (가)에서 $S_7=T_7$이므로

7 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq 0$ …… ㉠

조건 (나)에서 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+T_n=84$이므로

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$(S_{n+1}-S_n)+(T_{n+1}-T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0 \quad \therefore |a_{n+1}|=-a_{n+1}$

즉, 7 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a_7=0$

또, 조건 (가), (나)에서 $S_7=T_7$, $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=0$에서 $a+6d=0$ …… ㉢

$S_7=42$에서 $\frac{7(2a+6d)}{2}=42 \quad \therefore a+3d=6$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-2$

따라서 조건 (나)에서 $S_{15}+T_{15}=84$이고

$$S_{15}=\frac{15\{2\cdot 12+14\cdot(-2)\}}{2}=-30$$이므로

$T_{15}=84-S_{15}=84-(-30)=114$

답 114

1368

| 전략 | n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 a_n (n은 자연수)을 각각 구한다.

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 정사각형 A_n과 만나려면 두 점 $(4n^2, n^2)$, $(n^2, 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만나야 한다.

(정사각형 A_n의 대각선)

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(4n^2, n^2)$을 지날 때

$n^2=k\sqrt{4n^2} \quad \therefore k=\frac{n}{2}$ ($\because n$은 자연수)

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(n^2, 4n^2)$을 지날 때

$4n^2=k\sqrt{n^2} \quad \therefore k=4n$ ($\because n$은 자연수)

따라서 a_n은 부등식 $\frac{n}{2}\leq k\leq 4n$을 만족시키는 자연수 k의 개수이다.

(i) n이 홀수, 즉 $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\frac{n}{2}\leq k\leq 4n$에서 $\frac{2m-1}{2}\leq k\leq 4(2m-1)$

$m-\frac{1}{2}\leq k\leq 8m-4$ …… ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$a_{2m-1}=(8m-4)-m+1=7m-3$

(ii) n이 짝수, 즉 $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$\frac{n}{2}\le k\le 4n$에서 $\frac{2m}{2}\le k\le 4\cdot 2m$

$m\le k\le 8m$ ····· ㉡

부등식 ㉡을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$a_{2m}=8m-m+1=7m+1$

$\therefore \sum_{i=1}^{10} a_i=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$

$=\sum_{m=1}^{5}(a_{2m-1}+a_{2m})$

$=\sum_{m=1}^{5}\{(7m-3)+(7m+1)\}$

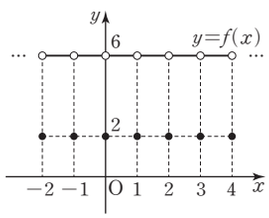
$=\sum_{m=1}^{5}(14m-2)=14\sum_{m=1}^{5}m-\sum_{m=1}^{5}2$

$=14\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-2\cdot 5=200$ 답 200

1369

|전략| 함수 $f(x)$가 주기함수임을 이용하여 x가 정수일 때와 정수가 아닐 때의 $f(x)$의 값을 각각 구한다.

$f(x+1)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x가 정수이면 $f(x)=2$이고, x가 정수가 아니면 $f(x)=6$이다.

이때 $\sqrt{k}$가 정수이려면 k는 정수의 제곱이어야 하므로 $1\le k\le 24$인 자연수 k에 대하여

$f(\sqrt{k})=\begin{cases}6 & (k\ne 1, 4, 9, 16)\\ 2 & (k=1, 4, 9, 16)\end{cases}$

(i) $k\ne 1, 4, 9, 16$일 때, $\frac{kf(\sqrt{k})}{6}=\frac{k\cdot 6}{6}=k$

(ii) $k=1, 4, 9, 16$일 때, $\frac{kf(\sqrt{k})}{6}=\frac{k\cdot 2}{6}=\frac{k}{3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{24}\frac{kf(\sqrt{k})}{6}$

$=\sum_{k=1}^{24}k-(1+4+9+16)+\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{9}{3}+\frac{16}{3}\right)$

$=\frac{24\cdot 25}{2}-30+10=280$ 답 ④

1370

|전략| $f(x)=\sum_{k=1}^{10}(x-a_k)^2$이라 하고, $f(x)$가 최솟값을 가질 때의 x의 값을 구한다.

$f(x)=\sum_{k=1}^{10}(x-a_k)^2$이라 하면

$f(x)=\sum_{k=1}^{10}(x^2-2a_k\cdot x+a_k^2)=\sum_{k=1}^{10}x^2-\left(2\sum_{k=1}^{10}a_k\right)x+\sum_{k=1}^{10}a_k^2$

$=10x^2-\left(2\sum_{k=1}^{10}a_k\right)x+\sum_{k=1}^{10}a_k^2$

이때 $f(x)$는 x에 대한 이차함수이고 x^2의 계수가 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 최솟값이 된다.

따라서 $f(x)$가 최솟값을 가질 때의 x의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표이므로

→ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$a=-\frac{-2\sum_{k=1}^{10}a_k}{2\cdot 10}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}a_k$

$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{10}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{11}$ 답 ①

1371

|전략| 로그의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^{m}a_k$를 m에 대한 식으로 나타내고, 이 값이 자연수가 될 조건을 찾는다.

$a_n=\log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}=\frac{1}{2}\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}=\frac{1}{2}\left(1+\log_2\frac{n+1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(1+\log_2\frac{k+1}{k+2}\right)$

$=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\log_2\frac{4}{5}+\cdots+\log_2\frac{m+1}{m+2}\right)$

$=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{m+1}{m+2}\right)$

$=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\log_2\frac{2}{m+2}=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\{1-\log_2(m+2)\}$

$=\frac{m+1-\log_2(m+2)}{2}$

$\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 자연수이려면 $\log_2(m+2)$가 자연수이어야 하므로 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

이때 2의 거듭제곱은 짝수이므로 $m+2$는 짝수이다.

즉, $m+1$이 홀수이므로 $\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 자연수이려면 $\log_2(m+2)$도 홀수이어야 한다.

(i) $\log_2(m+2)=1$이면 $m+2=2$, 즉 $m=0$이므로 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\log_2(m+2)=3$, 즉 $m=6$일 때 → $m+2=2^3=8$ $\therefore m=8-2=6$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{6+1-3}{2}=2$

(iii) $\log_2(m+2)=5$, 즉 $m=30$일 때 → $m+2=2^5=32$ $\therefore m=32-2=30$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{30+1-5}{2}=13$

(iv) $\log_2(m+2)=7$, 즉 $m=126$일 때 → $m+2=2^7=128$ $\therefore m=128-2=126$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{126+1-7}{2}=60$

(v) $\log_2(m+2)=9$, 즉 $m=510$일 때 → $m+2=2^9=512$ $\therefore m=512-2=510$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{510+1-9}{2}=251>100$

이므로 100 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 $m=6$ 또는 $m=30$ 또는 $m=126$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은

$6+30+126=162$ 답 162

10 수학적 귀납법

본책 184~199쪽

STEP 1 개념 마스터

1372

$a_{n+1}=na_n$에서

$a_2=1\cdot a_1=1\cdot 2=2$

$a_3=2a_2=2\cdot 2=4$

$a_4=3a_3=3\cdot 4=12$

$\therefore a_5=4a_4=4\cdot 12=48$ 답 48

1373

$a_{n+1}=a_n-(-1)^n$에서

$a_2=a_1-(-1)=5+1=6$

$a_3=a_2-(-1)^2=6-1=5$

$a_4=a_3-(-1)^3=5+1=6$

$\therefore a_5=a_4-(-1)^4=6-1=5$ 답 5

1374

$a_{n+1}=2a_n+n$에서

$a_2=2a_1+1=2\cdot(-1)+1=-1$

$a_3=2a_2+2=2\cdot(-1)+2=0$

$a_4=2a_3+3=2\cdot 0+3=3$

$\therefore a_5=2a_4+4=2\cdot 3+4=10$ 답 10

1375

$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1$에서

$a_2=\frac{1}{a_1}+1=\frac{1}{1}+1=2$

$a_3=\frac{1}{a_2}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$a_4=\frac{1}{a_3}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

$\therefore a_5=\frac{1}{a_4}+1=\frac{3}{5}+1=\frac{8}{5}$ 답 $\frac{8}{5}$

1376

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_3=a_2+a_1=5+2=7$

$a_4=a_3+a_2=7+5=12$

$\therefore a_5=a_4+a_3=12+7=19$ 답 19

1377

$a_{n+2}=a_{n+1}a_n$에서

$a_3=a_2a_1=2\cdot(-2)=-4$

$a_4=a_3a_2=(-4)\cdot 2=-8$

$\therefore a_5=a_4a_3=(-8)\cdot(-4)=32$ 답 32

1378

$a_{n+2}=\frac{3a_{n+1}}{a_n}$에서

$a_3=\frac{3a_2}{a_1}=\frac{3\cdot 3}{1}=9$

$a_4=\frac{3a_3}{a_2}=\frac{3\cdot 9}{3}=9$

$\therefore a_5=\frac{3a_4}{a_3}=\frac{3\cdot 9}{9}=3$ 답 3

1379 답 $a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1380 답 $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{4}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1381

첫째항 a_1은 $a_1=1$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=3-1=2$

$a_3-a_2=5-3=2$

$a_4-a_3=7-5=2$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1382

첫째항 a_1은 $a_1=3$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=10-3=7$

$a_3-a_2=17-10=7$

$a_4-a_3=24-17=7$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=7$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+7\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+7\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1383

첫째항 a_1은 $a_1=8$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=5-8=-3$

$a_3-a_2=2-5=-3$

$a_4-a_3=-1-2=-3$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=-3$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=8,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=8,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1384

첫째항 a_1은 $a_1=26$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=21-26=-5$

$a_3-a_2=16-21=-5$

$a_4-a_3=11-16=-5$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=-5$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=26,\ a_{n+1}=a_n-5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=26,\ a_{n+1}=a_n-5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1385

$a_{n+1}=a_n+4$에서 주어진 수열은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=4$이므로 $a_n=4+(n-1)\cdot 4=4n$ 답 $a_n=4n$

1386

$a_{n+1}-a_n=-1$에서 주어진 수열은 공차가 -1인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=6$이므로 $a_n=6+(n-1)\cdot(-1)=-n+7$

답 $a_n=-n+7$

1387

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이다.

이때 $a_1=2$, $a_2-a_1=5-2=3$에서 첫째항이 2, 공차가 3이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$ 답 $a_n=3n-1$

1388

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 주어진 수열은 등차수열이다.

이때 $a_1=5$, $a_2-a_1=-1-5=-6$에서 첫째항이 5, 공차가 -6이므로 $a_n=5+(n-1)\cdot(-6)=-6n+11$ 답 $a_n=-6n+11$

1389 답 $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1390 답 $a_1=9,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1391

첫째항 a_1은 $a_1=2$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{18}{6}=3$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{54}{18}=3$

$\vdots$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1392

첫째항 a_1은 $a_1=72$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{32}{48}=\frac{2}{3}$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{64}{3}}{32}=\frac{2}{3}$

$\vdots$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=72,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=72,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1393

첫째항 a_1은 $a_1=3$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-6}{3}=-2$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{-6}=-2$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{-24}{12}=-2$

$\vdots$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1394

첫째항 a_1은 $a_1=-100$이고

이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{20}{-100}=-\frac{1}{5}$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{-4}{20}=-\frac{1}{5}$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{4}{5}}{-4}=-\frac{1}{5}$

$\vdots$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{5}$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=-100,\ a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=-100,\ a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1395

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$에서 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=8$이므로 $a_n=8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

1396

$a_{n+1}=-5a_n$에서 주어진 수열은 공비가 -5인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로 $a_n=3\cdot(-5)^{n-1}$ 답 $a_n=3\cdot(-5)^{n-1}$

1397

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-3$이므로 $a_n=-3\cdot2^{n-1}$ 답 $a_n=-3\cdot2^{n-1}$

1398

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이다.

이때 $a_1=1$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{1}=5$에서 첫째항이 1, 공비가 5이므로

$a_n=1\cdot5^{n-1}=5^{n-1}$ 답 $a_n=5^{n-1}$

1399

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이다.

이때 $a_1=-48$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{16}{-48}=-\frac{1}{3}$에서 첫째항이 -48, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로 $a_n=-48\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=-48\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1400

$a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1$

$a_3=a_2+2=a_1+1+2$

$a_4=a_3+3=a_1+1+2+3$

⋮

$\therefore a_8=a_7+7=a_1+1+2+3+\cdots+7$

$=a_1+\sum_{k=1}^{7}k=1+\frac{7\cdot8}{2}$

$=1+28=29$ 답 29

1401

$a_{n+1}=a_n+2n+1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3$

$a_3=a_2+5=a_1+3+5$

$a_4=a_3+7=a_1+3+5+7$

⋮

$\therefore a_8=a_7+15=a_1+3+5+7+\cdots+15$

$=a_1+\sum_{k=1}^{7}(2k+1)=1+2\cdot\frac{7\cdot8}{2}+1\cdot7$

$=1+56+7=64$ 답 64

1402

$a_{n+1}-a_n=2^n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+2^2=a_1+2+2^2$

$a_4=a_3+2^3=a_1+2+2^2+2^3$

⋮

$\therefore a_8=a_7+2^7=a_1+2+2^2+2^3+\cdots+2^7$

$=a_1+\sum_{k=1}^{7}2^k=2+\frac{2(2^7-1)}{2-1}$

$=2+2^8-2=256$ 답 256

1403

$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

⋮

$\therefore a_8=\frac{7}{8}a_7=\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$=\frac{1}{8}\cdot3=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

1404

$a_{n+1}=3^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하면

$a_2=3a_1$

$a_3=3^2a_2=3^2\cdot3a_1$

$a_4=3^3a_3=3^3\cdot3^2\cdot3a_1$

⋮

$\therefore a_8=3^7a_7=3^7\cdot\cdots\cdot3^3\cdot3^2\cdot3a_1$

$=3^{1+2+3+\cdots+7}\cdot a_1$

$=3^{\frac{7\cdot8}{2}}\cdot1=3^{28}$ 답 3^{28}

1405

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ ……㉡

㉡의 양변에 (가) $k+1$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+$ (가) $k+1$

$=\frac{k(k+1)}{2}+$ (가) $k+1$

$=($ (가) $k+1$ $)\left($ (나) $\frac{k}{2}+1\right)$

$=$ (다) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

답 (가) $k+1$ (나) $\frac{k}{2}$ (다) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 등차수열의 귀납적 정의 개념 02

수열 $\{a_n\}$에서

(1) $a_{n+1}=a_n+d$ 또는 $a_{n+1}-a_n=d$ ⇨ 공차가 d인 등차수열

(2) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 또는 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ ⇨ 등차수열

1406

$a_{n+1}+4=a_n$에서 $a_{n+1}=a_n-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=300$이므로

$a_n=300+(n-1)\cdot(-4)=-4n+304$

이때 $a_k=88$이므로 $-4k+304=88$

$4k=216$ $\therefore k=54$ 답 ④

1407

$a_{n+1}=a_n+5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-8$이므로

$a_n=-8+(n-1)\cdot5=5n-13$

$\therefore a_{20}=5\cdot20-13=87$ 답 87

1408

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_1=2$, $a_2-a_1=4-2=2$에서 첫째항이 2, 공차가 2이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot2=2n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2k\cdot2(k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{5}{21}$$

답 ③

참고 **부분분수로의 변형**

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

1409

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-16$ ····· ㉠

$a_5=a+4d=-7$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-19$, $d=3$

$\therefore a_n=-19+(n-1)\cdot3=3n-22$

이때 $3n-22>0$에서 $n>\frac{22}{3}=7.\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소가 된다.

(첫째항부터 제7항까지의 합 ㄴ 음수인 항만 모두 더한 것)

따라서 S_n의 값이 최소가 되도록 하는 n의 값은 7이다. 답 ③

유형 02 등비수열의 귀납적 정의 개념 03

수열 $\{a_n\}$에서

(1) $a_{n+1}=ra_n$ 또는 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ ⇨ 공비가 r인 등비수열

(2) ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$ 또는 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ⇨ 등비수열

1410

$a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=4$이므로 $a_n=4\cdot2^{n-1}$

$4\cdot2^{n-1}\geq1000$에서 $2^{n-1}\geq250$

$2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n-1\geq8$ $\therefore n\geq9$

따라서 처음으로 1000 이상이 되는 항은 제9항이다. 답 ②

1411

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. ··· ❶

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{15}}{a_5}=r^{10}+r^{10}+r^{10}=3r^{10}=15$ $\therefore r^{10}=5$ ··· ❷

$\therefore \frac{a_{30}}{a_{10}}=r^{20}=(r^{10})^2=5^2=25$ ··· ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알 수 있다.	30 %
❷ r^{10}의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a_{30}}{a_{10}}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1412

$2\log a_{n+1}=\log a_n+\log a_{n+2}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 $a_1=1$, $\frac{a_2}{a_1}=3$에서 첫째항이 1, 공비가 3이므로

$a_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

따라서 $a_{2k-1}=3^{(2k-1)-1}=3^{2(k-1)}=9^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}9^{k-1}=\frac{1\cdot(9^{10}-1)}{9-1}=\frac{1}{8}(9^{10}-1)$ 답 $\frac{1}{8}(9^{10}-1)$

1413

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}=0$ $\therefore {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$ ····· ㉠

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$이므로 공비가 $\frac{1}{2}$이다.

한편, 주어진 이차방정식의 근은

$x=\frac{a_{n+1}\pm\sqrt{{a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($\because$ ㉠) $=\frac{1}{2}$ (중근)

이때 주어진 이차방정식의 중근이 b_n이므로 $b_n=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot100=50$ 답 50

다른 풀이 $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$이므로

$a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

따라서 주어진 이차방정식은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}x^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}x+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0$

이 식의 양변에 2^n을 곱하면

$4x^2-4x+1=0$, $(2x-1)^2=0$ $\therefore x=b_n=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100=50$

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴로 정의된 수열 개념 04

$a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.
⇨ $a_n=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$

1414

$a_{n+1}=a_n+2n-1$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1$

$a_3=a_2+3=a_1+1+3$

$a_4=a_3+5=a_1+1+3+5$

⋮

$\therefore a_n=a_1+1+3+5+\cdots+2(n-1)-1$

$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$=a_1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-1\cdot(n-1)=(n-1)^2+a_1$

$a_8=50$에서 $(8-1)^2+a_1=50$ $\therefore a_1=1$

따라서 $a_n=(n-1)^2+1$이므로

$a_4=(4-1)^2+1=10$ 답 ③

1415

$a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+2^2=a_1+2+2^2$

$a_4=a_3+2^3=a_1+2+2^2+2^3$

⋮

$\therefore a_n=a_1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

이때 $a_k=1023$이므로 $2^k-1=1023$

$2^k=1024=2^{10}$ $\therefore k=10$ 답 10

1416

$a_{n+1}=a_n-f(n)$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입하면

$a_2=a_1-f(1)$

$a_3=a_2-f(2)=a_1-f(1)-f(2)$

$a_4=a_3-f(3)=a_1-f(1)-f(2)-f(3)$

⋮

$\therefore a_{20}=a_1-f(1)-f(2)-f(3)-\cdots-f(19)$

$=a_1-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(19)\}$

$=a_1-\sum_{k=1}^{19}f(k)=-1-(19^2-1)=-361$ 답 ⑤

1417

$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+\sqrt{2}-1$

$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1+\sqrt{3}-1$

$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1+\sqrt{3}-1+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1+\sqrt{4}-1$

⋮

$\therefore a_{100}=a_1+\sqrt{100}-1=5+10-1=14$ 답 ⑤

유형 04 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴로 정의된 수열 개념 04

$a_{n+1}=a_nf(n)$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.
⇨ $a_n=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)$

1418

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 98을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{3}{2}a_1$

$a_3=\frac{4}{3}a_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_1$

$a_4=\frac{5}{4}a_3=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_1$

⋮

$\therefore a_{99}=\frac{100}{99}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_1=\frac{100}{2}\cdot 2=100$ 답 ③

1419

$\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}a_n$에서 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}a_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$

$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}a_3=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$

⋮

$\therefore a_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}a_1=\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_ka_{k+1})^2=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$ 답 $\frac{10}{11}$

1420

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=7^n$에서 $a_{n+1}=7^n a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=7a_1$

$a_3=7^2a_2=7^2\cdot 7a_1$

$a_4=7^3a_3=7^3\cdot 7^2\cdot 7a_1$

⋮

$\therefore a_n=7^{n-1}\cdot\cdots\cdot 7^3\cdot 7^2\cdot 7a_1$

$=7^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot a_1$

$=7^{\frac{(n-1)n}{2}}\cdot 1=7^{\frac{n(n-1)}{2}}$

이때 $a_k=7^{55}$이므로 $7^{\frac{k(k-1)}{2}}=7^{55}$

$\frac{k(k-1)}{2}=55$, $k^2-k-110=0$

$(k+10)(k-11)=0$ $\therefore k=11$ ($\because k$는 자연수) 답 11

1421

$a_{n+1}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}a_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$a_3=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}a_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}a_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$a_4=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}a_3=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}a_1$

⋮

$\therefore a_{15}=\frac{16}{15}\cdot\frac{1}{2}a_1=\frac{8}{15}\cdot 3=\frac{8}{5}$ 답 $\frac{8}{5}$

유형 05 $a_{n+1}=pa_n+q\,(p\neq 1, pq\neq 0)$ 꼴로 정의된 수열 개념 01~04

관계식으로부터 수열 $\{a_n\}$의 특징을 찾기 어려운 경우에는 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

1422

$a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\cdot 3+1=7$, $a_3=2a_2+1=2\cdot 7+1=15$

$a_4=2a_3+1=2\cdot 15+1=31$, $a_5=2a_4+1=2\cdot 31+1=63$

$\therefore a_6=2a_5+1=2\cdot 63+1=127$ 답 ②

다른 풀이 $a_{n+1}=2a_n+1$에서 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=3+1=4$이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n+1=4\cdot 2^{n-1}$ $\therefore a_n=4\cdot 2^{n-1}-1$

$\therefore a_6=4\cdot 2^5-1=128-1=127$

1423

$a_{n+1}=3a_n-2$에 $n=3$을 대입하면 $a_4=3a_3-2$

$a_4=55$이므로 $3a_3-2=55$, $3a_3=57$ $\therefore a_3=19$

$a_{n+1}=3a_n-2$에 $n=2$를 대입하면 $a_3=3a_2-2$

$a_3=19$이므로 $3a_2-2=19$, $3a_2=21$ $\therefore a_2=7$ 답 7

유형 06 분수 꼴로 정의된 수열 개념 01~04

주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 분자나 분모의 규칙을 찾는다.

1424

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{5}$

$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{2\cdot\frac{1}{5}+1}=\frac{1}{7}$

⋮

$\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$

이때 $a_k=\frac{1}{49}$이므로 $\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{49}$

$2k-1=49$, $2k=50$ $\therefore k=25$ 답 25

다른 풀이 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{1}=1$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$ $\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$

이때 $a_k=\frac{1}{49}$이므로 $\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{49}$, $2k-1=49$ $\therefore k=25$

1425

$a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{2a_1}{2+a_1}=\frac{2\cdot 2}{2+2}=1$

$a_3=\frac{2a_2}{2+a_2}=\frac{2\cdot 1}{2+1}=\frac{2}{3}$

$a_4=\frac{2a_3}{2+a_3}=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore a_5=\frac{2a_4}{2+a_4}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로 $p+q=5+2=7$ 답 ③

유형 07 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열 개념 01~04

관계식으로부터 수열 $\{a_n\}$의 특징을 찾기 어려운 경우에는 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

1426

$a_1=3$은 홀수이므로 $a_2=a_1+1=3+1=4$

$a_2=4$는 짝수이므로 $a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4}{2}=2$

$a_3=2$는 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2}{2}=1$

$a_4=1$은 홀수이므로 $a_5=a_4+4=1+4=5$

$a_5=5$는 홀수이므로 $a_6=a_5+5=5+5=10$

$a_6=10$은 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2}=\frac{10}{2}=5$ 답 5

1427

$a_2=2a_1=2\cdot1=2$

$a_3=a_2^{\,2}-1=2^2-1=3$

$a_4=2a_3=2\cdot3=6$

$a_5=a_4^{\,2}-1=6^2-1=35$

$\therefore a_4+a_5=6+35=41$ 답 41

1428

$a_1=7$은 소수이므로 $a_2=\frac{a_1+3}{2}=\frac{7+3}{2}=5$

$a_2=5$는 소수이므로 $a_3=\frac{a_2+3}{2}=\frac{5+3}{2}=4$

$a_3=4$는 소수가 아니므로 $a_4=2a_3+1=2\cdot4+1=9$

$a_4=9$는 소수가 아니므로 $a_5=2a_4+1=2\cdot9+1=19$

$a_5=19$는 소수이므로 $a_6=\frac{a_5+3}{2}=\frac{19+3}{2}=11$ 답 ④

1429

$a_1=3\geq0$이므로 $a_2=1-a_1=1-3=-2$

$a_2=-2<0$이므로 $a_3=a_2+p=-2+p$

(i) $a_3=-2+p\geq0$, 즉 $p\geq2$일 때

$a_4=1-a_3=1-(-2+p)=3-p$

$a_4=0$이 되려면 $3-p=0$ $\therefore p=3$

(ii) $a_3=-2+p<0$, 즉 $p<2$일 때

$a_4=a_3+p=(-2+p)+p=-2+2p$

$a_4=0$이 되려면 $-2+2p=0$ $\therefore p=1$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 p의 값의 합은

$3+1=4$ 답 4

유형 08 같은 수가 반복되는 수열 개념 01~04

주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 같은 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

1430

$a_{n+1}=a_n+5\cdot(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+5\cdot(-1)=5-5=0$

$a_3=a_2+5\cdot(-1)^2=0+5=5$

$a_4=a_3+5\cdot(-1)^3=5-5=0$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 5, 0이 이 순서대로 반복된다.

이때 $39=2\cdot19+1$이므로

$a_{39}=a_1=5$ 답 ④

1431

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6, …을 차례로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=2-1=1$

$a_4=a_3-a_2=1-2=-1$

$a_5=a_4-a_3=-1-1=-2$

$a_6=a_5-a_4=-2-(-1)=-1$

$a_7=a_6-a_5=-1-(-2)=1$ ┐ 연속한 두 값이 a_1, a_2와 같은 값이 나올 때까지 구한다.

$a_8=a_7-a_6=1-(-1)=2$ ┘

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 1, −1, −2, −1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2025=6\cdot337+3$이므로

$\sum_{k=1}^{2025}a_k=337\cdot\{1+2+1+(-1)+(-2)+(-1)\}+1+2+1$

$=4$ 답 4

1432

$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+1}{a_n}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, …을 차례로 대입하면

$a_3=\frac{a_2+1}{a_1}=\frac{2+1}{3}=1$

$a_4=\frac{a_3+1}{a_2}=\frac{1+1}{2}=1$

$a_5=\frac{a_4+1}{a_3}=\frac{1+1}{1}=2$

$a_6=\frac{a_5+1}{a_4}=\frac{2+1}{1}=3$

$a_7=\frac{a_6+1}{a_5}=\frac{3+1}{2}=2$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $113=5\cdot22+3$이므로

$a_{113}=a_3=1$ 답 1

1433

$a_1a_2a_3=a_2a_3a_4=1$이므로 $a_1=a_4$

$a_2a_3a_4=a_3a_4a_5=1$이므로 $a_2=a_5$

$a_3a_4a_5=a_4a_5a_6=1$이므로 $a_3=a_6$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $10=3\cdot3+1$, $17=3\cdot5+2$이므로

$a_1=a_{10}=1$, $a_2=a_{17}=4$

한편, $a_1a_2a_3=1$에서

$a_3=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{1\cdot4}=\frac{1}{4}$

따라서 $200=3\cdot66+2$, $201=3\cdot67$이므로

$a_{200}a_{201}=a_2a_3=4\cdot\frac{1}{4}=1$ 답 ③

다른 풀이 $10=3\cdot3+1$이므로 $a_1=a_{10}=1$

$200=3\cdot66+2$, $201=3\cdot67$이므로 $a_{200}=a_2$, $a_{201}=a_3$

이때 $a_1a_2a_3=1$이므로 $a_2a_3=\frac{1}{a_1}=1$

$\therefore a_{200}a_{201}=a_2a_3=1$

유형 09 S_n이 포함된 수열의 귀납적 정의 개념 01~04

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용하여 주어진 등식을 a_n 또는 S_n에 대한 식으로 변형한다.

1434

$S_n=5a_n-1$에서 $S_{n+1}=5a_{n+1}-1$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=5a_{n+1}-1-(5a_n-1)$

$4a_{n+1}=5a_n$ $\therefore a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{5}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{20}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{19}=\frac{5^{19}}{4^{20}}$ 답 $\frac{5^{19}}{4^{20}}$

1435

$S_{n+1}=3S_n+2$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$S_2=3S_1+2=3\cdot 2+2=8$

$S_3=3S_2+2=3\cdot 8+2=26$

$S_4=3S_3+2=3\cdot 26+2=80$

$S_5=3S_4+2=3\cdot 80+2=242$

$S_6=3S_5+2=3\cdot 242+2=728$

$\therefore a_6=S_6-S_5=728-242=486$ 답 486

1436

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이므로

$a_{n+1}=S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$S_{n+1}-S_n=S_n$ $\therefore S_{n+1}=2S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n=3\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_9+a_{10}=(S_9-S_8)+(S_{10}-S_9)=S_{10}-S_8$

$=3\cdot 2^9-3\cdot 2^7=9\cdot 2^7=1152$ 답 ③

다른 풀이 $S_n=3\cdot 2^{n-1}$이고, $a_{n+1}=S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_9+a_{10}=S_8+S_9=3\cdot 2^7+3\cdot 2^8=9\cdot 2^7=1152$

1437

$2S_n=na_{n+1}$ $(n\geq 1)$ ····· ㉠

$2S_{n-1}=(n-1)a_n$ $(n\geq 2)$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면 $2(S_n-S_{n-1})=na_{n+1}-(n-1)a_n$ $(n\geq 2)$

이때 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로

$2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$, $na_{n+1}=(n+1)a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$ $(n\geq 2)$ ····· ㉢ … ❶

한편, $2S_n=na_{n+1}$에 $n=1$을 대입하면

$2S_1=a_2$이고 $S_1=a_1=1$이므로

$a_2=2S_1=2\cdot 1=2$

㉢의 n에 2, 3, 4, …를 차례로 대입하면

$a_3=\frac{3}{2}a_2$

$a_4=\frac{4}{3}a_3=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_2$

$a_5=\frac{5}{4}a_4=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_2$

⋮

$\therefore a_n=\frac{n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_2=\frac{n}{2}a_2=\frac{n}{2}\cdot 2=n$ $(n\geq 2)$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=n$ … ❷

따라서 $a_k=100$에서 $k=100$ … ❸

답 100

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

발전 유형 10 수열의 귀납적 정의의 활용 개념 01~04

(1) 첫째항, 둘째항, 셋째항을 구해 규칙을 찾는다.

(2) 제n항을 a_n으로 놓고 이웃하는 두 항 a_n, a_{n+1} 또는 이웃하는 세 항 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

1438

n일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양을 a_n L라 하면

$a_1=120\cdot\frac{1}{3}+120\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=60$

$(n+1)$일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{2}{3}$를 사용하고 남은 물의 $\frac{1}{2}$을 새로 넣은 것이므로

$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{3}+a_n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 60, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=60\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_5=60\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{4}$

따라서 5일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양은 $\frac{15}{4}$ L이다. 답 ③

1439

$a_1=(10-3)\cdot 4=28$이므로 $p=28$

$a_{n+1}=(a_n-3)\cdot 4$에서 $a_{n+1}=4a_n-12$이므로 $q=4$, $r=-12$

$\therefore p+q+r=28+4+(-12)=20$ 답 20

1440

$a_1=3$

$a_2=a_1+3\cdot 2$

$a_3=a_2+3\cdot 3$

$a_4=a_3+3\cdot 4$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

1441

점 P_n의 좌표를 a_n이라 하면

$a_{n+2}=\dfrac{1\cdot a_{n+1}+2\cdot a_n}{1+2}=\dfrac{1}{3}a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$

$a_1=1$, $a_2=5$이므로 위의 식의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_3=\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{2}{3}a_1=\dfrac{1}{3}\cdot 5+\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$

$a_4=\dfrac{1}{3}a_3+\dfrac{2}{3}a_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot 5=\dfrac{37}{9}$

$a_5=\dfrac{1}{3}a_4+\dfrac{2}{3}a_3=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{37}{9}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{79}{27}$

따라서 점 P_5의 좌표는 $\dfrac{79}{27}$이다. 답 ②

Lecture

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

1442

$a_1=2$

n개의 직선이 그려진 평면에 조건에 알맞은 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다.

즉, $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n+1$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3=a_1+2+3$

$a_4=a_3+4=a_1+2+3+4$

⋮

$\therefore a_{15}=a_1+2+3+4+\cdots+15$

$=a_1+\sum_{k=1}^{14}(k+1)$

$=2+\dfrac{14\cdot 15}{2}+1\cdot 14=121$ 답 ④

1443

a_n %의 소금물 150 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{a_n}{100}\cdot 150=\dfrac{3}{2}a_n$ (g)

10 %의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{10}{100}\cdot 50=5$ (g)

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{\frac{3}{2}a_n+5}{200}\cdot 100=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{2}$

따라서 $p=\dfrac{3}{4}$, $q=\dfrac{5}{2}$이므로

$pq=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{8}$ 답 $\dfrac{15}{8}$

유형 11 수학적 귀납법 개념 05

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이

(i) $p(1)$이 참이다.

(ii) $p(k)$가 참이면 $p(k+m)$도 참이다.

를 모두 만족시키면

⇨ $p(1), p(1+m), p(1+2m), \cdots$이 모두 참이다.

1444

조건 (가), (나)에서

$p(1), p(3), p(3^2), \cdots$이 참이다. …… ㉠

또, 조건 (가), (다)에서

$p(1), p(5), p(5^2), \cdots$이 참이다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p(3\cdot 5), p(3\cdot 5^2), p(3\cdot 5^3), \cdots$이 참이고

$p(3^2\cdot 5), p(3^2\cdot 5^2), p(3^2\cdot 5^3), \cdots$이 참이다.

⋮

즉, 주어진 조건에 의하여 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(3^a\cdot 5^b)$이 참이다.

① $p(30)=p(2\cdot 3\cdot 5)$

② $p(60)=p(2^2\cdot 3\cdot 5)$

③ $p(75)=p(3\cdot 5^2)$

④ $p(90)=p(2\cdot 3^2\cdot 5)$

⑤ $p(105)=p(3\cdot 5\cdot 7)$

따라서 반드시 참인 명제는 ③ $p(75)$이다. 답 ③

1445

ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(3), p(4), p(5), p(6), \cdots$

이 모두 참이지만 $p(2)$가 참인지 알 수 없으므로 모든 2의 양의 배수 k에 대하여 $p(k)$가 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(3), p(4), p(5), p(6), \cdots$

이 모두 참이므로 모든 2의 양의 배수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. (참)

ㄷ. $p(1)$과 $p(2)$가 모두 참이면 ㄱ, ㄴ에 의하여 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

1446

명제 $p(n)$이 $n=3, 5, 7, 9, \cdots$일 때 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=$ (가) 3 일 때, $p(n)$이 성립한다.

(ii) $5=3+2$, $7=5+2$, $9=7+2$, …이므로

$n=k$ $(k\geq$ (가) 3 $)$일 때, $p(n)$이 성립한다고 가정하면

$n=$ (나) $k+2$ 일 때도 $p(n)$이 성립한다.

따라서 $a=3$, $f(k)=k+2$이므로

$f(a)=f(3)=3+2=5$ 답 5

유형 12 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명 개념 05

모든 자연수 n에 대하여 등식 $f(n)=g(n)$이 성립함을 증명하려면
(i) $f(1)=g(1)$임을 보인다.
(ii) $f(k)=g(k)$가 성립한다고 가정한 다음 좌변이 $f(k+1)$이 되도록 양변에 같은 식을 더하거나 곱하여 우변이 $g(k+1)$이 됨을 보인다.

1447

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } (k+1)(k+2)}$를 더하면

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+\boxed{\text{(가) } (k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+\boxed{\text{(가) } (k+1)(k+2)}$

$=(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)$

$=\boxed{\text{(나) } \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

이때 $f(k)=(k+1)(k+2)$, $g(k)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$이므로

$f(6)+g(9)=7\cdot8+\frac{1}{3}\cdot10\cdot11\cdot12=496$ 답 496

1448

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ····· ㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$

따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$

$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

1449

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$ ····· ㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{1}=2$, (우변)$=1+1=2$

따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $1+\frac{1}{k+1}$을 곱하면

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$

$=(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=k+2$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

1450

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=\boxed{\text{(가) } \frac{k}{k+1}}$

이때 $a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}$에서

$a_{k+1}=\frac{1}{2-\boxed{\text{(가) } \frac{k}{k+1}}}=\frac{k+1}{2(k+1)-k}=\frac{k+1}{\boxed{\text{(나) } k+2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

이때 $f(k)=\frac{k}{k+1}$, $g(k)=k+2$이므로

$f(3)g(6)=\frac{3}{4}\cdot8=6$ 답 ①

유형 13 수학적 귀납법을 이용한 배수의 증명 개념 05

모든 자연수 n에 대하여 a_n이 l의 배수임을 증명하려면
(i) a_1이 l의 배수임을 보인다.
(ii) a_k가 l의 배수라 가정한 다음 $a_{k+1}=l(\square+\triangle)$ 꼴로 정리하여 a_{k+1}도 l의 배수임을 보인다.

1451

(ii) $n=k$일 때, $4^{2n+1}+3^{n+2}$이 13의 배수라 가정하면

$4^{2k+1}+3^{k+2}=13N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$4^{2k+3}+3^{k+3}=4^2\cdot4^{2k+1}+3\cdot\boxed{\text{(가) } 3^{k+2}}$

$=16(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\cdot3^{k+2}$

$=16\cdot\boxed{\text{(나) } 13N}-13\cdot\boxed{\text{(가) } 3^{k+2}}$

$=13(\boxed{\text{(다) } 16N-3^{k+2}})$

따라서 $n=k+1$일 때도 $4^{2n+1}+3^{n+2}$이 13의 배수이다. 답 ④

1452

(i) $n=1$일 때

$9^1-1=8$이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, 9^n-1이 8의 배수라 가정하면

$9^k-1=8N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$9^{k+1}-1=9\cdot 9^k-1$

$=8\cdot 9^k+9^k-1$

$=8\cdot 9^k+8N=8(9^k+N)$

따라서 $n=k+1$일 때도 9^n-1이 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 9^n-1이 8의 배수이다.

답 풀이 참조

1453

(ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, 4^n-3n-1이 9의 배수라 가정하면

$4^k-3k-1=9N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$4^{k+1}-3(k+1)-1=\boxed{\text{(가) } 4^{k+1}}-3k-4$

$=4(4^k-3k-1)+\boxed{\text{(나) } 9k}$

$=4\cdot 9N+\boxed{\text{(나) } 9k}$

$=9(\boxed{\text{(다) } 4N+k})$

따라서 $n=k+1$일 때도 4^n-3n-1이 9의 배수이다. 답 ⑤

1454

(i) $n=1$일 때

$7+1=8=2\cdot 4$이므로 2의 배수이다. ($1=5^0=1$)

(ii) $n=k$일 때, 7^n+5^{n-1}이 2의 배수라 가정하면

$7^k+5^{k-1}=2N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$7^{k+1}+5^k=7\cdot 7^k+5\cdot 5^{k-1}$

$=7(7^k+5^{k-1})-2\cdot 5^{k-1}$

$=7\cdot 2N-2\cdot 5^{k-1}=2(7N-5^{k-1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 7^n+5^{n-1}이 2의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 7^n+5^{n-1}이 2의 배수이다.

답 풀이 참조

유형 14 수학적 귀납법을 이용한 부등식의 증명 개념 05

$n\geq a$ (a는 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $f(n)>g(n)$이 성립함을 증명하려면

(i) $f(a)>g(a)$임을 보인다.

(ii) $f(k)>g(k)$ $(k\geq a)$가 성립한다고 가정한 다음 좌변이 $f(k+1)$이 되도록 양변에 같은 식을 더하거나 곱하고, 이때의 우변이 $g(k+1)$보다 크거나 같음을 보인다.

1455

(i) $n=\boxed{\text{(가) } 2}$일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 $1+2h+h^2>1+2h$

따라서 $n=\boxed{\text{(가) } 2}$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ ……㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(나) } 1+h}$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(\boxed{\text{(나) } 1+h})$

$=1+(k+1)h+kh^2$

그런데 $kh^2>0$이므로

$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$

$\therefore (1+h)^{k+1}>\boxed{\text{(다) } 1+(k+1)h}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다. 답 ⑤

1456

(ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ ……㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } \frac{1}{k+1}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\text{(가) } \frac{1}{k+1}}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{\text{(가) } \frac{1}{k+1}}$

$=\frac{2k+1}{k+1}$

그런데

$\frac{2k+1}{k+1}-\boxed{\text{(나) } \frac{2k+2}{k+2}}=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$ ($\because k\geq 2$)

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\boxed{\text{(나) } \frac{2k+2}{k+2}}$

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\text{(가) } \frac{1}{k+1}}>\boxed{\text{(나) } \frac{2k+2}{k+2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다. 답 ②

1457

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$ ……㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } \frac{2k+1}{2k+2}}$을 곱하면

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\boxed{\text{(가) } \frac{2k+1}{2k+2}}<\sqrt{\frac{1}{2k+1}}\cdot\boxed{\text{(가) } \frac{2k+1}{2k+2}}$

$=\sqrt{\frac{2k+1}{4(k+1)^2}}$

그런데

$\frac{2k+1}{4(k+1)^2}-\boxed{\text{(나) } \frac{1}{2k+3}}=\frac{(2k+1)(2k+3)-4(k+1)^2}{4(k+1)^2(2k+3)}$

$=\frac{-1}{4(k+1)^2(2k+3)}<0$

($\because k$는 자연수)

이므로 $\frac{2k+1}{4(k+1)^2}<\frac{1}{2k+3}$

즉, $\sqrt{\frac{2k+1}{4(k+1)^2}}<\sqrt{\boxed{\text{(나) } \frac{1}{2k+3}}}$이므로 → 두 양수 A, B에 대하여 $A<B$이면 $\sqrt{A}<\sqrt{B}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\boxed{\text{(가) } \frac{2k+1}{2k+2}}<\sqrt{\boxed{\text{(나) } \frac{1}{2k+3}}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다. 답 ⑤

1458

유형 01 등차수열의 귀납적 정의

|전략| $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 이용한다.

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=11$ ····· ㉠

$a_9=a+8d=35$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-13$, $d=6$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\frac{20\{2\cdot(-13)+19\cdot6\}}{2}=880$ 답 ①

1459

유형 02 등비수열의 귀납적 정의

|전략| $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$이면 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 이용한다.

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 공비가 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{6}{3}=2$이고 $a_2=3$에서 $a_1=\frac{3}{2}$이므로

$a_n=\frac{3}{2}\cdot2^{n-1}$

이때 $a_k=768$이므로 $\frac{3}{2}\cdot2^{k-1}=768$

$2^{k-1}=512=2^9$, $k-1=9$ $\therefore k=10$ 답 ③

1460

유형 01 등차수열의 귀납적 정의 + 02 등비수열의 귀납적 정의

|전략| 주어진 조건을 이용하여 수열의 규칙을 찾는다.

조건 (가), (나)에 의하여 $n\le6$일 때 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -5, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{6\{2\cdot(-5)+5\cdot3\}}{2}=15$

조건 (다)에 의하여 $a_7=2a_1$, $a_8=2a_2$, $a_9=2a_3$, …이므로

$a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$

$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{18}=2(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})$

$=2^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$

⋮

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(1+2+2^2+2^3+2^4)$

$=15\cdot\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}=15\cdot31=465$ 답 ②

1461

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴로 정의된 수열

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$에서 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+1-\frac{1}{3}$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+1-\frac{1}{4}$

⋮

$a_n=a_1+1-\frac{1}{n}=-2+1-\frac{1}{n}=-\frac{n+1}{n}$

$\therefore a_{20}-a_{10}=-\frac{21}{20}-\left(-\frac{11}{10}\right)=\frac{1}{20}$ 답 ①

1462

유형 04 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴로 정의된 수열

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.

$a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1$

$a_3=3a_2=3\cdot2a_1$

$a_4=4a_3=4\cdot3\cdot2a_1$

⋮

$\therefore a_n=n\cdot\cdots\cdot4\cdot3\cdot2a_1=n\cdot\cdots\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=n!$

$n\ge5$일 때, a_n은 모두 10의 배수이므로 $a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{2025}$의 값을 10으로 나누었을 때의 나머지는 a_3+a_4의 값을 10으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $a_3+a_4=\overset{a_3=3!=3\cdot2\cdot1=6}{6}+\underset{a_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24}{24}=30$이므로 구하는 나머지는 0이다. 답 ①

1463

유형 05 $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\ne1,\ pq\ne0)$ 꼴로 정의된 수열

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입한다.

$a_{n+1}-2a_n=-1$, 즉 $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$, $a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$

$a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$, $a_5=2a_4-1=2\cdot17-1=33$

$a_6=2a_5-1=2\cdot33-1=65$

$\therefore \log_2(a_6-1)=\log_2 64=\log_2 2^6=6$ 답 ③

1464

유형 06 분수 꼴로 정의된 수열

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 분모의 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{1+3a_1}=\frac{1}{1+3\cdot1}=\frac{1}{4}$

$a_3=\frac{a_2}{1+3a_2}=\frac{\frac{1}{4}}{1+3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{7}$

$a_4=\frac{a_3}{1+3a_3}=\frac{\frac{1}{7}}{1+3\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{10}$

⋮

$\therefore a_n=\frac{1}{3n-2}$

이때 $a_k=\frac{1}{43}$이므로 $\frac{1}{3k-2}=\frac{1}{43}$

$3k-2=43$, $3k=45$ $\therefore k=15$ 답 ③

1465

유형 07 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열 + 08 같은 수가 반복되는 수열

|전략| 주어진 식의 n에 $1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례로 대입하여 수열의 규칙을 찾는다.

$a_1=1<7$이므로 $a_2=2a_1=2\cdot1=2$

$a_2=2<7$이므로 $a_3=2a_2=2\cdot2=4$

$a_3=4<7$이므로 $a_4=2a_3=2\cdot4=8$

$a_4=8\geq7$이므로 $a_5=a_4-7=8-7=1$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때 $33=4\cdot8+1$이므로

$\sum_{k=1}^{33}a_k=8\cdot(1+2+4+8)+1=121$ 답 ⑤

1466

유형 01 등차수열의 귀납적 정의 + 08 같은 수가 반복되는 수열

|전략| 주어진 조건을 이용하여 수열의 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=|a_n|-3$에서 $a_n\geq0$일 때 $a_{n+1}=a_n-3$

이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=25+(n-1)\cdot(-3)=-3n+28$ (단, $a_n\geq0$)

$-3n+28\geq0$에서 $n\leq\frac{28}{3}=9.\times\times\times$

즉, $n\leq9$일 때 $a_n\geq0$이고, $n\geq10$일 때 $a_n<0$이다.

한편, $a_9=1$이고 $a_{n+1}=|a_n|-3$의 n에 9, 10, 11, 12, $\cdots$을 차례로 대입하면

$a_{10}=|a_9|-3=1-3=-2$

$a_{11}=|a_{10}|-3=2-3=-1$

$a_{12}=|a_{11}|-3=1-3=-2$

$a_{13}=|a_{12}|-3=2-3=-1$

$\vdots$

따라서 $n\geq10$일 때 수열 $\{a_n\}$은 -2, -1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=10}^{50}a_k$ ($\sum_{k=10}^{50}a_k=a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{50}=-2+(-1)+(-2)+(-1)+\cdots+(-2)$, 41개)

$=\frac{9(25+1)}{2}+20\{-2+(-1)\}+(-2)$

$=117+(-60)+(-2)=55$ 답 ②

1467

유형 09 S_n이 포함된 수열의 귀납적 정의

|전략| $S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$임을 이용한다.

$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$(S_{n+2}-S_n)^2=4a_{n+2}a_{n+1}+9$에서

$(a_{n+2}+a_{n+1})^2=4a_{n+2}a_{n+1}+9$

$a_{n+2}^2+2a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2=4a_{n+2}a_{n+1}+9$

$a_{n+2}^2-2a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2=9$

$(a_{n+2}-a_{n+1})^2=9$

이때 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}>0$이므로

$a_{n+2}-a_{n+1}=3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ($a_1=1$, $a_2=4$에서 $a_2-a_1=3$, $n\geq2$일 때, $a_{n+1}-a_n=3$)

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$

$\therefore a_{10}=3\cdot10-2=28$ 답 ④

1468

유형 04 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴로 정의된 수열 + 09 S_n이 포함된 수열의 귀납적 정의

|전략| $f(n)=a_n$이라 놓고 $\sum_{k=1}^{n}f(k)=S_n$임을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$f(n)=a_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{n(n+1)}{2}f(n)$에서

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}a_n$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이므로

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}a_n$ ····· ㉠

$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}a_{n+1}$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면 $S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}a_{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}a_{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}a_n$

$(n+1)(n+2)a_{n+1}-2a_{n+1}=n(n+1)a_n$

$n(n+3)a_{n+1}=n(n+1)a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 24를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{2}{4}a_1$

$a_3=\frac{3}{5}a_2=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}a_1$

$a_4=\frac{4}{6}a_3=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}a_1$

$\vdots$

$a_{25}=\frac{25}{27}\cdot\frac{24}{26}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}a_1=\frac{3\cdot2}{27\cdot26}\cdot\underline{3}=\frac{1}{39}$ ($f(1)=3$이므로 $a_1=3$)

$\therefore f(25)=\frac{1}{39}$ 답 ⑤

1469

유형 10 수열의 귀납적 정의의 활용

|전략| a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

n개의 원이 그려진 평면에 조건에 알맞은 1개의 원을 추가하면 이 원은 기존의 n개의 원과 각각 두 점에서 만나므로 $2n$개의 새로운 교점이 생긴다.

즉, $(n+1)$개의 원에 의하여 만들어지는 교점은 n개의 원에 의하여 만들어지는 교점보다 $2n$개가 많으므로

$a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+4=a_1+2+4$

$a_4=a_3+6=a_1+2+4+6$

$\vdots$

$\therefore a_{10}=a_1+2+4+6+\cdots+18$

$=a_1+\sum_{k=1}^{9}2k=0+2\cdot\frac{9\cdot10}{2}=90$ 답 ③

1470

유형 11 수학적 귀납법

|전략| 주어진 조건에 의하여 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(3^a\cdot 4^b)$이 참임을 이용한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$p(1)$이 참이면 $p(3\cdot 1)$, $p(4\cdot 1)$이 참이다.

$p(3)$과 $p(4)$가 참이면 $p(3\cdot 3)$, $p(3\cdot 4)$, $p(4\cdot 4)$가 참이다.

⋮

즉, 주어진 조건에 의하여 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(3^a\cdot 4^b)$이 참이다.

① $p(60)=p(3\cdot 4\cdot 5)$

② $p(130)=p(2\cdot 5\cdot 13)$

③ $p(144)=p(3^2\cdot 4^2)$

④ $p(216)=p(2\cdot 3^3\cdot 4)$

⑤ $p(336)=p(3\cdot 4^2\cdot 7)$

따라서 반드시 참인 명제는 ③ $p(144)$이다. 답 ③

1471

유형 13 수학적 귀납법을 이용한 배수의 증명

|전략| $k(k^2+5)$가 6의 배수임을 이용하기 위해 $(k+1)\{(k+1)^2+5\}$를 적절히 변형한다.

(ii) $n=k$일 때, $n(n^2+5)$가 6의 배수라 가정하면

$k(k^2+5)=6N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$(k+1)\{(k+1)^2+5\}=k^3+3k^2+\boxed{\text{(가) } 8k+6}$

$=\boxed{\text{(나) } k^3+5k}+6+3k^2+3k$

$=6N+6+3k(k+1)$

$=\boxed{\text{(다) } 6}(N+1)+3k(k+1)$

이고, $3k(k+1)$이 $\boxed{\text{(다) } 6}$의 배수이므로 $n=k+1$일 때도 $n(n^2+5)$가 6의 배수이다. 답 ④

참고 $3k(k+1)$에서 $k(k+1)$은 연속하는 두 자연수의 곱이므로 2의 배수이다. 따라서 $3k(k+1)$은 6의 배수이다.

1472

유형 14 수학적 귀납법을 이용한 부등식의 증명

|전략| $n=k$ $(k\geq 4)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정한 다음 부등식의 양변에 2를 곱하여 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립함을 보인다.

(ii) $n=k$ $(k\geq 4)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2^k\geq k^2$ ····· ㉡

㉡의 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1}\geq 2k^2$

그런데 $k\geq 4$이면

$k^2-(2k+1)=\boxed{\text{(가) } (k-1)^2}-2>0$

이므로 $k^2>2k+1$

$\therefore 2^{k+1}\geq 2k^2$

$=k^2+k^2$

$>k^2+2k+1$

$=\boxed{\text{(나) } (k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다. 답 ④

1473

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴로 정의된 수열

|전략| 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$이 등비수열임을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$의 첫째항은 $a_2-a_1=1$ ··· ❶

즉, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_{n+1}-a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ ··· ❷

$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 8을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^0$

$a_3=a_2+2^1=a_1+2^0+2^1$

$a_4=a_3+2^2=a_1+2^0+2^1+2^2$

⋮

$\therefore a_9=a_1+2^0+2^1+2^2+\cdots+2^7$

$=a_1+\sum_{k=1}^{8}2^{k-1}$

$=2+\dfrac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}=257$ ··· ❸

답 257

채점 기준	배점
❶ 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다.	1점
❷ 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	2점
❸ a_9의 값을 구할 수 있다.	5점

1474

유형 09 S_n이 포함된 수열의 귀납적 정의

|전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용한다.

$S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{5}$에 $n=1$을 대입하면 $S_1=\dfrac{a_1a_2}{5}$

이때 $S_1=a_1$이므로 $a_2=5$

$S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{5}$ ····· ㉠, $S_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{5}$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면 $S_{n+1}-S_n=\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{5}-\dfrac{a_na_{n+1}}{5}$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{5}(a_{n+2}-a_n)$

$a_{n+2}-a_n=5$ ($\because a_{n+1}\neq 0$)

$\therefore a_{n+2}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ··· ❶

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$a_3=a_1+5=\dfrac{5}{2}+5=\dfrac{15}{2}$

$a_4=a_2+5=5+5=10$

$a_5=a_3+5=\dfrac{15}{2}+5=\dfrac{25}{2}$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{5}{2}$, 공차가 $\dfrac{5}{2}$인 등차수열이므로

$a_n=\dfrac{5}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}n$ ··· ❷

$\therefore a_8a_{15}=20\cdot\dfrac{75}{2}=750$ ··· ❸

답 750

채점 기준	배점
❶ a_n과 a_{n+2} 사이의 관계식을 찾을 수 있다.	3점
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	3점
❸ a_8a_{15}의 값을 구할 수 있다.	2점

다른 풀이 $a_{n+2}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_8=a_6+5=a_4+10=a_2+15=5+15=20$

$a_{15}=a_{13}+5=a_{11}+10=a_9+15=a_7+20$

$=a_5+25=a_3+30=a_1+35=\frac{5}{2}+35=\frac{75}{2}$

$\therefore a_8a_{15}=20\cdot\frac{75}{2}=750$

참고 $a_{n+1}=0$이라 가정하자.

$S_n=\frac{a_na_{n+1}}{5}$에서 $S_n=0$이므로 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$이다.

이때 $a_1>0$이므로 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$이려면 항의 값이 음수인 항이 적어도 하나 존재해야 한다.

첫 번째로 음수인 항을 a_i $(i\geq2)$라 하면 $a_i<0$

첫째항이 양수이고 첫 번째로 음수인 항이 a_i이므로 $S_{i-1}>0$

이때 $a_{i-1}\geq0$, $a_i<0$이므로 $S_{i-1}=\frac{a_{i-1}a_i}{5}\leq0$이 되어 모순이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}\neq0$이다.

1475

유형 12 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명

|전략| $n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보인 다음 $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때도 등식이 성립함을 보인다.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(1) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k+1}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	4점
(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때도 등식이 성립함을 보일 수 있다.	8점

창의·융합 실력 마스터

1476

|전략| 주어진 두 등식을 더하고 빼서 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$의 일반항을 구한다.

$a_{n+1}=3a_n+2b_n$ ····· ㉠

$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

즉, 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=3+2=5$이고 공비가 5인 등비수열이므로

$a_n+b_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$ ····· ㉢

㉠−㉡을 하면

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

즉, 수열 $\{a_n-b_n\}$은 첫째항이 $a_1-b_1=3-2=1$이고 공비가 1인 등비수열이므로

$a_n-b_n=1$ ····· ㉣

㉢+㉣을 하면

$2a_n=5^n+1 \quad \therefore a_n=\frac{5^n+1}{2}$

㉢−㉣을 하면

$2b_n=5^n-1 \quad \therefore b_n=\frac{5^n-1}{2}$

$\therefore a_{10}+b_{11}=\frac{5^{10}+1}{2}+\frac{5^{11}-1}{2}$

$=\frac{5^{10}(1+5)}{2}=3\cdot5^{10}$

답 $3\cdot5^{10}$

1477

|전략| $\overline{P_nP_{n+1}}=a_n$으로 놓고 S_n을 구한다.

$\overline{P_nP_{n+1}}=a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면

$\overline{P_{n+1}P_{n+2}}=\frac{n}{n+2}\overline{P_nP_{n+1}}$에서 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{3}a_1$

$a_3=\frac{2}{4}a_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$

$a_4=\frac{3}{5}a_3=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$

$\vdots$

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1=\frac{2}{n(n+1)}a_1$

이때 $a_1=\overline{P_1P_2}=1$이므로 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+1)}\cdot1=\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{50}S_k=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$

$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$

따라서 $p=51$, $q=50$이므로 $p+q=51+50=101$

답 101

1478

|전략| a_4의 값이 4의 배수일 때와 4의 배수가 아닐 때로 나눈다.

a_4의 값을 다음과 같이 나누어 구해 보자.

(i) $a_4=4k$ (k는 자연수)일 때

$a_5=\frac{1}{2}a_4+2\cdot4=2k+8$이므로 $50<4k+(2k+8)<60$에서

$42<6k<52$ $\therefore k=8$ ($\because k$는 자연수)

즉, $a_4=32$, $a_5=24$이고 $a_3=26$ 또는 $a_3=52$

이때 $a_3>a_5$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$a_3=26$인 경우 $a_2=22$ 또는 $a_2=44$이고

$a_2=22$인 경우 $a_1=40$

$a_2=44$인 경우 $a_1=42$ 또는 $a_1=84$

$a_3=52$인 경우 $a_2=96$이고 $a_1=94$ 또는 $a_1=188$

(ii) $a_4=4k-1$ (k는 자연수)일 때

$a_5=a_4+2\cdot4=4k+7$이므로 $50<(4k-1)+(4k+7)<60$에서

$44<8k<54$ $\therefore k=6$ ($\because k$는 자연수)

즉, $a_4=23$, $a_5=31$이고 $a_3=17$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a_4=4k-2$ (k는 자연수)일 때

$a_5=a_4+2\cdot4=4k+6$이므로 $50<(4k-2)+(4k+6)<60$에서

$46<8k<56$ $\therefore k=6$ ($\because k$는 자연수)

즉, $a_4=22$, $a_5=30$이고 $a_3=32$

$a_3=32$인 경우 $a_2=56$이고 $a_1=54$ 또는 $a_1=108$

(iv) $a_4=4k-3$ (k는 자연수)일 때

$a_5=a_4+2\cdot4=4k+5$이므로 $50<(4k-3)+(4k+5)<60$에서

$48<8k<58$ $\therefore k=7$ ($\because k$는 자연수)

즉, $a_4=25$, $a_5=33$이고 $a_3=19$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 a_1의 값은 40, 42, 54, 84, 94, 108, 188이다.

따라서 $M=188$, $m=40$이므로 $M+m=188+40=228$ 답 228

1479

|전략| $n\ge2$일 때, $\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$임을 이용한다.

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에 $n=1$을 대입하면 $a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$ $\therefore a_2=2$

$n\ge2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$a_{n+1}-a_n=\underline{\sum_{k=1}^{n}ka_k}-\underline{\sum_{k=1}^{n-1}ka_k}=na_n$

$\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$
$=\{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n\}$
$-\{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}\}$
$=na_n$

$\therefore a_{n+1}=(n+1)a_n$ $(n\ge2)$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, 30을 차례로 대입하면

$a_3=3a_2=3\cdot2=3!$

$a_4=4a_3=4\cdot3!=4!$

$a_5=5a_4=5\cdot4!=5!$

⋮

$a_{31}=31a_{30}=31\cdot30!=31!$

이때 $a_2=2$이므로 $a_2a_{31}=2\cdot31!$

따라서 $p=2$, $q=31$이므로 $p+q=2+31=33$ 답 33

1480

|전략| 주어진 과정을 따라가면서 빈칸에 알맞은 식을 추론한다.

$a_{n+1}=\frac{S_n^{\,2}}{S_{n-1}}+(2n-1)S_n$ $(n\ge2)$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n^{\,2}}{S_{n-1}}+(2n-1)S_n$

$\therefore S_{n+1}=\frac{S_n^{\,2}}{S_{n-1}}+2nS_n$ $(n\ge2)$ ……㉠

㉠의 양변을 S_n으로 나누면 (수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $S_n>0$)

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_n}{S_{n-1}}+2n$

$b_n=\frac{S_{n+1}}{S_n}$로 놓으면

$S_1=a_1=1$, $S_2=a_1+a_2=1+1=2$이므로

$b_1=\frac{S_2}{S_1}=\frac{2}{1}=2$, $b_n=b_{n-1}+2n$ $(n\ge2)$ ……㉡

㉡의 n에 2, 3, 4, …를 차례로 대입하면

$b_2=b_1+4$

$b_3=b_2+6=b_1+4+6$

$b_4=b_3+8=b_1+4+6+8$

⋮

$b_n=b_1+4+6+8+\cdots+2n$

$=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)$

$=2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}+2(n-1)$

$=n(n+1)$ $(n\ge2)$ ……㉢

이때 $b_1=2$는 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=\boxed{(가)\ n}\cdot(n+1)$

$b_n=\frac{S_{n+1}}{S_n}$에서

$S_{n+1}=b_nS_n$

$\therefore S_{n+1}=n(n+1)\cdot S_n$ ……㉣

㉣의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$S_2=1\cdot2S_1$

$S_3=2\cdot3S_2=1\cdot2^2\cdot3S_1$

$S_4=3\cdot4S_3=1\cdot2^2\cdot3^2\cdot4S_1$

⋮

$S_n=1\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot(n-1)^2\cdot n\cdot S_1$

$=1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot(n-1)^2\cdot n$ ($\because S_1=1$)

$=\{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)\}\cdot\{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)\}\cdot n$

$=\boxed{(가)\ n}\cdot\{(n-1)!\}^2$

따라서 $a_1=1$이고, $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n\{(n-1)!\}^2-(n-1)\{(n-2)!\}^2$

$=\{n(n-1)^2-(n-1)\}\cdot\{(n-2)!\}^2$

$=[(n-1)\{n(n-1)-1\}]\cdot\{(n-2)!\}^2$

$=\boxed{(나)\ (n-1)(n^2-n-1)}\cdot\{(n-2)!\}^2$

따라서 $f(n)=n$, $g(n)=(n-1)(n^2-n-1)$이므로

$f(10)+g(6)=10+(6-1)(6^2-6-1)$

$=10+145=155$ 답 155