이 책의

정답과 해설

미적분 I

Ⅰ 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한 002
2 함수의 연속 020

Ⅱ 미분

3 미분계수와 도함수 035
4 도함수의 활용 (1) 054
5 도함수의 활용 (2) 071
6 도함수의 활용 (3) 095

Ⅲ 적분

7 부정적분 113
8 정적분 131
9 정적분의 활용 152

1 함수의 극한

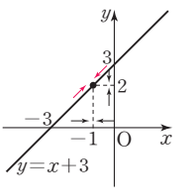
본책 8~23쪽

STEP 1 개념 마스터

0001

$f(x)=x+3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2$

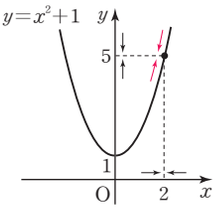


답 2

0002

$f(x)=x^2+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$

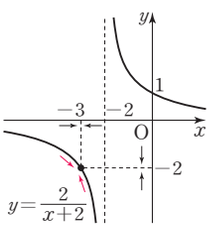


답 5

0003

$f(x)=\dfrac{2}{x+2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2}{x+2}=-2$

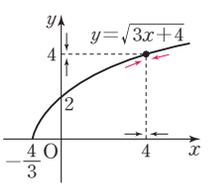


답 -2

0004

$f(x)=\sqrt{3x+4}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{3x+4}=4$



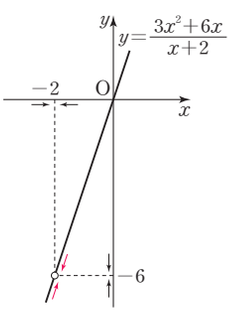
답 4

0005

$f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x+2}$라 하면 $x\neq -2$일 때,

$f(x)=\dfrac{3x(x+2)}{x+2}=3x$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -6에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+6x}{x+2}=-6$

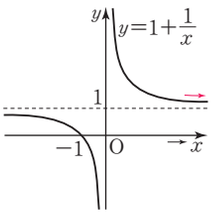


답 -6

0006

$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

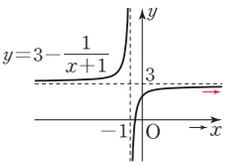


답 1

0007

$f(x)=3-\dfrac{1}{x+1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(3-\dfrac{1}{x+1}\right)=3$

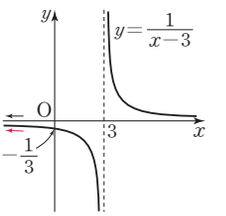


답 3

0008

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$

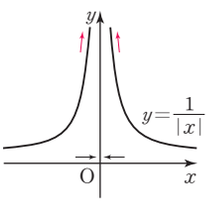


답 0

0009

$f(x)=\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

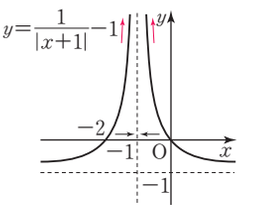


답 ∞

0010

$f(x)=\dfrac{1}{|x+1|}-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

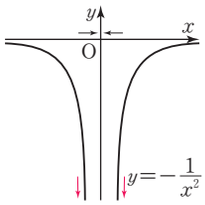
$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{|x+1|}-1\right)=\infty$



답 ∞

0011

$f(x)=-\frac{1}{x^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

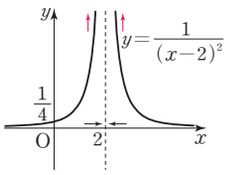


$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

답 $-\infty$

0012

$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

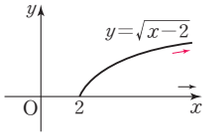


$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$

답 ∞

0013

$f(x)=\sqrt{x-2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

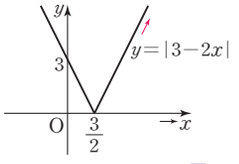


$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

답 ∞

0014

$f(x)=|3-2x|$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

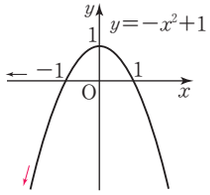


$\lim\limits_{x\to\infty}|3-2x|=\infty$

답 ∞

0015

$f(x)=-x^2+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

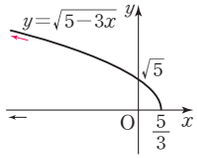


$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+1)=-\infty$

답 $-\infty$

0016

$f(x)=\sqrt{5-3x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5-3x}=\infty$

답 ∞

0017

(1) $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$

(2) $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$

(3) $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$

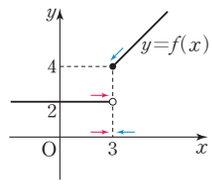
(5) $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=4$

(6) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 2 (5) 4 (6) 존재하지 않는다.

0018

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=4$

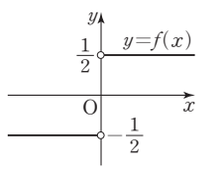
(2) $\lim\limits_{x\to3-}f(x)=2$

(3) $\lim\limits_{x\to3+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 4 (2) 2 (3) 존재하지 않는다.

0019

$f(x)=\frac{|x|}{2x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{|x|}{2x}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0-}\frac{|x|}{2x}=-\frac{1}{2}$, 즉

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{|x|}{2x}\neq\lim\limits_{x\to0-}\frac{|x|}{2x}$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{2x}$의 값은 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

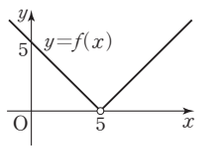
0020

$f(x)=\frac{x^2-10x+25}{|x-5|}$라 하면

$x>5$일 때, $f(x)=\frac{(x-5)^2}{x-5}=x-5$

$x<5$일 때, $f(x)=\frac{(x-5)^2}{-(x-5)}=-x+5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\lim\limits_{x\to5+}f(x)=\lim\limits_{x\to5-}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to5}f(x)=0$

답 0

0021

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1}f(x)+\lim\limits_{x\to1}g(x)$

$=2+(-3)=-1$

답 -1

0022

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1} f(x)\times\lim_{x\to1} g(x)$$
$$=2\times(-3)=-6$$ 답 -6

0023

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1} g(x)}{\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+1\}}$$
$$=\frac{-3}{2+1}=-1$$ 답 -1

0024

$$\lim_{x\to-1} x^2(x-4)=(-1)^2\times(-1-4)=-5$$ 답 -5

0025

$$\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x^2+1}=\frac{2+3}{2^2+1}=\frac{5}{5}=1$$ 답 1

0026

$$\lim_{x\to3}\frac{2x}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{2\times3}{\sqrt{3+1}+1}=\frac{6}{3}=2$$ 답 2

0027

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4-3x}{x}=\lim_{x\to0}(x^3-3)=-3$$ 답 -3

0028

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(2x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+1}$$
$$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

0029

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x-1)$$
$$=3-1=2$$ 답 2

0030

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{x-2}$$
$$=\frac{1+4}{1-2}=-5$$ 답 -5

0031

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$ 답 $\frac{1}{6}$

0032

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)$$
$$=2+2=4$$ 답 4

0033

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$ 답 0

0034

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{5x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$$ 답 $\frac{3}{5}$

0035

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x-1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=4$$ 답 4

0036

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2-x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$$ 답 2

0037

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+x}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x^2}}=\infty$$ 답 ∞

0038

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^3-2x)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)=-\infty$$ 답 $-\infty$

0039

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

답 0

0040

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 1

0041

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$$

답 1

0042

$$\lim_{x\to\infty}3x\left(1-\frac{x-1}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3x\times\frac{3}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{1+\frac{2}{x}}=9$$

답 9

0043

$\lim_{x\to-2}\frac{ax+b}{x+2}=2$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(ax+b)=-2a+b=0$ $\therefore b=2a$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{ax+2a}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{x+2}=a=2$$

$\therefore a=2, b=4$

답 $a=2, b=4$

0044

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-4$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4=5$$

$\therefore a=1, b=-6$

답 $a=1, b=-6$

0045

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=a+b=0$ $\therefore b=-a$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}=3$$

$\therefore a=6, b=-6$

답 $a=6, b=-6$

0046

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{a+2}=-1$$

$\therefore a=-3, b=2$

답 $a=-3, b=2$

0047

$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+a}+b}=1$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{a}+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{a}$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})=2\sqrt{a}=1$$

$\therefore a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{2}$

답 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{2}$

0048

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$에서 $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=8+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-8$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+ax-2a-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(2x+a+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{2x+a+4}=\frac{3}{a+8}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=1, b=-10$

답 $a=1, b=-10$

0049

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x \le f(x) \le 2x^2+1$이고

$\lim_{x\to 1}(x^2+2x)=3$, $\lim_{x\to 1}(2x^2+1)=3$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1} f(x)=3$ 답 3

0050

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=-1$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}=-1$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{2x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$이고

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=-1$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}=-1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

답 (1) −1 (2) −1 (3) −1

0051

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $1-\dfrac{1}{x}<f(x)<1+\dfrac{1}{x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ 답 1

STEP 2 유형 마스터

유형 01 그래프가 주어진 함수의 극한 개념 02

함수 $y=f(x)$의 그래프가 주어진 경우

⇨ x의 값의 변화에 따라 함숫값의 변화를 확인하여 극한값을 구한다.

(1) 우극한 ⇨ $x \to a+$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값

(2) 좌극한 ⇨ $x \to a-$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값

0052

$\lim_{x\to 1-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 3+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 3+} f(x)=3+1=4$ 답 ④

0053

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

또, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)=2+(-1)=1$ 답 1

0054

$\lim_{x\to -1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=-1+1=0$ 답 ③

0055

$-3<x<3$에서 $x\neq -2$, $x\neq -1$, $x\neq 1$, $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 서로 같으므로 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$인 경우의 극한값만 조사하면 된다.

$\lim_{x\to -2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to -2-} f(x)=0$이므로 $x=-2$일 때 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x\to -1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=2$이므로 $x=-1$일 때 조건을 만족시키지 않는다.

$\lim_{x\to 1+} f(x)=3$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$이므로 $x=1$일 때 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=3$이므로 $x=2$일 때 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1=-1$ 답 ②

유형 02 함수의 극한값의 존재 개념 02

우극한과 좌극한을 각각 구하였을 때

(1) 두 값이 같으면 ⇨ 극한값이 존재한다.

(2) 두 값이 다르거나 수렴하지 않으면 ⇨ 극한값이 존재하지 않는다.

0056

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}(\sqrt{x+1}-1)=0$, $\lim_{x\to 0-}(\sqrt{x+1}-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-1)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+1)=1$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-4x+1)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0057

① $\lim_{x\to -3+} f(x)=0$, $\lim_{x\to -3-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to -3} f(x)=0$

② $\lim_{x\to -2+} f(x)=4$, $\lim_{x\to -2-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to -2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

④ $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

⑤ $\lim_{x\to 3+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)=0$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ②이다. 답 ②

0058

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x+a)=1+a$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+3x)=4$

이때 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)$이어야 하므로

$1+a=4 \quad \therefore a=3$ 답 3

0059

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(-x^2+k^2)=k^2-4$ … ❶

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(x+k)=k+2$ … ❷

이때 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)$이어야 하므로 $k^2-4=k+2$에서 … ❸

$k^2-k-6=0,\ (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$ … ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to2+} f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\lim_{x\to2-} f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)$를 이용하여 k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 절댓값 기호를 포함한 함수의 극한 개념 02

(1) 함수 $f(x)$가 다항함수이면 ⇨ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(2) 절댓값 기호를 포함한 함수

⇨ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 함수의 식을 구한다.

0060

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|}$$
$$=\begin{cases} x-3 & (x>2) \\ -x+3 & (x<2) \end{cases}$$

이므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(x-3)=-1$

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+3)=1$

$\therefore \lim_{x\to2+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(x)=-1+1=0$ 답 ②

0061

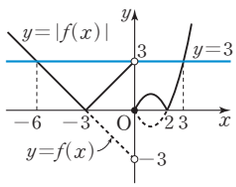
$a>3$이면 $\lim_{x\to3}|x-a|=\lim_{x\to3}\{-(x-a)\}$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{|x-a|-(a-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{-(x-a)-(a-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-x+a-a+3}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$$ 답 ②

0062

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶

따라서 $\lim_{x\to a-}|f(x)|=3$을 만족시키는 실수의 개수는 -6, 0, 3의 3이다. … ❷



답 3

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\|f(x)\|$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❷ 함수 $\|f(x)\|$의 좌극한이 3인 x의 개수를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이

(i) $a>0$일 때

$\lim_{x\to a-}|f(x)|=\lim_{x\to a-}|x^2-2x|=|a^2-2a|=3$

$a^2-2a=3$ 또는 $a^2-2a=-3$

$\therefore a^2-2a-3=0$ 또는 $a^2-2a+3=0$

이때 $a^2-2a+3=0$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

(ii) $a\le0$일 때

$\lim_{x\to a-}|f(x)|=\lim_{x\to a-}|-x-3|=|-a-3|=3$에서

$-a-3=3$ 또는 $-a-3=-3 \quad \therefore a=-6$ 또는 $a=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to a-}|f(x)|=3$을 만족시키는 실수 a의 개수는 -6, 0, 3의 3이다.

참고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

0063

ㄱ. $a>0$일 때, $\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}x$이므로 $a=b$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{|x|+b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x+a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$$

이때 $\lim_{x\to a+}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)=\infty$, $\lim_{x\to a-}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)=-\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $a<0$일 때, $\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}(-x)$이므로 $a=b$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{|x|+b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-x+a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{x-a}=-1$$

즉, 극한값이 존재한다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to0+}\frac{|x|+b}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x+b}{x}=\lim_{x\to0+}\left(1+\frac{b}{x}\right)$

$\lim_{x\to0-}\frac{|x|+b}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x+b}{x}=\lim_{x\to0-}\left(-1+\frac{b}{x}\right)$

$b>0$이면 $\lim_{x\to0+}\left(1+\frac{b}{x}\right)=\infty$, $\lim_{x\to0-}\left(-1+\frac{b}{x}\right)=-\infty$

$b=0$이면 $\lim_{x\to0+}\left(1+\frac{b}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to0-}\left(-1+\frac{b}{x}\right)=-1$

$b<0$이면 $\lim_{x\to0+}\left(1+\frac{b}{x}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to0-}\left(-1+\frac{b}{x}\right)=\infty$

즉, $a=0$일 때, 극한값이 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

발전 유형 04 가우스 기호를 포함한 함수의 극한 개념 02

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이므로 정수 n에 대하여
$n \le x < n+1$일 때, $[x]=n$
(1) $x \to n+$이면 $x>n$ ⇨ $\lim_{x\to n+}[x]=n$
(2) $x \to n-$이면 $x<n$ ⇨ $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

0064

① $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x}{[x]}=\frac{0}{-1}=0$$

② $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to 1.5}\frac{x}{[x]}=\frac{1.5}{1}=1.5$$

③ $0<x<1$일 때, $1<x+1<2$이므로 $[x+1]=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{[x+1]}{x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

④ $-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$

$$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{[x-1]}{x-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

⑤ $1<x<2$일 때, $0<x-1<1$이므로 $[x-1]=0$

$$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{[x-1]}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

따라서 그 값이 가장 큰 것은 ④이다. 답 ④

0065

$2<x<4$일 때, $1<\frac{x}{2}<2$이므로 $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]=1$

$$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)+\lim_{x\to 4-}f(x)=1+1=2$$

답 2

0066

$1<x<2$일 때, $-1<x-2<0$이므로 $[x-2]=-1$

$$\therefore \lim_{x\to 2-}[x-2]=-1$$

$2<x<3$일 때, $3<x+1<4$이므로 $[x+1]=3$

$$\therefore \lim_{x\to 2+}[x+1]=3$$

$$\therefore \lim_{x\to 2-}[x-2]+\lim_{x\to 2+}[x+1]=-1+3=2$$

답 ⑤

0067

$3<x<4$일 때, $[x]=3$이므로 $\lim_{x\to 3+}[x]=3$

$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}([x]^2-a[x])=3^2-3a=9-3a$$

$2<x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $\lim_{x\to 3-}[x]=2$

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}([x]^2-a[x])=2^2-2a=4-2a$$

이때 $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)$이어야 하므로

$9-3a=4-2a$ $\quad\therefore a=5$

답 ③

유형 05 합성함수의 극한 개념 02

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a+}g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 극한을 구한다.
(1) $x \to a+$일 때 $t \to b+$이면 ⇨ $\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b+}g(t)$
(2) $x \to a+$일 때 $t \to b-$이면 ⇨ $\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b-}g(t)$
(3) $x \to a+$일 때 $t=b$이면 ⇨ $\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

0068

$f(x)=t$라 하면 $x \to 0+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+}g(f(x))=\lim_{t\to 0+}g(t)=-2$$

또, $x \to 2-$일 때 $t=1$이므로

$$\lim_{x\to 2-}g(f(x))=g(1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}g(f(x))+\lim_{x\to 2-}g(f(x))=-2+1=-1$$

답 -1

0069

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x\ge 0)\\ 5 & (x<0)\end{cases}$$에서

$x-3=t$라 하면 $x \to 3+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 3+}f(x-3)=\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{t\to 0+}(-2t+3)=3$$

$2x=s$라 하면 $x \to 0-$일 때 $s \to 0-$이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(2x)=\lim_{s\to 0-}f(s)=\lim_{s\to 0-}5=5$$

$$\therefore \lim_{x\to 3+}f(x-3)+\lim_{x\to 0-}f(2x)=3+5=8$$

답 8

0070

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x \to 1-$일 때 $t=1$이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(f(x))=f(1)=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x \to 1+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(f(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0071

$g(x)=t$라 하면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0-$이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(g(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=1$$

$f(x)=s$라 하면 $x \to 1-$일 때 $s \to -1+$이므로

$$\lim_{x\to 1-}g(f(x))=\lim_{s\to -1+}g(s)=-1$$

또, $f(x)=s$라 하면 $x \to 1+$일 때 $s \to 1+$이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(f(x))=\lim_{s\to 1+}f(s)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-}f(g(x))+\lim_{x\to 1-}g(f(x))+\lim_{x\to 1+}f(f(x))$$
$$=1+(-1)+1=1$$

답 1

유형 06 함수의 극한에 대한 성질 개념 03

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$의 값이 존재할 때

(1) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$ (복호동순)

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$)

0072

$3f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=3f(x)-h(x)$이고

$\lim_{x\to\infty} h(x)=1$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3\{3f(x)-h(x)\}}{4f(x)+\{3f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7f(x)+3h(x)}{7f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+3\times\dfrac{h(x)}{f(x)}}{7-\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{-7}{7}=-1\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

답 -1

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)-g(x)\}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-g(x)}{f(x)}=0$$

즉, $\lim_{x\to\infty}\left\{3-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}=3-\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=3$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3\times\dfrac{g(x)}{f(x)}}{4+\dfrac{g(x)}{f(x)}}=\frac{2-3\times 3}{4+3}=-1$$

0073

$f(x)+2g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{2}$이고

$\lim_{x\to 1} h(x)=9$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-f(x)}{2}=\frac{9-3}{2}=3$$

답 ⑤

0074

$(2x+3)f(x)=g(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{g(x)}{2x+3}$이고

$\lim_{x\to -1} g(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to -1}(x^2+ax+1)f(x)=\lim_{x\to -1}\left\{(x^2+ax+1)\times\frac{g(x)}{2x+3}\right\}$$

$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{x^2+ax+1}{2x+3}g(x)\right\}$$

$$=(2-a)\times 3=24$$

$\therefore a=-6$

답 ④

다른 풀이

$$\lim_{x\to -1}(x^2+ax+1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left\{(2x+3)f(x)\times\frac{x^2+ax+1}{2x+3}\right\}$$

$=3\times(2-a)=6-3a$

즉, $6-3a=24$이므로 $a=-6$

0075

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{x-2}\times\frac{x^3-8}{g(x)}\times\frac{x-2}{x^3-8}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{x-2}\times\frac{x^3-8}{g(x)}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$

$$=6\times 4\times\frac{1}{12}=2$$

답 2

0076

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{\{f(x)\}^2+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}^2+2}$$

$$=\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

0077

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to\infty} f(x)-\lim_{x\to\infty} g(x)$$

$$=\alpha-\beta=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-2$, $\beta=-1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-g(x)}{f(x)+2g(x)-1}=\frac{-6-(-1)}{-2+(-2)-1}$$

$$=1$$

답 ⑤

0078

$x-3=t$라 하면 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로 … ❶

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=4 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+3x^2}{3f(x)-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\dfrac{f(x)}{x}+3x}{3\times\dfrac{f(x)}{x}-2x}$$

$$=\frac{8+0}{12-0}=\frac{2}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x-3=t$로 놓고 $x\to 3$일 때 t의 극한을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{x\to 0}\dfrac{2f(x)+3x^2}{3f(x)-2x^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0079

ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{h(x)+k(x)}{2}$

즉, $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}k(x)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)+k(x)}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 1)\\ 0 & (x<1)\end{cases}$이면 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=0$이지만 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$, $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$이면 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$이지만 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 유리식 개념 04

분모, 분자가 모두 다항식인 경우

⇨ 분모, 분자를 각각 인수분해한 다음 약분한다.

0080

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=11$$ 답 11

0081

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)}{(x+4)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+4}$$
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$ 답 ④

0082

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$에서 $c=0$

$f(-1)=4$에서

$-1+a-b=4$ $\therefore a-b=5$ …… ㉠

$f(1)=-2$에서

$1+a+b=-2$ $\therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-4$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-4x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2-4x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2+x-4)=-4$$ 답 ②

0083

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x^4-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2+1)(x+1)}{f(x)}=\frac{12}{f(1)}$$

즉, $\dfrac{12}{f(1)}=4$이므로 $f(1)=3$ 답 3

유형 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 무리식 개념 04

분모, 분자 중 무리식이 있는 경우

⇨ 근호가 있는 쪽을 유리화한 다음 약분한다.

0084

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x+2}=\frac{3}{2}$$ 답 ⑤

0085

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{8}$$ 답 $\frac{1}{8}$

0086

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x})}=1$$ 답 ③

0087

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=1$$ 답 ②

유형 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 개념 04

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$ (n은 자연수, c는 상수)임을 이용한다.

0088

$x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$ 답 $-\frac{1}{2}$

0089

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}}{5-\frac{1}{x^2}}=0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-x}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^2}}=3$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0090

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ($a\neq0$)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}\times\frac{f(x)}{x}}{1+\frac{2}{x}\times\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{2+0\times a}{1+0\times a}=2$$ 답 ④

다른 풀이 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$가 0이 아닌 값이므로

$f(x)$는 x에 대한 일차식이다.

따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+ax+b}{x^2+2(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{1+\frac{2a}{x}+\frac{2b}{x^2}}=2$$

0091

$x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$$

$$\therefore\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$$ … ❶

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{2f(-t)-1}{\sqrt{t^2-f(-t)}+f(-t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\times\frac{f(-t)}{t}-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}\times\frac{f(-t)}{t}}+\frac{f(-t)}{t}}$$

$$=\frac{2\times(-a)-0}{\sqrt{1-0\times(-a)}+(-a)}$$

$$=\frac{-2a}{1-a}$$ … ❷

즉, $\frac{-2a}{1-a}=3$이므로

$-2a=3-3a$ $\quad\therefore a=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$임을 알아낼 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)}$을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한 개념 04

(1) 다항식인 경우

⇨ 최고차항으로 묶는다.

(2) 무리식인 경우

⇨ 분모를 1로 보고 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0092

$x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+2}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+2}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+2}-t)(\sqrt{t^2+5t+2}+t)}{\sqrt{t^2+5t+2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+2}{\sqrt{t^2+5t+2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{2}{t^2}}+1}$$

$$=\frac{5}{2}$$ 답 ⑤

0093

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$=2$ 답 ④

0094

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}\right)=-1$$

답 ②

0095

$f(x)=a(x+1)^2+2=ax^2+2ax+a+2$이므로

$f(-x)=ax^2-2ax+a+2$

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-x)}\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-x)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(-x)}\}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(-x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2+2ax+a+2)-(ax^2-2ax+a+2)}{\sqrt{ax^2+2ax+a+2}+\sqrt{ax^2-2ax+a+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{ax^2+2ax+a+2}+\sqrt{ax^2-2ax+a+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{a+\frac{2a}{x}+\frac{a+2}{x^2}}+\sqrt{a-\frac{2a}{x}+\frac{a+2}{x^2}}}$$

$$=\frac{4a}{2\sqrt{a}}=2\sqrt{a}=8$$

$\therefore a=16$

답 ③

유형 11 $\infty\times 0$ 꼴의 극한 개념 04

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$ (c는 0이 아닌 상수) 꼴로 변형한다.

0096

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2(x+1)}=\frac{3}{4}$$

답 ④

0097

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}\times\frac{2-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}(2+\sqrt{x+1})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}\times\frac{-x+3}{4\sqrt{x+1}+2x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{4\sqrt{x+1}+2x+2}=-\frac{1}{16}$$

답 ⑤

0098

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\times\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\times\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0099

$$f\left(3+\frac{1}{x}\right)=\left(3+\frac{1}{x}\right)^2-\left(3+\frac{1}{x}\right)=6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$g\left(2-\frac{1}{x}\right)=3\left(2-\frac{1}{x}\right)=6-\frac{3}{x}$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(3+\frac{1}{x}\right)-g\left(2-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left\{6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(6-\frac{3}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(8+\frac{1}{x}\right)=8$$

답 ④

다른 풀이 $x=\frac{1}{t}$이라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(3+\frac{1}{x}\right)-g\left(2-\frac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\{f(3+t)-g(2-t)\}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\{t^2+5t+6-(6-3t)\}$$

$$=\lim_{t\to 0+}(t+8)=8$$

유형 12 극한값을 이용한 미정계수의 결정 개념 05

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때

(1) (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 ⇨ (분자) $\to 0$

(2) (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 ⇨ (분모) $\to 0$

0100

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=3$에서 $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+a+1}{x+1}=\frac{a+2}{2}=3$$

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로

$a-b=4-(-5)=9$

답 ⑤

0101

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-a}=b$에서 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-1)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+x-a)=1-a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(2x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{2}{3}=b$$

$\therefore a+b=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ 답 $\dfrac{5}{3}$

0102

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=\dfrac{1}{4}$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(a\sqrt{x+3}+b)=2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ ……㉠ … ❶

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=1, b=-2$이므로 … ❷

$ab=1\times(-2)=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0103

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{1-\sqrt{a-x^2}}=b$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to2}(1-\sqrt{a-x^2})=1-\sqrt{a-4}=0 \qquad \therefore a=5$

$a=5$를 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{1-\sqrt{5-x^2}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{5-x^2})}{(1-\sqrt{5-x^2})(1+\sqrt{5-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{5-x^2})}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1+\sqrt{5-x^2}}{x+2}=\frac{1}{2}=b$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+a}{2x^2-3x+2b}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{2x^2-3x+1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(2x-1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{2x-1}=-4$$ 답 ①

유형 13 극한값을 이용한 다항함수의 결정 개념 05

두 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha\neq0$인 실수)이면

⇨ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비는 α이다.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (β는 실수)일 때, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면

⇨ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

0104

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수임을 알 수 있다.

또, 조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=4(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(x+a)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x+a)}{x+3}=1+a=1$$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=4x(x-1)$이므로

$f(2)=4\times2\times1=8$ 답 8

0105

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

즉, $f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to0+}x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0+}(3+ax+bx^2)=3$ 답 3

0106

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-6x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수 ($f(x)-6x^2$은 일차 이하의 식이다.)

임을 알 수 있다.

또, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=6(x-1)(x+k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)(x+k)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}6(x+k)=6+6k=-2$$

$\therefore k=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $f(x)=6(x-1)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)=6x^2-14x+8$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-6x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-14x+8}{2x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-14+\dfrac{8}{x}}{2-\dfrac{3}{x}}=-7$$ 답 ③

0107

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to -1}f(x)=0 \quad \therefore f(-1)=0$

또, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=-3$에서 $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}f(x)=0 \quad \therefore f(-2)=0$

즉, $f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)라 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x+2)Q(x)=Q(-1)=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x+1)Q(x)=-Q(-2)=-3$$

$\therefore Q(-2)=3$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면 ㉠, ㉡에서

$-a+b=2$, $-2a+b=3$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

따라서 $Q(x)=-x+1$이므로 $g(x)=(x+1)(x+2)(-x+1)$

$\therefore g(2)=3\times 4\times(-1)=-12$ 답 -12

유형 14 함수의 극한의 대소 관계 개념 06

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ (α는 실수)이면

$\Rightarrow \lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

0108

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로

$2x^2-x-1<f(x)<2x^2+4x+1$

의 각 변을 x^2으로 나누면 ($x^2>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.)

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}<\frac{2x^2+4x+1}{x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1}=2$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ 답 2

0109

모든 실수 x에 대하여 $2x-5\le f(x)\le (x-2)^2$이고

$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$, $\lim_{x\to 3}(x-2)^2=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 3}f(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 3}(x^2-2)f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2-2)\times\lim_{x\to 3}f(x)$$
$$=7\times 1=7$$ 답 ②

0110

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x^3>0$이므로

$3ax^3+x^2+2<2x^3f(x)<3ax^3+x^2+3$

의 각 변을 $2x^3$으로 나누면

$$\frac{3ax^3+x^2+2}{2x^3}<f(x)<\frac{3ax^3+x^2+3}{2x^3} \quad \cdots ❶$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3ax^3+x^2+2}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3a+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{2}=\frac{3}{2}a,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3ax^3+x^2+3}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3a+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{2}=\frac{3}{2}a$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{3}{2}a$ ❷

$\frac{3}{2}a=3 \quad \therefore a=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ $\lim_{x\to\infty}f(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10%

0111

(i) $x\to 1+$일 때, $x-1>0$이므로

$2x^3-6x^2+4x\le f(x)\le x^4-2x^3+1$

의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}2x(x-2)=-2,$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x^3-x^2-x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x^3-x^2-x-1)=-2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

(ii) $x\to 1-$일 때, $x-1<0$이므로

$2x^3-6x^2+4x\le f(x)\le x^4-2x^3+1$

의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(x^3-x^2-x-1)=-2,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}=\lim_{x\to 1-}2x(x-2)=-2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$ 답 ①

발전 유형 15 함수의 극한의 활용 개념 04

구하는 선분의 길이, 점의 좌표 등을 식으로 나타낸 다음 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0112

직선 OP의 기울기가 $\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선 l의 기울기는 $m=-\sqrt{t}$이다.

이때

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$

이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-m^2)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+t}-t)(\sqrt{t^2+t}+t)}{\sqrt{t^2+t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

Lecture

두 직선이 서로 수직이다. $\Longleftrightarrow$ 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

0113

원의 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^4}$이므로 점 Q의 좌표는 $(0,\sqrt{t^2+t^4})$이다.

이때 점 H의 좌표가 $(0,t^2)$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=t$

$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{t^2+t^4}-t^2$

$$\therefore\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+t^4}-t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}=1$$

답 ②

0114

함수 $y=\left|4-\frac{1}{x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표는

$\left|4-\frac{1}{x}\right|=t$에서 $4-\frac{1}{x}=t$ 또는 $4-\frac{1}{x}=-t$

$\therefore x=\frac{1}{4-t}$ 또는 $x=\frac{1}{4+t}$

따라서

$$f(t)=\left|\frac{1}{4-t}-\frac{1}{4+t}\right|=\frac{1}{4-t}-\frac{1}{4+t}=\frac{2t}{(4-t)(4+t)}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{2}{(4-t)(4+t)}=\frac{1}{8}$$

답 ②

참고 $0<t<4$이므로 $\frac{1}{4-t}>\frac{1}{4+t}$

즉, 두 점 사이의 거리는

$f(t)=\left|\frac{1}{4-t}-\frac{1}{4+t}\right|=\frac{1}{4-t}-\frac{1}{4+t}$

STEP 3 내신 마스터

0115

유형 01 그래프가 주어진 함수의 극한

|전략| $x\to-2+$는 x가 -2보다 크면서 -2에 한없이 가까워지고, $x\to2-$는 x가 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지는 것을 의미한다.

$\lim_{x\to-2+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=-1+1=0$

답 ①

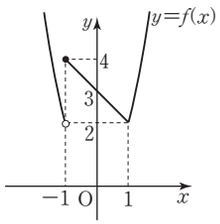
0116

유형 02 함수의 극한값의 존재

|전략| $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 같을 때, $x=a$에서의 극한값이 존재한다.

$f(x)=\begin{cases}2x^2 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -x+3 & (-1\le x\le1)\end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to-1+}f(x)=4$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(x)=3$

ㄷ. $\lim_{x\to1}f(x)=2$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0117

유형 05 합성함수의 극한

|전략| $x\to0+$, $x\to0-$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값을 먼저 구한다.

$f(x)=t$, $g(x)=s$라 하면

ㄱ. $x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

$x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$\therefore\lim_{x\to0}f(f(x))=0$ (참)

ㄴ. $x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=1$

$x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

$\therefore\lim_{x\to0}g(f(x))=1$ (참)

ㄷ. $x\to0$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{s\to0+}f(s)=-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

Lecture

합성함수의 극한

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $x\to a+$일 때

(1) $f(x)\to b+$이면 $\Rightarrow\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to b+}g(f(x))$

(2) $f(x)\to b-$이면 $\Rightarrow\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to b-}g(f(x))$

(3) $f(x)=b$이면 $\Rightarrow\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

0118

유형 06 함수의 극한에 대한 성질

|전략| $2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓고 $g(x)$를 $f(x), h(x)$로 나타낸 다음 주어진 식에 대입한다.

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\frac{2}{3}f(x)-\frac{1}{3}h(x)$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-\left\{\frac{2}{3}f(x)-\frac{1}{3}h(x)\right\}}{2f(x)+\left\{\frac{2}{3}f(x)-\frac{1}{3}h(x)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+h(x)}{8f(x)-h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{h(x)}{f(x)}}{8-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

답 ①

0119

유형 06 함수의 극한에 대한 성질

|전략| 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=6$이고 $\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}g(x)$$

$$=6-0=6 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$라 하면 $g(x)=\frac{f(x)}{h(x)}$이고 $\lim_{x\to1}h(x)=3$이다.

$$\therefore \lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{6}{3}=2 \text{ (참)}$$

ㄷ. [반례] $f(x)=(x-1)^2+6$, $g(x)=\begin{cases}2(x-1)^2+6 & (x\neq1)\\ 8 & (x=1)\end{cases}$

이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$\lim_{x\to1}g(x)=6$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0120

유형 01 그래프가 주어진 함수의 극한 + 06 함수의 극한에 대한 성질

|전략| ㄴ. 우극한과 좌극한을 각각 구하여 비교한다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=1$, $g(-1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to-1+}g(x)=g(-1) \text{ (참)}$$

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}g(x)$

$$=0\times1=0$$

$$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}g(x)$$

$$=1\times0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x) \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$

$f(-1)g(-1)=1\times1=1$

$$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)g(x)\neq f(-1)g(-1) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0121

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 유리식

+ 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 무리식

|전략| 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해한 다음 약분하고, 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}+\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)+\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$=3+2=5$$

답 ⑤

0122

유형 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

|전략| 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

$x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}+ax}{x+5}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-3t}-at}{-t+5}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{t}}-a}{-1+\frac{5}{t}}$$

$$=-(1-a)=2$$

$$\therefore a=3$$

답 ③

0123

유형 11 $\infty\times0$ 꼴의 극한

|전략| 임의의 실수 x에 대하여 $x-1\le[x]\le x$이므로 $[x]=x-h\ (0\le h<1)$임을 이용한다.

임의의 실수 x에 대하여 $x-1<[x]\le x$이므로

$0\le h<1$인 실수 h에 대하여 $\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-h$로 나타낼 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}x\left(\frac{1}{x}-h\right)=\lim_{x\to0}(1-xh)=1$$

답 ④

다른 풀이 (i) $x>0$일 때,

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$이므로 $x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\le x\times\frac{1}{x}$

이때

$$\lim_{x\to0+}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to0+}(1-x)=1,\ \lim_{x\to0+}\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0+}1=1$$

이므로 $\lim_{x\to0+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

(ii) $x<0$일 때, 같은 방법으로

$x\times\frac{1}{x}\le x\left[\frac{1}{x}\right]<x\left(\frac{1}{x}-1\right)$

이때

$$\lim_{x\to0-}\left(x\times\frac{1}{x}\right)=1,\ \lim_{x\to0-}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=1$$

이므로 $\lim_{x\to0-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

0124

유형 12 극한값을 이용한 미정계수의 결정

|전략| 극한값이 존재하고 (분모) → 0이면 (분자) → 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{x}=4$에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=b=0$

$b=0$을 주어진 등식에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+a)=a=4$

$\therefore a+b=4+0=4$ 답 ④

0125

유형 13 극한값을 이용한 다항함수의 결정

|전략| $\lim_{x\to\infty}\frac{(f\circ g)(x)}{f(x)}=1$에서 $f(x)$가 이차함수이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $(f\circ g)(x)$는 이차함수임을 이용한다.

조건 (가)에서 분모인 $f(x)$가 이차함수이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $(f\circ g)(x)$, 즉 $f(g(x))$는 이차함수임을 알 수 있다.

따라서 $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(f\circ g)(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax+b)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(ax+b)^2+5(ax+b)-3}{2x^2+5x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2x^2+a(4b+5)x+(2b^2+5b-3)}{2x^2+5x-3}$$
$$=a^2=1$$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{2x^2+5x-3}=-\frac{b}{3}=-2$

$\therefore b=6$

$\therefore g(x)=-x+6$ 또는 $g(x)=x+6$

이때 조건 (다)에서 $g(9)<0$이므로

$g(x)=-x+6$

$\therefore g(3)=-3+6=3$ 답 ④

0126

유형 14 함수의 극한의 대소 관계

|전략| 주어진 부등식을 변형하고 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$|f(x)-x^2+x|<2$에서

$-2<f(x)-x^2+x<2$

$\therefore x^2-x-2<f(x)<x^2-x+2$ ····· ㉠

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 ㉠의 각 변을 x^2+1로 나누면

$\frac{x^2-x-2}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$ 답 ①

0127

유형 15 함수의 극한의 활용

|전략| 점 H의 좌표를 구하여 두 선분 AH, PH의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타낸다.

점 H는 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발이므로 H$(x, 2)$

$\overline{AH}=x-2$

$\overline{PH}=\overline{PQ}-\overline{HQ}=\sqrt{2x}-2$

$$\therefore \lim_{x\to 2+}\frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$ 답 ③

0128

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 유리식

+ 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

|전략| a의 값은 주어진 식을 통분하여 구하고, b의 값은 $x=-t$로 놓고 주어진 식을 변형하여 구한다.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{1-x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

$\therefore a=1$ ··· ❶

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=b$에서

$x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

$\therefore b=2$ ··· ❷

$\therefore a+2b=1+4=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	1점

0129

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

|전략| 분모를 1로 보고 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 3)$이므로

$f(x)=p(x-a)^2+3\ (p>0)$이라 하면 … ❶

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-2x\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{p(x-a)^2+3}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{p(x-a)^2+3-4x^2}{\sqrt{p(x-a)^2+3}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(p-4)x^2-2apx+a^2p+3}{\sqrt{px^2-2apx+a^2p+3}+2x}$$

이때 극한값이 존재하므로 (분모와 분자의 차수가 같아야 한다.)

$p-4=0 \quad \therefore p=4$ … ❷

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8ax+4a^2+3}{\sqrt{4x^2-8ax+4a^2+3}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8a+\frac{4a^2+3}{x}}{\sqrt{4-\frac{8a}{x}+\frac{4a^2+3}{x^2}}+2}$$

$$=-2a=10$$

$\therefore a=-5$ … ❸

따라서 $f(x)=4(x+5)^2+3$이므로

$f(a+3)=f(-2)=36+3=39$ … ❹

답 39

채점 기준	배점
❶ $f(x)$의 식을 세울 수 있다.	1점
❷ $\infty-\infty$ 꼴의 식을 변형하여 극한값이 존재할 조건을 구할 수 있다.	3점
❸ 극한값을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ $f(a+3)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0130

유형 13 극한값을 이용한 다항함수의 결정

|전략| 두 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a\ (a\neq0$인 실수$)$이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2+5x+1}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다. … ❶

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=6$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \quad \therefore f(1)=0$ … ❷

즉, $f(x)=3(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+a)}{x-2}=-3a-3=6$$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x-3)$이므로

$f(-1)=3\times(-2)\times(-4)=24$ … ❸

답 24

채점 기준	배점
❶ $f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.	2점
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0131

유형 02 함수의 극한값의 존재 + 04 가우스 기호를 포함한 함수의 극한

|전략| 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

(1) $n<x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\frac{n^2+n}{2n}=\frac{n+1}{2}\ (\because n\neq0)$$

(2) $n-1<x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\frac{(n-1)^2+n}{2(n-1)}=\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}$$

(3) $\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$에서

$\frac{n+1}{2}=\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}$, $n^2-1=n^2-n+1$

$\therefore n=2$

답 (1) $\frac{n+1}{2}$ (2) $\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}$ (3) 2

채점 기준	배점
(1) $\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(3) 정수 n의 값을 구할 수 있다.	2점

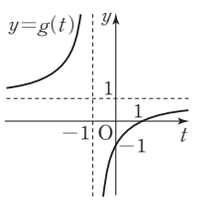
0132

유형 05 합성함수의 극한

|전략| 두 함수 $y=\frac{t-1}{t+1}$, $y=\frac{4t-1}{t+1}$의 그래프를 이용하여 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$, $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 각각 구한다.

(1) $g(t)=\frac{t-1}{t+1}=-\frac{2}{t+1}+1$

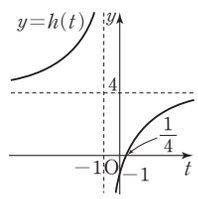
이라 하면 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\to\infty$일 때 $g(t)\to1-$이다.



$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{g(t)\to1-}f(g(t))=2$

(2) $h(t)=\frac{4t-1}{t+1}=-\frac{5}{t+1}+4$

라 하면 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\to-\infty$일 때 $h(t)\to4+$이다.



$\therefore \lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{h(t)\to4+}f(h(t))=3$

(3) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 5

채점 기준	배점
(1) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	5점
(2) $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

0133

|전략| x의 값의 범위를 나누어 $g(x)$의 값을 구한다.

$-2<x<0$, $0<x<2$일 때, $0<f(x)<1$이므로

$g(x)=[f(x)]=0$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)=0$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$, $g(0)=[f(0)]=[1]=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}g(x)\neq g(0)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0134

|전략| $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x+2)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)$임을 이용한다.

모든 실수 t에 대하여 $\lim\limits_{x\to t}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값도 존재한다.

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^3+ax^2+b)=b$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x+2)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(3-x^2)=-1$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)$이므로 $b=-1$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(3-x^2)=2$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^3+ax^2+b)=1+a+b$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 $2=1+a+b$

위의 식에 $b=-1$을 대입하면

$2=1+a-1$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-1 & (0\le x\le1)\\ 3-x^2 & (1<x<2)\end{cases}$이므로

$f(ab)=f(-2)=f(0)=-1$ 답 ③

0135

|전략| $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

(i) $x>1$일 때

$\max(x,1)=x$이므로 $f(x)=x^3-x$

(ii) $x=1$일 때

$f(1)=1+1-2=0$

(iii) $0<x<1$일 때

$\max(x,1)=1$이므로 $f(x)=x^3-2x+1$

(i)~(iii)에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-2x+1}{x-1}+\lim_{x\to1+}\frac{x^3-x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1}+\lim_{x\to1+}\frac{x(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x-1)+\lim_{x\to1+}x(x+1)$$

$=1+2=3$ 답 ②

0136

|전략| $\frac{1}{x}=t$로 놓고 식을 변형한 다음 두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=a$ ($a\neq0$인 실수)이면 $g(x)$, $h(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

조건 (가)에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-5}{x^4+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3f(t)-5}{\left(\frac{1}{t}\right)^4+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{tf(t)-5t^4}{t^3+1}$$

즉, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{tf(t)-5t^4}{t^3+1}=2$에서 $tf(t)-5t^4$은 최고차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다.

따라서 $tf(t)-5t^4=2t^3+at^2+bt+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(t)$는 다항함수이므로 $c=0$

$tf(t)=5t^4+2t^3+at^2+bt$ $\therefore f(t)=5t^3+2t^2+at+b$

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=-5$이고 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$ $\therefore f(-1)=0$

즉, $-5+2-a+b=0$이므로 $b=a+3$ ……㉠

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{5x^3+2x^2+ax+a+3}{x^2-x-2}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(5x^2-3x+a+3)}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{5x^2-3x+a+3}{x-2}$$

$$=\frac{a+11}{-3}=-5$$

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=7$

따라서 $f(x)=5x^3+2x^2+4x+7$이므로

$f(1)=5+2+4+7=18$ 답 ④

0137

|전략| 직각삼각형 RQB′과 점 R에서 변 BC에 수선의 발을 내려 만들어지는 직각삼각형을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$ 사이의 관계식을 세운다.

직각삼각형 APR에서

$\overline{PR}^2=x^2+\{g(x)\}^2$

직각삼각형 RQB′에서

$\overline{RQ}^2=\overline{RB'}^2+\overline{B'Q}^2$

$=\overline{PR}^2+\overline{BQ}^2$

$=x^2+\{g(x)\}^2+\{f(x)\}^2$ …… ㉡

점 R에서 변 BC에 내린 수선의 발을 R′이라 하면 직각삼각형 RR′Q에서

$\overline{RQ}^2=\overline{RR'}^2+\overline{R'Q}^2=2^2+\{f(x)-g(x)\}^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$x^2+\{g(x)\}^2+\{f(x)\}^2=2^2+\{f(x)-g(x)\}^2$

$\therefore f(x)g(x)=\frac{4-x^2}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{2}{3}-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}-}\frac{4-x^2}{2}=\frac{16}{9}$ 답 ③

2 함수의 연속

본책 26~39쪽

STEP 1 개념 마스터

0138
$x=2$에서의 함숫값 $f(2)$가 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $f(2)$가 정의되어 있지 않다.

0139
$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=1$ $\therefore \lim\limits_{x\to 2+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2-} f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

0140
$f(2)=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$
따라서 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

0141
$f(1)=3$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0142
$x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0143 답 $[-2, 1]$

0144 답 $(3, 5)$

0145 답 $[-4, -2)$

0146 답 $(-1, 7]$

0147 답 $(-\infty, 3]$

0148 답 $(2, \infty)$

0149
함수 $f(x)=x^2-2x+2$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0150
함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$의 정의역은 $x-3\neq 0$, 즉 $x\neq 3$인 실수의 집합이므로 $(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$이다. 답 $(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$

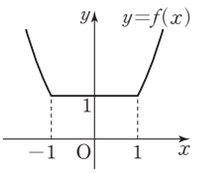
0151
함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $x-2\geq 0$, 즉 $x\geq 2$인 실수의 집합이므로 $[2, \infty)$이다. 답 $[2, \infty)$

0152
함수 $f(x)=x^2+3x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0153
함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$는 $x-2\neq 0$, 즉 $x\neq 2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$이다. 답 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

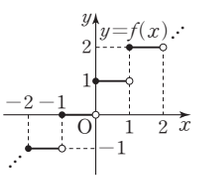
0154
함수 $f(x)=-\sqrt{x+4}$는 $x+4\geq 0$, 즉 $x\geq -4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $[-4, \infty)$이다. 답 $[-4, \infty)$

0155
함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|\geq 1) \\ 1 & (|x|<1) \end{cases}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.



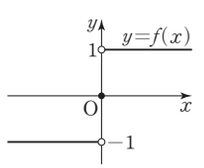
답 풀이 참조

0156
함수 $f(x)=[x]+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정수 n에 대하여
$\lim\limits_{x\to n+} f(x)=n+1$, $\lim\limits_{x\to n-} f(x)=n$
$\therefore \lim\limits_{x\to n+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to n-} f(x)$



따라서 정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to n} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=n$ (n은 정수)에서 불연속이고 $x\neq n$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속이다. 답 풀이 참조

0157
함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 $x\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.



답 풀이 참조

0158
$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\geq 1) \\ -3 & (x<1) \end{cases}$이 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
$f(1)=2+a$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x+a)=2+a$
$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-3)=-3$
이므로 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서
$2+a=-3$ $\therefore a=-5$ 답 -5

0159

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & (x\geq -2)\\ ax(x+3) & (x<-2)\end{cases}$이 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

$f(-2)=\sqrt{-2+3}=1$

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}\sqrt{x+3}=1$

$\lim\limits_{x\to -2-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-} ax(x+3)=-2a$

이므로 $\lim\limits_{x\to -2+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-} f(x)=f(-2)$에서

$1=-2a \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0160

ㄹ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㅂ. 함수 $\frac{1}{f(x)+g(x)}$은 $f(x)+g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

따라서 실수 전체의 집합에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

0161

함수 $f(x)=(x-2)(2x^2+x-3)$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0162

함수 $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$은 유리함수이고 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0163

함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-5}$은 유리함수이므로 $x^2+4x-5\neq 0$, 즉 $(x+5)(x-1)\neq 0$에서 $x\neq -5$이고 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$, $(1, \infty)$이다.

답 $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$, $(1, \infty)$

0164

(1) $f(x)+g(x)=(2x^2-1)+(x+1)=2x^2+x$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(2) $f(x)g(x)=(2x^2-1)(x+1)=2x^3+2x^2-x-1$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(3) 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^2-1}{x+1}$은 유리함수이므로 $x+1\neq 0$, 즉 $x\neq -1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

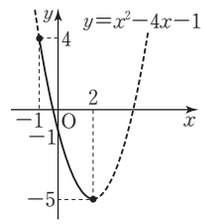
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

0165 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: 0 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

0166

함수 $f(x)=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

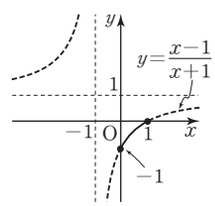


따라서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=2$일 때 최솟값 -5를 갖는다.

답 최댓값: 4, 최솟값: -5

0167

함수 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=-\frac{2}{x+1}+1$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -1

0168 답 (가) 연속 (나) $\neq$ (다) 사잇값 정리

0169

함수 $f(x)=x^4+2x$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$f(0)=0<1$, $f(1)=3>1$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=1$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. 답 풀이 참조

0170 답 (가) 연속 (나) 103 (다) $(0, 5)$

0171

$f(x)=x^3+2x^2-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3+2x^2-1=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

0172

$f(x)=x^4+x^3-6x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=8>0, f(1)=-2<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^4+x^3-6x+2=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터

유형 01 함수의 연속과 불연속 개념 01~03

(1) 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시키면 $x=a$에서 연속이다.

(i) $f(a)$가 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다. ⇨ $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(2) 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

0173

ㄱ. $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(1)=4$, $\lim_{x\to 1} f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $1\le x<2$에서 $f(x)=1$, $0\le x<1$에서 $f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x)\neq\lim_{x\to 1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x-1}=1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x)\neq\lim_{x\to 1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 불연속인 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0174

① $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$

② $x=0$에서의 함숫값 $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ 함수 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$의 정의역은 $x\neq 0$인 실수의 집합이므로 $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$이다.

④ $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+2)=2$

즉, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재한다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $f(0)=2$로 정의하면 $\lim_{x\to 0} f(x)=2$이고 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속함수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0175

$f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{x^2-1}}=\dfrac{x^2-1}{x^3-2x}$

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x^2-1=0$, $\underbrace{x^3-2x=0}_{x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0}$이 되는 x의 값에서 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 $-\sqrt{2}$, -1, 0, 1, $\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 x의 개수는 5이다. 답 ④

참고 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 유리함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

0176

(i) $0<x<\frac{1}{6}$일 때, $0<6x<1$이므로 $[6x]=0$, 즉 $f(x)=0$

(ii) $\frac{1}{6}\le x<\frac{1}{3}$일 때, $1\le 6x<2$이므로 $[6x]=1$, 즉 $f(x)=1$

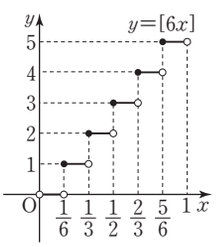
(iii) $\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $2\le 6x<3$이므로 $[6x]=2$, 즉 $f(x)=2$

(iv) $\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}$일 때, $3\le 6x<4$이므로 $[6x]=3$, 즉 $f(x)=3$

(v) $\frac{2}{3}\le x<\frac{5}{6}$일 때, $4\le 6x<5$이므로 $[6x]=4$, 즉 $f(x)=4$

(vi) $\frac{5}{6}\le x<1$일 때, $5\le 6x<6$이므로 $[6x]=5$, 즉 $f(x)=5$

(i)~(vi)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$이므로 모든 x의 값의 합은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{5}{2}$

답 ②

Lecture

가우스 기호를 포함한 함수의 연속

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이므로 정수 n에 대하여

$n\le x<n+1$이면 $[x]=n$, $n-1\le x<n$이면 $[x]=n-1$

즉, $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$이므로 $x=n$에서 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $[f(x)]$의 연속은 $f(x)$가 정수가 되는 x의 값을 기준으로 경우를 나눠 풀어야 한다.

0177

$f(x)=4x^2-1, g(x)=\begin{cases}5 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -5 & (x<0)\end{cases}$에서

$g(f(x))=\begin{cases}5 & (f(x)>0)\\ 0 & (f(x)=0)\\ -5 & (f(x)<0)\end{cases}=\begin{cases}5 & (4x^2-1>0)\\ 0 & (4x^2-1=0)\\ -5 & (4x^2-1<0)\end{cases}$ … ❶

함수 $g(f(x))$는 $4x^2-1=0$인 x에서 불연속이다. … ❷

즉, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$에서 불연속이므로 구하는 모든 x의 값의 곱은

$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ … ❸

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 합성함수 $g(f(x))$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(f(x))$가 불연속이 되는 상황을 추론할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0178

함수 $y=x^2-ax+2$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 교점의 개수는 방정식 $x^2-ax+2=x+a$, 즉 $x^2-(a+1)x+2-a=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이차방정식 $x^2-(a+1)x+2-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4(2-a)=a^2+6a-7=(a+7)(a-1)$

$D>0$, 즉 $a<-7$ 또는 $a>1$이면 $f(a)=2$

$D=0$, 즉 $a=-7$ 또는 $a=1$이면 $f(a)=1$

$D<0$, 즉 $-7<a<1$이면 $f(a)=0$

$\therefore f(a)=\begin{cases}2 & (a<-7 \text{ 또는 } a>1)\\ 1 & (a=-7 \text{ 또는 } a=1)\\ 0 & (-7<a<1)\end{cases}$

ㄱ. $f(0)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{a\to1+}f(a)=2$, $\lim_{a\to1-}f(a)=0$이므로

$\lim_{a\to1+}f(a)>\lim_{a\to1-}f(a)$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(a)$는 $a=-7$, $a=1$에서 불연속이므로 모든 a의 값의 곱은 -7이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 02 함수의 그래프와 연속 개념 01~03

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면

⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

0179

ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값의 개수는 4이다. (거짓)

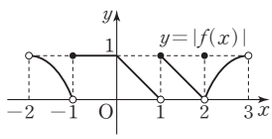
ㄷ. $|f(0)|=|-1|=1$, $\lim_{x\to0+}|f(x)|=1$, $\lim_{x\to0-}|f(x)|=1$

즉, $|f(0)|=\lim_{x\to0}|f(x)|=1$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

한편, 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

참고 ㄷ. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



0180

(i) $f(-2)=0$, $\lim_{x\to-2}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)\neq f(-2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(iii) $f(0)=-1$, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은

$x=-2$, $x=-1$, $x=0$이므로 $a=3$

또, 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1$이므로

$b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$ 답 ②

0181

$h(x)=f(x)+g(x)$라 하면

$\lim_{x\to2+}f(x)=5$, $\lim_{x\to2-}f(x)=3$, $f(2)=1$이므로

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}=5+a$

$\lim_{x\to2-}h(x)=\lim_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}=3+b$

$h(2)=f(2)+g(2)=1+2=3$ … ❶

이때 함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2-}h(x)=h(2)$ … ❷

$5+a=3+b=3$ $\therefore a=-2, b=0$

$\therefore a+b=-2+0=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $h(x)=f(x)+g(x)$의 우극한, 좌극한, 함숫값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 연속의 정의를 이용하여 등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 합성함수의 연속과 불연속 개념 01~03

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면
⇨ $\lim_{x\to a+} f(g(x))=\lim_{x\to a-} f(g(x))=f(g(a))$

0182

ㄱ. $f(-1)=1, f(1)=0$이므로 $f(f(-1))=f(1)=0$ (참)

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x\to 2+$일 때 $t\to -1-$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(f(x))=\lim_{t\to -1-} f(t)=0$

$x\to 2-$일 때 $t\to -1+$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(f(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(f(x))=0$ (참)

ㄷ. $f(f(2))=f(-1)=1$이므로 $\lim_{x\to 2} f(f(x))\neq f(f(2))$

즉, 함수 $f(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0183

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 보기에 주어진 함수 $g(x)$는 모두 $-2\le x\le 2$에서 연속이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=t$라 하면 $x\to 0+$일 때 $t\to -1+$이고

$x\to 0-$일 때 $t\to 1-$이다.

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=1$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=1$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(0)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=0$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=0$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=-1$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)$

즉, $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속인 것은 ㄴ이다. 답 ②

참고 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $g(x)$가 $x=f(a)$에서 불연속이면 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

유형 04 함수가 연속일 조건 (1) 개념 01~03

두 함수 $g(x), h(x)$가 연속함수일 때,

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면

⇨ $\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} h(x)=f(a)$

0184

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+}(ax-1)=\lim_{x\to 1-}(x^2+bx)=f(1)$

$a-1=1+b \quad \therefore a-b=2$ 답 2

0185

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a+} x^2=\lim_{x\to a-}(2x+3)=f(a)$

$a^2=2a+3, a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ③

0186

$f(0)=1$이므로 $-b=1 \quad \therefore b=-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1, x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}(x^2+1)=\lim_{x\to -1-}(x+c)=f(-1)$

$1+1=-1+c \quad \therefore c=3$

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}(ax+1)=\lim_{x\to 2-}(x^2+1)=f(2)$

$2a+1=4+1 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b+c=2+(-1)+3=4$ 답 ④

0187

$f(x)=\begin{cases} ax+b & (|x|\ge 1) \\ x^2+x+2 & (|x|<1) \end{cases}=\begin{cases} ax+b & (x\ge 1) \\ x^2+x+2 & (-1<x<1) \\ ax+b & (x\le -1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1, x=1$에서 연속이어야 한다. … ❶

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1+}(x^2+x+2)=\lim_{x\to -1-}(ax+b)=f(-1)$

$1-1+2=-a+b \quad \therefore a-b=-2$ ……㉠ … ❷

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1+}(ax+b)=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+2)=f(1)$

$a+b=1+1+2 \quad \therefore a+b=4$ ……㉡ … ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$ … ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 식을 정리하여 연속성을 파악할 수 있다.	20 %
❷ $x=-1$에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x=1$에서 연속일 조건을 구할 수 있다	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0188

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to1-}3x=f(1)$

$1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2$ ……㉠

또, $f(x)=f(x+4)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=f(4)$

즉, $0=16+4a+b$이므로 $4a+b=-16$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=8$

따라서 $1\le x\le4$일 때, $f(x)=x^2-6x+8$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=4-12+8=0$ 답 ②

Lecture

주기함수

함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 실수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고 이러한 실수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라 한다.

0189

$n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$, $n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$\lim_{x\to n+}f(x)=\frac{n^2-3n}{n}=n-3\ (\because\ n\neq0)$

$\lim_{x\to n-}f(x)=\frac{(n-1)^2-3n}{n-1}=\frac{n^2-5n+1}{n-1}$

$f(n)=\frac{n^2-3n}{n}=n-3\ (\because\ n\neq0)$

함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

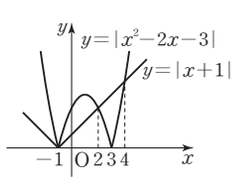
$n-3=\frac{n^2-5n+1}{n-1}$, $n^2-4n+3=n^2-5n+1$

$\therefore n=-2$ 답 ②

0190

함수 $|f(x)|=\begin{cases}|x^2-2x-3| & (x>a)\\ |x+1| & (x\le a)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 a의 값은 두 함수 $y=|x^2-2x-3|$, $y=|x+1|$의 그래프의 교점의 x좌표이어야 한다.

두 함수 $y=|x^2-2x-3|$, $y=|x+1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x^2-2x-3=x+1$에서

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$-(x^2-2x-3)=x+1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 a의 값은 -1, 2, 4이므로 그 합은

$-1+2+4=5$ 답 ③

유형 05 함수가 연속일 조건 (2) 개념 01-03

(1) 함수 $g(x)$가 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속일 때,

함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면

⇨ $\lim_{x\to a}g(x)=k$

(2) 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때

① (분모) → 0이고 극한값이 존재하면 (분자) → 0이다.

② (분자) → 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) → 0이다.

0191

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2-ax-2)=0$

$1-a-2=0 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)=3=b$

$\therefore a+b=-1+3=2$ 답 2

0192

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+a}{x+1}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}(x^3+a)=0$

$-1+a=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3=b$

$\therefore a-b=1-3=-2$ 답 ①

0193

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}+a}{x^2}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to0}x^2=0$이므로 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+4}+a)=0$

$2+a=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}=b$

$\therefore ab=-2\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0194

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}=\dfrac{1}{4}$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}-b)=0$

$\sqrt{1+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{1+a}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2\sqrt{1+a}}=\frac{1}{4}$$

$\sqrt{1+a}=2,\ 1+a=4 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$ 답 ③

유형 06 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속 개념 01~03

연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면

⇨ $f(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{x-a}$

0195

$(x-1)f(x)=x^2-3x+a$에서

$x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}=f(1)$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=0$

$1-3+a=0 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$ 답 -1

0196

$(x^2-1)f(x)=x^3+3x^2-x-3$에서

$(x+1)(x-1)f(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$

$x\neq-1$이고 $x\neq1$일 때, $f(x)=x+3$

함수 $f(x)$가 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1),\ \lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\therefore f(-1)f(1)=\lim_{x\to-1} f(x)\times\lim_{x\to1} f(x)$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+3)\times\lim_{x\to1}(x+3)$$
$$=2\times4=8$$ 답 ④

0197

$(x^2-5x+4)f(x)=x+2-3\sqrt{x}$에서

$(x-1)(x-4)f(x)=x+2-3\sqrt{x}$

$x\neq1$이고 $x\neq4$일 때, $f(x)=\dfrac{x+2-3\sqrt{x}}{(x-1)(x-4)}$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4} f(x)=f(4)$

$$\therefore f(4)=\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x+2-3\sqrt{x}}{(x-1)(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$$ 답 $\dfrac{1}{12}$

0198

$(x-2)f(x)=a\sqrt{x}+b$에서

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=f(2)$ ……㉠ … ❶

㉠에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=0$

$a\sqrt{2}+b=0 \quad \therefore b=-a\sqrt{2}$ ……㉡ … ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}-a\sqrt{2}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}=1$$

$\therefore a=2\sqrt{2}$

$a=2\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $b=-4$ … ❸

$\therefore a^2+b^2=8+16=24$ … ❹

답 24

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 07 연속함수의 성질 개념 04

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

⇨ $cf(x)$(c는 상수), $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq0)$도 $x=a$에서 연속이다.

0199

ㄱ. $f(x),\ 3g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)+3g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(f(a))$ 이어야 한다.
즉, 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이라는 조건이 필요하다.

ㄷ. $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2=g(x)\times g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $g(a)=0$이면 함수 $\frac{1}{2g(x)}$은 $x=a$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)-\frac{1}{2g(x)}$이 $x=a$에서 연속이려면 $g(a)\neq 0$이라는 조건이 필요하다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0200

①, ②, ③ $3f(x)=3x$, $f(x)+g(x)=x^2+x+1$, $f(x)g(x)=x^3+x$는 모두 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x^2+1}$에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+1}{x}$은 $x=0$일 때 분모가 0이다.
즉, $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속함수라 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0201

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\{f(x)+g(x)\}-f(x)=g(x)$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

유형 08 $f(x)g(x)$ 꼴의 함수의 연속 개념 04

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면
⇨ $\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)g(a)$

0202

$f(x)g(x)=\begin{cases}(x-4)(x^2-2) & (x\geq a)\\ (x-4)(4x+10) & (x<a)\end{cases}$이 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}(x-4)(x^2-2)=\lim_{x\to a-}(x-4)(4x+10)=f(a)g(a)$

$(a-4)(a^2-2)=(a-4)(4a+10)$

$(a-4)(a^2-4a-12)=0$

$(a-4)(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-2+4+6=8$ 답 8

0203

ㄱ. $\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1+} f(x)g(x)=-1\times(-1)=1$

$\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to -1+} f(x)g(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=-1\times 1=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$ ($\because$ ㄱ)

이때 $f(1)g(1)=-1\times 1=-1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0204

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)\{f(x)+k\}$

$=2(2+k)=4+2k$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)\{f(x)+k\}$

$=-1\times(-1+k)=1-k$

$g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=2(2+k)=4+2k$

따라서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$4+2k=1-k$ $\therefore k=-1$ 답 -1

유형 09 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 함수의 연속 개념 04

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(a)=0$이면
⇨ 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

0205

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x^2-2ax+3a\neq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ④

0206

함수 $g(x)$는 $x\neq2$인 모든 실수 x에 대하여 연속이고 $g(x)>0$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{ax^2+1}{3x+1}=\dfrac{4a+1}{7}$

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{ax^2+1}{1}=4a+1$

$\dfrac{f(2)}{g(2)}=\dfrac{4a+1}{1}=4a+1$

이므로 $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(2)}{g(2)}$에서

$\dfrac{4a+1}{7}=4a+1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

답 ④

0207

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(3)}{g(3)}$

이때 $\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{x^3+ax^2+bx}{(x+1)(x-3)}$에서

$\lim\limits_{x\to3+}(x+1)(x-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to3+}(x^3+ax^2+bx)=27+9a+3b=0$

$\therefore b=-3a-9$ ……㉠

한편,

$\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{x^3+ax^2+bx}{2}$

$=\dfrac{27+9a+3b}{2}=0$ ($\because$ ㉠)

이므로

$\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{x^3+ax^2-(3a+9)x}{(x+1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{x(x-3)(x+a+3)}{(x+1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{x(x+a+3)}{x+1}=\dfrac{3(a+6)}{4}=0$

$\therefore a=-6, b=9$

$\therefore a+b=-6+9=3$

답 ④

참고 $g(3)=\lim\limits_{x\to3-}g(x)=2\neq0$이고 $f(3)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)$이므로 $\dfrac{f(3)}{g(3)}=\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{f(3)}{g(3)}$이다.

유형 10 함수의 연속과 함수의 결정 개념 04

(1) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
함수 $\dfrac{1}{f(x)}$이 $x=a$에서 불연속이면 $f(a)=0$이다.

(2) 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-}f(x)$일 때,
함수 $g(x)$와 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $g(a)=0$이다.

0208

조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{x}{f(x-1)}$가 $x=-1$, $x=4$에서 불연속이므로

$f(-2)=f(3)=0$

즉, $f(x)=a(x+2)(x-3)$ ($a\neq0$인 상수)이라 하면

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a(x+2)(x-3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}a(x+2)=5a=2$

$\therefore a=\dfrac{2}{5}$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{5}(x+2)(x-3)$이므로

$f(0)=\dfrac{2}{5}\times2\times(-3)=-\dfrac{12}{5}$

답 ②

0209

$g(x)=x^2+ax+b$라 하면 함수 $g(x)f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-3$, $x=-1$에서도 연속이다. … ❶

(i) $x=-3$에서 연속일 때

$\lim\limits_{x\to-3+}g(x)f(x)=g(-3)\times1=g(-3)$

$\lim\limits_{x\to-3-}g(x)f(x)=g(-3)\times2=2g(-3)$

$g(-3)f(-3)=g(-3)$

즉, $g(-3)=2g(-3)$이므로 $g(-3)=0$ … ❷

(ii) $x=-1$에서 연속일 때

$\lim\limits_{x\to-1+}g(x)f(x)=g(-1)\times(-1)=-g(-1)$

$\lim\limits_{x\to-1-}g(x)f(x)=g(-1)\times1=g(-1)$

$g(-1)f(-1)=-g(-1)$

즉, $-g(-1)=g(-1)$이므로 $g(-1)=0$ … ❸

(i), (ii)에서

$g(x)=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$ … ❹

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$ab=4\times3=12$ … ❺

답 12

채점 기준	비율
❶ $g(x)=x^2+ax+b$로 놓고 $g(x)f(x)$의 연속성을 파악할 수 있다.	10 %
❷ $x=-3$에서 연속임을 이용하여 $g(-3)=0$임을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x=-1$에서 연속임을 이용하여 $g(-1)=0$임을 구할 수 있다.	30 %
❹ $g(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❺ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
즉, $\lim\limits_{x\to-3+}g(x)=\lim\limits_{x\to-3-}g(x)=g(-3)$,
$\lim\limits_{x\to-1+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1-}g(x)=g(-1)$

0210

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3 또는 -3인 이차함수이다.

조건 (나)에서 함수 $\dfrac{1}{f(x)f(4-x)}$이 불연속이 되는 x의 값은 $f(x)f(4-x)=0$인 x의 값과 같다.

이때 함수 $y=f(4-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 것이므로 방정식 $f(x)f(4-x)=0$의 근이 3개이려면 $f(2)=0$이어야 한다.

또, $x=-1$이 방정식 $f(x)f(4-x)=0$의 근이면 $x=5$도 이 방정식의 근이므로 $a=2$, $b=5$이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$|f(x)|=3(x+1)(x-2)$ 또는 $|f(x)|=3(x-2)(x-5)$

이때 $f(-1)<0$이므로 $f(x)=-3(x-2)(x-5)$

$\therefore f(4)=-3\times2\times(-1)=6$ 답 ⑤

유형 11 최대·최소 정리 개념 05

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면
⇨ 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 불연속이면
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 최댓값, 최솟값을 확인한다.

0211

ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)=-2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=-2$이므로

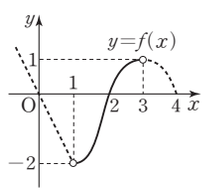
$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=1$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 개수는 -1, 1의 2이다. (참)

ㄹ. 함수 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 열린 구간 $(1, 3)$에서 최댓값을 갖지 않는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

0212

ㄱ, ㄴ. (i) $f(-1)=3$, $\lim_{x\to-1} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)\neq f(-1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)\neq\lim_{x\to0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

즉, 불연속이 되는 점의 개수는 -1, 0, 1의 3이고, 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 0, 1의 2이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖지만 최솟값은 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

유형 12 사잇값 정리 – 실근이 존재하는 구간 개념 06

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면

⇨ $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

⇨ 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0213

$f(x)=2x^3+x-5$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(0)=-5<0$, $f(1)=-2<0$, $f(2)=13>0$,

$f(3)=52>0$, $f(4)=127>0$, $f(5)=250>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ② $(1, 2)$이다. 답 ②

0214

$f(x)=x^3-3x^2-a$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의하여 $f(-2)f(-1)<0$이어야 하므로

$(-a-20)(-a-4)<0$, $(a+20)(a+4)<0$

$\therefore -20<a<-4$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 -19, -18, …, -5의 15이다.

답 15

0215

$f(x)$는 연속함수이고 $f(3)>0$, $f(5)>0$이므로 $f(4)<0$이면

$f(3)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(3, 4)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉, $a^2-2a-3<0$에서 $(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$

따라서 정수 a의 개수는 0, 1, 2의 3이다. 답 ②

0216

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$h(x)=x^5+x^3-3x^2+k-(x^3-5x^2+3)$

$=x^5+2x^2+k-3$ … ❶

이때 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의하여 $h(1)h(2)<0$이어야 하므로

$k(k+37)<0$ $\therefore -37<k<0$ … ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -1, 최솟값은 -36이므로 구하는 합은

$-1+(-36)=-37$ … ❸

답 -37

채점 기준	비율
❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h(x)$의 연속성을 파악할 수 있다.	30 %
❷ 사잇값 정리를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 사잇값 정리 – 실근의 개수 개념 06

조건을 해석하여 실근이 존재하는 구간을 추론한다.

0217

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)$
$+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또, 주어진 방정식은 삼차방정식이므로 방정식은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다. 답 ④

0218

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)f\left(\frac{1}{3}\right)<0$,

$f\left(\frac{2}{3}\right)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. 답 2개

0219

(i) $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=a$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=0 \quad \therefore f(-1)=0$

(ii) $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=b$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2} f(x)=0 \quad \therefore f(-2)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x+1)(x+2)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)라 하면

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)g(x)}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}(x+2)g(x)=g(-1)=a$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)g(x)}{x+2}$
$=\lim_{x\to-2}(x+1)g(x)=-g(-2)=b$

$\therefore g(-2)=-b$

$\therefore g(-1)g(-2)=a\times(-b)=-ab<0$ ($\because ab>0$)

이때 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, -2를 갖고, $-2<x<-1$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 최소 3개의 실근을 갖는다. 답 ③

유형 14 사잇값 정리의 실생활에의 활용 개념 06

적당한 함수를 세워 연속인 구간을 찾은 다음 사잇값 정리를 이용한다.

0220

인영이가 탄 승용차가 집에서 출발한 시각을 0, 휴게소에 도착한 시각을 t_1, 휴게소에서 다시 출발한 시각을 t_2, 할머니 댁에 도착한 시각을 t_3이라 하고, 집에서 출발한 지 t시간 후의 승용차의 속도를 $f(t)$ km/h라 하자. (단, $1<t_1<t_2<t_3$)

$h(t)=f(t)-90$이라 하면 함수 $h(t)$는 닫힌구간 $[0, t_3]$에서 연속이고

$h(0)=f(0)-90=0-90=-90<0$

$h(1)=f(1)-90=100-90=10>0$

$h(t_1)=f(t_1)-90=0-90=-90<0$

$h(t_2)=f(t_2)-90=0-90=-90<0$

$h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)=f\left(t_2+\frac{1}{6}\right)-90=95-90=5>0$

$h(t_3)=f(t_3)-90=0-90=-90<0$

이때

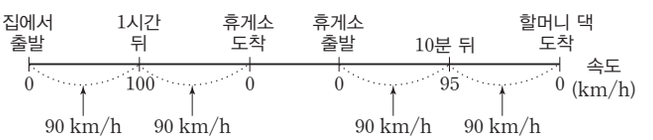
$h(0)h(1)<0$, $h(1)h(t_1)<0$,

$h(t_2)h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)<0$, $h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)h(t_3)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(t)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, t_1)$, $\left(t_2, t_2+\frac{1}{6}\right)$, $\left(t_2+\frac{1}{6}, t_3\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 승용차의 속도가 시속 90 km가 되는 경우는 적어도 4번이다. 답 4번

다른 풀이 다음과 같이 그림을 그려 생각해 보면 간단하다.



0221

주헌이가 x km를 달릴 때의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고,

$h(x)=f(x)-13$이라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0, 42.195]$에서 연속이고

$h(0)=f(0)-13=0-13=-13<0$

$h(10)=f(10)-13=12-13=-1<0$

$h(20)=f(20)-13=15-13=2>0$

$h(30)=f(30)-13=11-13=-2<0$

$h(40)=f(40)-13=14-13=1>0$

$h(42.195)=f(42.195)-13=16-13=3>0$

이때

$h(10)h(20)<0$, $h(20)h(30)<0$, $h(30)h(40)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(10, 20)$, $(20, 30)$, $(30, 40)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 주헌이의 속력이 시속 13 km인 곳은 적어도 3군데이다. 답 ③

0222

유형 01 함수의 연속과 불연속

|전략| 함수의 그래프를 그려 불연속인 점의 개수를 구한다.

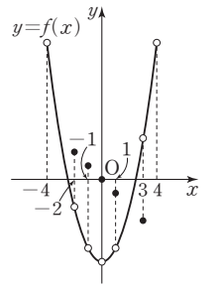
함수 $y=x^2-6$의 그래프와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는

$x^2-6=-x$에서

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 열린구간 $(-4, 4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 3$의 5이다.



답 ⑤

0223

유형 02 함수의 그래프와 연속

|전략| 함수의 그래프를 이용하여 우극한, 좌극한, 함숫값을 구하고 비교한다.

$h(x)=f(x)+g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 $x\neq-1$, $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1+}h(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to-1+}g(x)=0+1=1$

$\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to-1-}g(x)=1+0=1$

$h(-1)=f(-1)+g(-1)=1+0=1$

이므로 $\lim_{x\to-1}h(x)=h(-1)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=0$일 때

$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=-1+2=1$

$h(0)=f(0)+g(0)=1+2=3$

이므로 $\lim_{x\to0}h(x)\neq h(0)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)=-1+0=-1$

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)=0+1=1$

이므로 $\lim_{x\to1+}h(x)\neq\lim_{x\to1-}h(x)$

즉, $\lim_{x\to1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 $a=0$

$\therefore f(a)+g(a)=f(0)+g(0)=3$

답 ⑤

0224

유형 04 함수가 연속일 조건 (1) + 05 함수가 연속일 조건 (2)

함수 $f(x)$가 $-b\le x\le a$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$이다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x+2a)=2a$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{\sqrt{x+b}-c}{x}$ ……㉠

이때 $\lim_{x\to0-}x=0$이므로 $\lim_{x\to0-}(\sqrt{x+b}-c)=0$

$\sqrt{b}-c=0$ $\therefore c=\sqrt{b}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{(\sqrt{x+b}-\sqrt{b})(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}{x(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{x}{x(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

한편, $f(0)=\dfrac{1}{2}$이므로

$2a=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{1}{4}, b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면 $c=1$

$\therefore abc=\dfrac{1}{4}\times1\times1=\dfrac{1}{4}$

답 ②

0225

유형 07 연속함수의 성질

|전략| ㄷ. $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이어도 합성함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속일 수 있음을 이용한다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)$도 연속함수이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 두 함수 $f(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=|x|$이면 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속함수이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

0226

유형 08 $f(x)g(x)$ 꼴의 함수의 연속

|전략| a의 값의 범위에 따라 경우를 나눠서 생각한다.

함수 $f(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=a$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(i) $a<0$인 경우

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}(3x+1)x^2=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}(3x-1)x^2=0$

$f(0)g(0)=1\times0=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(3x-1)x^2=(3a-1)a^2$

$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(3x-1)(x+2)=(3a-1)(a+2)$

$f(a)g(a)=(3a-1)(a+2)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$(3a-1)a^2=(3a-1)(a+2)$

$(3a-1)(a^2-a-2)=0$, $(3a-1)(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

(ii) $a=0$인 경우

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+}(3x+1)x^2=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}(3x-1)(x+2)=-2$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $a>0$인 경우

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+}(3x+1)(x+2)=2$

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}(3x-1)(x+2)=-2$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$는 불연속이다.

(i)~(iii)에서 $a=-1$ 답 ①

0227

유형 10 함수의 연속과 함수의 결정

|전략| $f(x)=0$인 x에서 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 불연속임을 이용한다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)}$이 $x=1$, $x=5$에서 불연속이므로

$f(1)=f(5)=0$

즉, $f(x)=a(x-1)(x-5)$ ($a\neq 0$인 실수)라 하면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{a(x-1)(x-5)}=\frac{1}{a}=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$이므로

$f(3)=\frac{1}{2}\times 2\times(-2)=-2$ 답 ②

0228

유형 11 최대·최소 정리

|전략| 주어진 구간이 닫힌구간이면 함수가 연속인지 확인하고, 닫힌구간이 아니면 함수의 그래프를 이용한다.

함수 $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$은 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 연속이므로 3을 포함하지 않는 닫힌구간 $[-4, 0]$, $[-1, 1]$, $[5, 6]$에서는 최대·최소 정리에 의하여 항상 최댓값이 존재한다.

또, 구간 $(0, 2]$에서 $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$은 증가하므로 최댓값 $f(2)=1$을 갖는다.

한편, 구간 $(3, 5]$에서 $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$은 감소하므로 최댓값이 존재하지 않는다. 답 ④

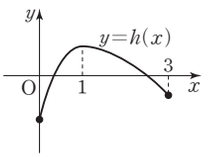
0229

유형 12 사잇값 정리 – 실근이 존재하는 구간

|전략| 조건에 맞게 $y=h(x)$의 그래프를 그려 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 방정식 $h(x)=0$이 $0<x<3$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 실수 x가 존재한다. (거짓)

ㄴ. [반례] 함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때



$h(0)=f(0)-g(0)<0$이고 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(0, 3)$에서 실근을 갖지만

$h(3)=f(3)-g(3)<0$

$\therefore f(3)<g(3)$ (거짓)

ㄷ. 함수 $h(x)$가 연속함수이고, $h(0)h(1)<0$, $h(1)h(2)<0$이므로 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ③

0230

유형 13 사잇값 정리 – 실근의 개수

|전략| $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용하여 함수 $f(x)$를 유추한다.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $\lim_{x\to 0} x=0$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)g(x)=-g(0)=2$

$\therefore g(0)=-2$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)g(x)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{xg(x)}{x+1}=\frac{g(1)}{2}=2$

$\therefore g(1)=4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(0)g(1)=-8<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 0, 1을 갖고, $0<x<1$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. 답 ①

0231

유형 04 함수가 연속일 조건 (1)

|전략| 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$이고, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이어야 한다.

(i) $n\le x<n+1$일 때, $n+1\le x+1<n+2$이므로

$[x]=n$, $[x+1]=n+1$

$\therefore \lim_{x\to n+} f(x)=(n+1)^2+(an+b)n$

$=(a+1)n^2+(b+2)n+1$

(ii) $n-1\le x<n$일 때, $n\le x+1<n+1$이므로

$[x]=n-1$, $[x+1]=n$

$\therefore \lim_{x\to n-} f(x)=n^2+(an+b)(n-1)$

$=(a+1)n^2+(b-a)n-b$

(iii) $f(n)=(n+1)^2+(an+b)n$

$=(a+1)n^2+(b+2)n+1$ … ❶

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$(a+1)n^2+(b+2)n+1=(a+1)n^2+(b-a)n-b$ … ❷

이 등식이 모든 정수 n에 대하여 항상 성립해야 하므로

$b+2=b-a,\ 1=-b \quad \therefore a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$ … ❸

답 -3

채점 기준	배점
❶ 정수를 기준으로 함수의 우극한, 좌극한, 함숫값을 구할 수 있다.	4점
❷ 연속의 정의를 이용하여 등식을 세울 수 있다.	2점
❸ 항등식을 이용하여 $a+b$의 값을 구할 수 있다.	3점

0232

유형 08 $f(x)g(x)$ 꼴의 함수의 연속

|전략| $3-x=t$라 하면 $x \to 2+,\ x \to 2-$일 때, 각각 $t \to 1-,\ t \to 1+$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to 1+}(2x+k) \neq \lim_{x\to 1-}(x^2+3x+5)$

$2+k \neq 9 \quad \therefore k \neq 7$ ……㉠ … ❶

$3-x=t$라 하면

$x \to 2+,\ x \to 2-$일 때 각각 $t \to 1-,\ t \to 1+$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2+} f(x)\times\lim_{t\to 1-} f(t)$

$=(4+k)\times 9=9(4+k)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2-} f(x)\times\lim_{t\to 1+} f(t)$

$=(4+k)(2+k)$

$f(2)f(1)=(4+k)\times 9=9(4+k)$

함수 $f(x)f(3-x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2-} f(x)f(3-x)=f(2)f(1)$이어야 하므로

$9(4+k)=(4+k)(2+k),\ (k+4)(k-7)=0$ … ❷

$\therefore k=-4\ (\because$ ㉠) … ❸

답 -4

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속임을 이용하여 k의 조건을 찾을 수 있다.	2점
❷ 함수 $f(x)f(3-x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 k의 조건을 찾을 수 있다.	4점
❸ 상수 k의 값을 구할 수 있다.	1점

0233

유형 06 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

|전략| 연속함수 $g(x)$에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$이다.

(1) $x \neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}=f(2)$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)(x^2+1)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax-6)=0$

$4+2a-6=0 \quad \therefore a=1$

(3) $a=1$을 ㉠에 대입하면

$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{(x-2)(x^2+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+1}=1$

답 (1) $f(x)=\dfrac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}$ (2) 1 (3) 1

채점 기준	배점
(1) $x \neq 2$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
(2) a의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	5점

창의·융합 실력 마스터

0234

|전략| 함수 $f(x+k)$가 $x=a$에서 연속임을 보이려면 $x+k=t$로 놓고 $x \to a$일 때, $t \to a+k$임을 이용하여 극한값을 구한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1,\ \lim_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{-1}{1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-1$ (참)

ㄴ. $x-1=t$라 하면

$x \to 0+,\ x \to 0-$일 때, 각각 $t \to -1+,\ t \to -1-$이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x-1)=\lim_{t\to -1+} g(t)=1$

$\lim_{x\to 0-} g(x-1)=\lim_{t\to -1-} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x-1)=1$

이때 $g(-1)=1$이므로 함수 $g(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $x-1=k$라 하면

$x \to 0+,\ x \to 0-$일 때, 각각 $k \to -1+,\ k \to -1-$이고

$x+1=t$라 하면

$x \to 0+,\ x \to 0-$일 때, 각각 $t \to 1+,\ t \to 1-$이다.

$\lim_{x\to 0+} f(x-1)g(x+1)=\lim_{k\to -1+} f(k)\times\lim_{t\to 1+} g(t)$

$=1\times 1=1$

$\lim_{x\to 0-} f(x-1)g(x+1)=\lim_{k\to -1-} f(k)\times\lim_{t\to 1-} g(t)$

$=-1\times(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x-1)g(x+1)=1$

이때 $f(-1)g(1)=-1\times 1=-1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x-1)g(x+1) \neq f(-1)g(1)$

즉, 함수 $f(x-1)g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0235

|전략| $g(x)=0$인 x의 값과 $f(x)$가 불연속인 x의 값에서 연속인지 불연속인지 조사한다.

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

또, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 불연속이 되는 $x=-1$과 $x=1$에서의 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 연속성을 조사하면

(i) $x=-1$일 때

$\lim\limits_{x\to -1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{1}=2$, $\lim\limits_{x\to -1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{1}=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1+}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to -1-}\frac{f(x)}{g(x)}$

즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{1}=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1+}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}$

즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 열린구간 $(-2, 3)$에서 불연속이 되는 x의 값의 개수는 -1, 0, 1, 2의 4이다. 답 4

0236

|전략| 함수의 그래프를 그리고 교점의 개수를 구하여 함수 $f(t)$를 t에 대한 식으로 정리한다.

함수 $y=\begin{cases}|(x+1)(x-1)| & (x\geq -1)\\ |4(x+3)(x+1)| & (x<-1)\end{cases}$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 이 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수 $f(t)$는

$t<0$일 때, $f(t)=0$

$t=0$일 때, $f(t)=3$

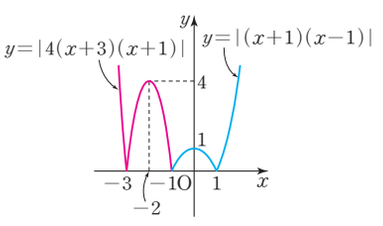
$0<t<1$일 때, $f(t)=6$

$t=1$일 때, $f(t)=5$

$1<t<4$일 때, $f(t)=4$

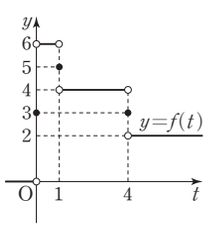
$t=4$일 때, $f(t)=3$

$t>4$일 때, $f(t)=2$



[그림 1]

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다. …… ㉠



[그림 2]

$g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 a에 대하여 $g(a)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$이고 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$, $x=1$, $x=4$에서도 연속이어야 한다.

(i) $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)g(x)=f(0)g(0)$에서

$6g(0)=0=3g(0)$

$\therefore g(0)=0$

(ii) $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$에서

$4g(1)=6g(1)=5g(1)$

$\therefore g(1)=0$

(iii) $x=4$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 4+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 4-}f(x)g(x)=f(4)g(4)$에서

$2g(4)=4g(4)=3g(4)$

$\therefore g(4)=0$

(i)~(iii)에서 $g(x)=x(x-1)(x-4)$ ($g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수)이므로

$g(3)=3\times 2\times(-1)=-6$

$\therefore f(3)g(3)=4\times(-6)=-24$ ($\because$ ㉠) 답 -24

참고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-}f(x)$일 때, 함수 $g(x)$와 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $g(a)=0$이다.

0237

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$이다.

ㄱ. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)=a$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=a$에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)}{x+1}=a\times\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0238

|전략| ㄷ. $h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}$로 놓고 사잇값 정리를 이용한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1+}f(g(x))=f(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to -1-}f(g(x))=\lim\limits_{g(x)\to -1+}f(g(x))=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1}f(g(x))=-1$ (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1+}f(g(x))=\lim\limits_{g(x)\to -1+}f(g(x))=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(g(x))=f(0)=-1$

$f(g(1))=f(-1)=-2$

즉, $\lim\limits_{x\to 1}f(g(x))\neq f(g(1))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. $h(x)=g(f(x))+\frac{1}{2}$이라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고

$h(-2)=g(f(-2))+\frac{1}{2}=g(-1)+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$

$h(-1)=g(f(-1))+\frac{1}{2}=g(-2)+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

이때 $h(-2)h(-1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$, 즉 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 열린구간 $(-2, -1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

본책 42~57쪽

STEP 1 개념 마스터

0239

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{5-0}{5}=1$ 답 1

0240

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{-6-(-1)}{5}=-1$ 답 −1

0241

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{53-(-17)}{5}=14$ 답 14

0242

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{9-1}{4}=2$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}$

$=\frac{\{2(1+\Delta x)+1\}-3}{\Delta x}$

$=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$ 답 (1) 2 (2) 2

0243

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$

$=\frac{\{(a+\Delta x)^2+2(a+\Delta x)\}-(a^2+2a)}{\Delta x}$

$=\frac{(2a+2)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=2a+2+\Delta x$ 답 $2a+2+\Delta x$

0244

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4(1+\Delta x)-(-4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x}{\Delta x}=-4$ 답 −4

다른 풀이 $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-4x-(-4)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{-4(x-1)}{x-1}=-4$

0245

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)-1\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 3

다른 풀이 $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$

0246

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)\}-(-2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-1+\Delta x)=-1$ 답 −1

다른 풀이 $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-3x)-(-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$

0247

$f(x)=3x+1$이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 3

0248

$f(x)=x^2-2x+2$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이므로

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(\Delta x)^2-2\Delta x+2\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-2)=-2$ 답 −2

0249

$f(x)=-x^2+4$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(-1+\Delta x)^2+4\}-3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2-\Delta x)=2$ 답 2

0250

$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$

(i) $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

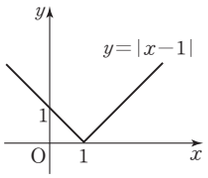
(ii) $\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\dfrac{(x-1)-0}{x-1}=1$

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\dfrac{(-x+1)-0}{x-1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$



즉, $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 1이다. 답 1

0251

(1) $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-2x^2+x)=0$

$f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{x^2-0}{x}$

$=\lim_{x\to 0+} x=0$

$\lim_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\dfrac{(-2x^2+x)-0}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}(-2x+1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

0252

(1) 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속이 되는 점의 개수는 2이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능하지 않다. 또, 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 그래프가 꺾여 있으므로 $x=-2$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능하지 않은 점의 개수는 4이다.

답 (1) 2 (2) 4

0253

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{4-4}{\Delta x}=0$ 답 $f'(x)=0$

0254

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{3(x+\Delta x)-4\}-(3x-4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 $f'(x)=3$

0255

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)\}-(x^2-x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(2x-1)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x-1+\Delta x)=2x-1$ 답 $f'(x)=2x-1$

0256

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{2(x+\Delta x)^2+1\}-(2x^2+1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x)=4x$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$는

$f'(2)=4\times 2=8$ 답 $f'(x)=4x$, $f'(2)=8$

0257

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left\{-\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-3\right\}-\left(-\frac{1}{2}x^2+x-3\right)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(-x+1)\Delta x-\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-x+1-\frac{1}{2}\Delta x\right)=-x+1$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$는

$f'(2)=-2+1=-1$ 답 $f'(x)=-x+1$, $f'(2)=-1$

0258

$f'(x)=(3x^6)'=3(x^6)'=3\times 6x^5=18x^5$ 답 $f'(x)=18x^5$

0259

$f'(x)=(-x^{15})'=-15x^{14}$ 답 $f'(x)=-15x^{14}$

0260

$f'(x)=(24)'=0$ 답 $f'(x)=0$

0261

$y'=(-2x^2+3x+1)'=(-2x^2)'+(3x)'+(1)'$
$=-2(x^2)'+3(x)'+(1)'$
$=-2\times 2x+3\times 1+0$
$=-4x+3$ 답 $y'=-4x+3$

0262

$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x-1\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-(x^2)'+(x)'-(1)'$
$=\frac{1}{3}(x^3)'-(x^2)'+(x)'-(1)'$
$=\frac{1}{3}\times 3x^2-2x+1-0$
$=x^2-2x+1$ 답 $y'=x^2-2x+1$

0263

$y'=(2x^6-x^3+5x)'=(2x^6)'-(x^3)'+(5x)'$
$=2(x^6)'-(x^3)'+5(x)'$
$=2\times 6x^5-3x^2+5\times 1$
$=12x^5-3x^2+5$ 답 $y'=12x^5-3x^2+5$

0264

(1) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$이므로
$f'(2)+g'(2)=2+(-4)=-2$
(2) $\{3f(x)-2g(x)\}'=3f'(x)-2g'(x)$이므로
$3f'(2)-2g'(2)=3\times 2-2\times(-4)=14$ 답 (1) -2 (2) 14

0265

$y'=\{(x-2)(2x+1)\}'$
$=(x-2)'(2x+1)+(x-2)(2x+1)'$
$=(2x+1)+2(x-2)$
$=4x-3$ 답 $y'=4x-3$

0266

$y'=\{(3x+4)(2x^2+3x-1)\}'$
$=(3x+4)'(2x^2+3x-1)+(3x+4)(2x^2+3x-1)'$
$=3(2x^2+3x-1)+(3x+4)(4x+3)$
$=(6x^2+9x-3)+(12x^2+25x+12)$
$=18x^2+34x+9$ 답 $y'=18x^2+34x+9$

0267

$y'=(x)'(x+1)(x+4)+x(x+1)'(x+4)+x(x+1)(x+4)'$
$=(x+1)(x+4)+x(x+4)+x(x+1)$
$=(x^2+5x+4)+(x^2+4x)+(x^2+x)$
$=3x^2+10x+4$ 답 $y'=3x^2+10x+4$

0268

$y'=(2x+1)'(x-1)(-x^2+5x)+(2x+1)(x-1)'(-x^2+5x)$
$+(2x+1)(x-1)(-x^2+5x)'$
$=2(x-1)(-x^2+5x)+(2x+1)\times 1\times(-x^2+5x)$
$+(2x+1)(x-1)(-2x+5)$
$=(-2x^3+12x^2-10x)+(-2x^3+9x^2+5x)$
$+(-4x^3+12x^2-3x-5)$
$=-8x^3+33x^2-8x-5$
답 $y'=-8x^3+33x^2-8x-5$

0269

$y'=\{(2x-1)^3\}'$
$=3(2x-1)^2(2x-1)'$
$=3(2x-1)^2\times 2$
$=6(2x-1)^2$ 답 $y'=6(2x-1)^2$

0270

$y'=\{(-x^2+3x+5)^4\}'$
$=4(-x^2+3x+5)^3(-x^2+3x+5)'$
$=4(-x^2+3x+5)^3(-2x+3)$
답 $y'=4(-x^2+3x+5)^3(-2x+3)$

0271

$y'=\{(x+1)^2\}'(3x^2+5)+(x+1)^2(3x^2+5)'$
$=2(x+1)(x+1)'(3x^2+5)+(x+1)^2\times 6x$
$=2(x+1)\{(3x^2+5)+3x(x+1)\}$
$=2(x+1)(6x^2+3x+5)$
답 $y'=2(x+1)(6x^2+3x+5)$

0272

$y'=\{(x^2+3)^3\}'(x+2)^2+(x^2+3)^3\{(x+2)^2\}'$
$=3(x^2+3)^2(x^2+3)'(x+2)^2+(x^2+3)^3\times 2(x+2)(x+2)'$
$=6x(x^2+3)^2(x+2)^2+2(x^2+3)^3(x+2)$
$=2(x+2)(x^2+3)^2\{3x(x+2)+(x^2+3)\}$
$=2(x+2)(x^2+3)^2(4x^2+6x+3)$
답 $y'=2(x+2)(x^2+3)^2(4x^2+6x+3)$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 평균변화율 개념 01

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

0273

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$
$$=\frac{\{(a+1)^2-2(a+1)\}-(a^2-2a)}{1}=2a-1$$

즉, $2a-1=3$에서 $a=2$ 답 ④

0274

함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{f(4)-2}{6}=\frac{1}{3}$$

$\therefore f(4)=4$

따라서 직선 BC의 기울기는

$$\frac{f(4)-1}{4-0}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$$ 답 $\frac{3}{4}$

0275

함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$$
$$=\frac{(3^2+2)-\{(-1)^2+2\}}{4}$$
$$=\frac{11-3}{4}=2$$

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -3에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(-3)}{a-(-3)}$$
$$=\frac{(a^2+2)-\{(-3)^2+2\}}{a+3}$$
$$=\frac{a^2-9}{a+3}=\frac{(a+3)(a-3)}{a+3}$$
$$=a-3$$

즉, $a-3=2$에서 $a=5$ 답 5

0276

오른쪽 그림에서

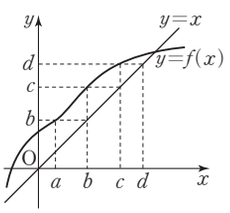
$f(a)=b$, $f(b)=c$이므로

$f^{-1}(b)=a$, $f^{-1}(c)=b$

$\therefore g(b)=a, g(c)=b$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(c)-g(b)}{c-b}=\frac{b-a}{c-b}$$



답 ②

유형 02 평균변화율과 미분계수 개념 01, 02

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0277

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$
$$=\frac{(2^2+3\times 2+1)-(1^2+3\times 1+1)}{1}$$
$$=\frac{11-5}{1}=6$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(c+\Delta x)^2+3(c+\Delta x)+1\}-(c^2+3c+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2c+3)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2c+3+\Delta x)=2c+3$$

즉, $2c+3=6$에서 $c=\frac{3}{2}$ 답 ⑤

0278

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{(2b^2+b-1)-(2a^2+a-1)}{b-a}$$
$$=\frac{2(b^2-a^2)+(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{2(b-a)(b+a)+(b-a)}{b-a}$$
$$=2a+2b+1$$ … ❶

또, 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-1\}-(2\times 1^2+1-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(5+2\Delta x)=5$$ … ❷

즉, $2a+2b+1=5$에서 $a+b=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40%
❷ 함수 $y=f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0279

함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$$
$$=\frac{(1^3+k\times1^2)-\{(-1)^3+k\times(-1)^2\}}{2}$$
$$=\frac{(1+k)-(-1+k)}{2}=1$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(a+\Delta x)^3+k(a+\Delta x)^2\}-(a^3+ka^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(3a^2+2ka)\Delta x+(3a+k)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\{3a^2+2ka+(3a+k)\Delta x+(\Delta x)^2\}$$
$$=3a^2+2ka$$

$3a^2+2ka=1$에서 $3a^2+2ka-1=0$

이때 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수가 같도록 하는 모든 실수 a의 값의 합이 -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2k}{3}=-1 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$$ 답 $\frac{3}{2}$

참고 이차방정식 $3a^2+2ka-1=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=k^2+3>0$이므로 이차방정식 $3a^2+2ka-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0280

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 a이므로

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=a$$

이때 $f(1)=1$이므로

$$\frac{f(a)-1}{a-1}=a,\ f(a)-1=a^2-a$$

$\therefore f(a)=a^2-a+1$

즉, $f(x)=x^2-x+1$이므로 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)+1\}-(1^2-1+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(1+\Delta x)=1$$ 답 1

다른 풀이 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x+1)-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x=1$$

유형 03 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1) 개념 02

주어진 식을 $\lim_{\blacksquare\to0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$ 꼴로 변형하고 $f'(a)$의 값을 이용하여 극한값을 구한다.

이때 $\lim_{\blacksquare\to0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$에서 $\blacksquare$부분이 같아지도록 변형한다.

0281

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$
$$=2\times2=4$$ 답 4

0282

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}-\frac{f(4+h)}{3h}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{3-f(4+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}f'(4)$$
$$=-\frac{1}{3}\times6=-2$$ 답 ②

0283

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\frac{g(h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\ (\because g(0)=0)$$
$$=3f'(1)-g'(0)=0$$

이때 $f'(1)=2$이므로

$$3\times2-g'(0)=0 \qquad \therefore g'(0)=6$$ 답 ③

0284

$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-3}{2h}=1$에서 $\lim_{h\to0}2h=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\{f(2-h)-3\}=0 \qquad \therefore f(2)=3$$ … ❶

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-3}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}f'(2)$$

즉, $-\frac{1}{2}f'(2)=1$에서 $f'(2)=-2$ … ❷

한편, $\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(2+\frac{3}{n}\right)-f(2)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times 3\right\}$$
$$=3f'(2)=3\times(-2)=-6 \quad \cdots ❸$$

답 -6

채점 기준	비율
❶ 함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있다.	50%

Lecture

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=a$ (a는 실수)일 때,
$\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2) 개념 02

주어진 식을 $\lim_{▲\to a}\frac{f(▲)-f(a)}{▲-a}$ 꼴로 변형하고 $f'(a)$의 값을 이용하여 극한값을 구한다.
이때 $\lim_{▲\to a}\frac{f(▲)-f(a)}{▲-a}$에서 ▲부분이 같아지도록 변형한다.

0285

$$\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3f'(3)-f(3)$$
$$=3\times 2-4=2$$

답 ②

0286

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$
$$=3f'(1)=3\times 2=6$$

답 6

0287

$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{3}}{x-4}=\sqrt{3}$에서 $\lim_{x\to 4}(x-4)=0$이므로
$\lim_{x\to 4}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{3}\}=0 \quad \therefore f(4)=3$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{3}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{f(x)}-\sqrt{3})(\sqrt{f(x)}+\sqrt{3})}{(x-4)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-3}{(x-4)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 4}\left\{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\times\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{3}}\right\}$$
$$=f'(4)\times\frac{1}{\sqrt{f(4)}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}f'(4)$$

즉, $\frac{1}{2\sqrt{3}}f'(4)=\sqrt{3}$에서 $f'(4)=6$
$\therefore f(4)+f'(4)=3+6=9$

답 9

0288

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(1)-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$=2f(1)-2f'(1)$$
$$=2\times 3-2\times(-2)=10$$

답 ①

유형 05 관계식이 주어질 때 미분계수 구하기 개념 02

(i) 주어진 관계식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값 구하기
(ii) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$의 값 구하기

0289

주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$
이때 $f'(0)=3$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3 \ (\because f(0)=0)$$

이므로

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(-1)+f(h)+2h\}-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2$$
$$=3+2=5$$

답 5

0290

주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+5 \quad \therefore f(0)=-5$

이때 $f'(0)=0$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5}{h}=0\ (\because f(0)=-5)$$

이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1)+f(h)+h+5\}-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+h+5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5}{h}+1=0+1=1$$

답 1

0291

주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

이때 $f(x)>0$이므로 $f(0)=1$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)f(h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)\{f(h)-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)\{f(h)-f(0)\}}{h}$$

$$=f(3)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=f(3)f'(0)$$

$$\therefore \frac{f'(3)}{f(3)}=f'(0)=2$$

답 2

0292

조건 (가)에서 주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이다.

즉, $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$$

한편,

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2)+f(h)+8h-1\}-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+8h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+8$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+8$$

$$=f'(0)+8$$

즉, $f'(0)+8=3$이므로 $f'(0)=-5$

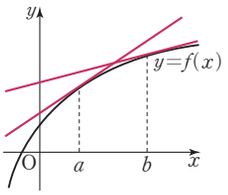
답 ②

유형 06 미분계수의 기하적 의미 개념 02

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

0293

ㄱ. 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(a)>f'(b)$ (거짓)



ㄴ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$ (참)

$a>0, b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

ㄷ. $0<a<b$일 때 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, 열린구간 (a, b)에서 접선의 기울기는 점점 감소하므로 $f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

Lecture

(1) 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하고 $a<b$일 때, $f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하고 $a<b$일 때, $f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

0294

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기는 $x=3$에서의 미분계수 $f'(3)$과 같다.

이때 접선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로 접선의 기울기는

$\frac{1-0}{3-(-1)}=\frac{1}{4} \quad \therefore f'(3)=\frac{1}{4}$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0295

ㄱ. $g(4)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-1}{3}=1$

$g(5)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{9-1}{4}=2$

$\therefore g(4)<g(5)$ (참)

ㄴ. $g(x)=0$에서 $f(x)-f(1)=0$이므로 $(x-2)^2-1=0$

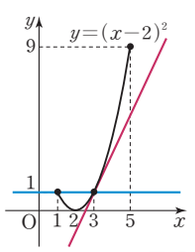
$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$

즉, $1<x\leq 5$이므로 구하는 x의 값은 3의 1개이다. (거짓)

ㄷ. $g(3)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-1}{2}=0$

$f'(3)$은 $x=3$에서의 접선의 기울기와 같으므로 오른쪽 그림에서 $f'(3)>0$

$\therefore g(3)<f'(3)$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고 함수 $g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))(1<x\leq 5)$를 지나는 직선의 기울기이다.

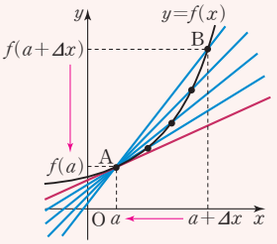
Lecture

미분계수 $f'(a)$의 기하적 의미

오른쪽 그림에서 점 B가 점 A에 한없이 가까워질 때의 평균변화율의 극한값

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 $x=a$에서의 접선의 기울기임을 알 수 있다. 따라서 미분계수 $f'(a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.



유형 07 미분가능성과 연속성 – 식 개념 03

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

(1) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이면 $x=a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 $x=a$에서 미분가능하다.

0296

① $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

② $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=|x|^2=x^2$이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

⑤ $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}h|h|=0$$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ③이다.

답 ③

0297

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$$ 에서

(i) $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}-0}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0+}(2+h)=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\{-(1+h)^2+1\}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-2h-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}(-2-h)=-2$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ne\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

즉, $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

0298

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ne\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

즉, $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{x}-1\right)=0$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{-x}{x}-1\right)=-2$$

즉, $\lim_{x\to 0}g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}l(x)=l(0)=1$이므로 함수 $l(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{l(h)-l(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{l(h)-l(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(2h+1)-1}{h}=\lim_{h\to 0-}2=2$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{l(h)-l(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{l(h)-l(0)}{h}$$

즉, $l'(0)$이 존재하므로 함수 $l(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ이다.

답 ①

유형 08 미분가능성과 연속성 – 그래프 개념 03

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

(1) 불연속이 되는 점 ⇨ 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점

(2) 미분가능하지 않은 점 ⇨ 불연속이거나 꺾인 점

0299

① 함수 $f(x)$는 $x=d$, $x=e$에서 불연속이므로 불연속이 되는 점의 개수는 2이다.

② $\lim_{x\to d+}f(x)=\lim_{x\to d-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to d}f(x)$의 값이 존재한다.

③ $a<x<c$, $c<x<d$, $d<x<e$에서 $f'(x)=0$인 점이 각각 한 개씩 존재하고, $e<x<b$에서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로 $f'(x)=0$이다.

④ 불연속이거나 꺾인 점에서는 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 c, d, e의 3이다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=c$에서만 연속이지만 미분가능하지 않으므로 연속이지만 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0300

①, ⑤ $x=a$에서 꺾인 점이므로 미분가능하지 않다.

②, ④ $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=a$에서 미분가능한 함수는 ③이다.

답 ③

0301

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 불연속이 되는 점은 그래프가 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점이다.

따라서 $x=-1$, $x=1$일 때 불연속이므로 $a=2$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 미분가능하지 않은 점은 불연속이거나 꺾인 점이다.

따라서 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때 미분가능하지 않으므로 $b=3$

(i), (ii)에서 $a+b=2+3=5$ 답 5

유형 09 도함수의 정의를 이용하여 도함수 구하기 개념 04

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용한다.

0302

$F(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면 $y=F(x)$에서

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)\}^2-\{f(x)\}^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+f(x)\}\times\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\{\boxed{(가)\ f(x+h)+f(x)}\}$$
$$=f'(x)\times 2f(x)=\boxed{(나)\ 2f(x)f'(x)}$$

답 ④

0303

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{(가)\ f(x-h)}-f(x)}{h}\ (\because f(x)=f(-x))$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\boxed{(가)\ f(x-h)}-f(x)}{\boxed{(나)\ -h}}\times(-1)\right\}$$
$$=-f'(x)$$

답 (가) $f(x-h)$ (나) $-h$

유형 10 미분법의 공식 개념 05

(1) $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수) ⇨ $f'(x)=nx^{n-1}$ ($n=1$이면 $f'(x)=1\times x^0=1$이다.)

(2) $f(x)=c$ (c는 상수) ⇨ $f'(x)=0$

(3) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (c는 상수)

(4) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(5) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

0304

$f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{99}x^{99}$에서

$f'(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{98}$이므로

$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50개}=50$

답 ②

0305

$f(x)=x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6+x^7$에서

$f(1)=1-1+1-1+1-1+1=1$

또, $f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6$이므로

$f'(1)=1-2+3-4+5-6+7=4$

$\therefore f(1)+f'(1)=1+4=5$

답 5

0306

$f(x)=x^3+ax^2-x-1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-1$

이때 $f'(1)=4$이므로 $2a+2=4$

$\therefore a=1$

답 ④

0307

$f(-1)=0$에서 $a-b+c=0$ ……㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2$에서 $2a+b=2$ ……㉡

$f'(2)=4$에서 $4a+b=4$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$ … ❶

$a=1$, $b=0$을 ㉠에 대입하면

$1+c=0$ $\therefore c=-1$ … ❷

$\therefore a+b-c=1+0-(-1)=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ c의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 곱의 미분법 개념 06

(1) $\{f(x)g(x)\}'=\underset{\text{미분 그대로}}{f'(x)g(x)}+\underset{\text{그대로 미분}}{f(x)g'(x)}$

(2) $\{f(x)g(x)h(x)\}'$
$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

(3) $[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (단, n은 자연수)

0308

$f'(x)=\{(x-1)(x^3-3)\}'+\{(x^2-2x-1)^3\}'$
$=(x-1)'(x^3-3)+(x-1)(x^3-3)'$
$+3(x^2-2x-1)^2(x^2-2x-1)'$
$=(x^3-3)+(x-1)\times 3x^2+3(x^2-2x-1)^2(2x-2)$
$=(x^3-3)+3x^2(x-1)+6(x-1)(x^2-2x-1)^2$

$\therefore f'(1)=-2$

답 ①

0309

$g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$
$=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

$\therefore g'(1)=4f(1)+3f'(1)$
$=4\times 2+3\times 3=17$

답 ②

0310

주어진 식의 우변을 인수분해하면

$(x^2+x+1)f(x)=(x+1)(x^3-1)(x^3+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$

$\therefore f(x)=(x^2-1)(x^3+1)$

$f'(x)=(x^2-1)'(x^3+1)+(x^2-1)(x^3+1)'$

$=2x(x^3+1)+(x^2-1)\times 3x^2$

$\therefore f'(1)=4$ 답 4

0311

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이다. 즉, $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$ … ❶

또, $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=-1$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{g(x)-1\}=0$이다. 즉, $g(1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-1$ … ❷

이때 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\times 1+2\times(-1)=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 곱의 미분법을 이용하여 $h'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 12 도함수를 이용한 극한값의 계산 개념 02, 04~06

(i) 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형하기

(ii) $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한 다음 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입하여 $f'(a)$의 값 구하기

(iii) 주어진 식의 값 구하기

0312

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times 2$

$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$

이때 $f(x)=x^4+x^2+1$에서 $f'(x)=4x^3+2x$이므로

$f'(1)=6$ $\therefore 3f'(1)=18$ 답 ③

0313

$\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\{f(x)+f(1)\}$

$=f'(1)\times 2f(1)$

이때 $f(x)=2x^3-x^2-3x+1$에서 $f(1)=-1$

또, $f'(x)=6x^2-2x-3$이므로 $f'(1)=1$

$\therefore f'(1)\times 2f(1)=1\times(-2)=-2$ 답 −2

0314

$f(x)=x^6+6x^2+1$에서 $f(1)=f(-1)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h}\times\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}f'(-1)$

이때 $f(x)=x^6+6x^2+1$에서 $f'(x)=6x^5+12x$이므로

$f'(-1)=-18$ $\therefore \frac{3}{2}f'(-1)=-27$ 답 ①

0315

$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

이때 $f(x)=x^3-x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2-2x$이므로

$f'(1)=1$ $\therefore 2f'(1)=2$ 답 2

유형 13 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 개념 02, 05, 06

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-A}{x-a}=B$를 만족시키면 $A=f(a), B=f'(a)$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 미정계수를 구한다.

0316

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-3$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-3$

한편, $f(x)=x^3+ax^2+2bx-3b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2b$이므로

$f(1)=1+a+2b-3b=0$ $\therefore a-b=-1$ ……㉠

$f'(1)=3+2a+2b=-3$ $\therefore a+b=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-1$

$\therefore ab=-2\times(-1)=2$ 답 2

0317

$f(1)=1+a+b=8$ $\therefore a+b=7$ ……㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times(\sqrt{x}+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)$$
$$=2f'(1)$$

즉, $2f'(1)=8$이므로 $f'(1)=4$

한편, $f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$이므로

$f'(1)=2+a=4$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore b-a=5-2=3$ 답 ③

0318

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=12$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이다.

즉, $f(2)=0$이므로

$f(2)=8+4a+2b+c=0$ $\therefore 4a+2b+c=-8$ ……㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=12$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)=2$$

$\therefore f'(1)=1$

한편, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(2)=12+4a+b=12$ $\therefore 4a+b=0$ ……㉡

$f'(1)=3+2a+b=1$ $\therefore 2a+b=-2$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$a=1$, $b=-4$를 ㉠에 대입하면

$4-8+c=-8$ $\therefore c=-4$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-4x-4$이므로

$f(1)=1+1-4-4=-6$ 답 -6

0319

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}=2$이므로 $a=0$, $b=2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-10}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-10\}=0$이다. 즉, $f(1)=10$이므로

$f(1)=2+c+d=10$ $\therefore c+d=8$ ……㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-10}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$$

한편, $f(x)=2x^2+cx+d$에서 $f'(x)=4x+c$이므로

$f'(1)=4+c=5$ $\therefore c=1$

$c=1$을 ㉠에 대입하면 $d=7$

$\therefore ab+cd=0\times2+1\times7=7$ 답 7

발전 유형 14 치환을 이용한 극한값의 계산 개념 02, 05, 06

분자에 인수분해하기 힘든 복잡한 식이 있으면 분자의 적당한 식을 $f(x)$로 치환하고 미분계수의 정의인 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

0320

$f(x)=x^n+x^2+x$라 하면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=10$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이므로 $f'(1)=n+3$

즉, $n+3=10$에서 $n=7$ 답 ③

0321

$f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$이라 하면 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5$이므로

$f'(1)=8$ 답 ①

0322

$f(x)=x^6+x^2$이라 하면 $f(-1)=2$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^6+x^2-2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}f'(-1)$$

이때 $f'(x)=6x^5+2x$이므로 $f'(-1)=-8$

$\therefore -\frac{1}{2}f'(-1)=4$ 답 4

0323

$\lim_{x\to-2}\frac{x^n-3x^3-19x-30}{x+2}=a$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(x^n-3x^3-19x-30)=0$이다.

즉, $(-2)^n+24+38-30=0$이므로

$(-2)^n=-32$ $\therefore n=5$

$f(x)=x^5-3x^3-19x$라 하면 $f(-2)=30$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^5-3x^3-19x-30}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)$$

이때 $f'(x)=5x^4-9x^2-19$이므로 $f'(-2)=25$

$\therefore a=25$

$\therefore \frac{a}{n}=\frac{25}{5}=5$ 답 ⑤

유형 15 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정 개념 02, 05, 06

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 미정계수를 구한다.

0324

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1+a+b=2 \quad \therefore a+b=1$ ……㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$

이때 $f'(x)=2x+a$이므로

$2+a=-2 \quad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore ab=-4\times5=-20$ 답 -20

0325

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=c=1$

또, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$f(-1)=a-b+c=2 \quad \therefore a-b=1$ ……㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 $f'(-1)=-\frac{3}{2}$

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$-2a+b=-\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2a-2b+c=1-(-1)+1=3$ 답 ④

0326

$f(x)=(3x-4)^2(2x-a)$라 하면

$f'(x)=\{(3x-4)^2\}'(2x-a)+(3x-4)^2(2x-a)'$

$=\{2(3x-4)\times3\}(2x-a)+(3x-4)^2\times2$

$=6(3x-4)(2x-a)+2(3x-4)^2$

$=2(3x-4)(9x-3a-4)$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로 $f'(1)=-4$에서

$2\times(-1)\times(5-3a)=-4$

$5-3a=2 \quad \therefore a=1$ 답 1

0327

$f(x)=(x-a)^4$에서 $f'(x)=4(x-a)^3$

$g(x)=x$에서 $g'(x)=1$

$y=f(x)+g(x)$에서 $y'=f'(x)+g'(x)$이고 곡선 $y=f(x)+g(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(3)+g'(3)=5$

$4(3-a)^3+1=5, (3-a)^3=1$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수) 답 2

유형 16 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성 개념 03

다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq a) \\ g(x) & (x<a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} g(x)=f(a) \Rightarrow f(a)=g(a)$

(2) 함수 $h(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

0328

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1+} (x^2+2)=\lim\limits_{x\to1-} (ax+b)=3$

$\therefore a+b=3$ ……㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$\lim\limits_{h\to0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0+} \frac{\{(1+h)^2+2\}-3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0+} \frac{2h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0+} (2+h)=2$

$\lim\limits_{h\to0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0-} \frac{\{a(1+h)+b\}-3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0-} \frac{\{a(1+h)+b\}-(a+b)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{h\to0-} \frac{ah}{h}=a$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$ 답 2

다른 풀이 $g(x)=x^2+2$ $(x\geq1)$, $h(x)=ax+b$ $(x<1)$라 하면

$g'(x)=2x$ $(x>1)$, $h'(x)=a$ $(x<1)$

(i) $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=h(1)$에서 $3=a+b$ ……㉠

(ii) $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$g'(1)=h'(1)$에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$이므로 $ab=2$

0329

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to2+} ax^2=\lim\limits_{x\to2-} \{(x-1)^2+b\}=4a$

$\therefore 1+b=4a$ ……㉠

또, $f'(2)$가 존재하므로

$\lim\limits_{h\to0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0+} \frac{a(2+h)^2-4a}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0+} \frac{4ah+ah^2}{h}=\lim\limits_{h\to0+} (4a+ah)=4a$

$\lim\limits_{h\to0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0-} \frac{\{(1+h)^2+b\}-4a}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0-} \frac{\{(1+h)^2+b\}-(1+b)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{h\to0-} \frac{2h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0-} (2+h)=2$

$4a=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ 답 ⑤

다른 풀이 $g(x)=ax^2\ (x\geq 2)$, $h(x)=(x-1)^2+b\ (x<2)$라 하면

$g'(x)=2ax\ (x>2)$, $h'(x)=2(x-1)\ (x<2)$

(i) $x=2$에서 연속이므로

$g(2)=h(2)$에서 $4a=1+b$ ……㉠

(ii) $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$g'(2)=h'(2)$에서 $4a=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=1$이므로 $\frac{b}{a}=2$

0330

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to 1+}(ax^2-bx+1)=\lim_{x\to 1-}(x^3+1)=a-b+1$

$a-b+1=2 \quad \therefore a-b=1$ ……㉠ … ❶

또, $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{a(1+h)^2-b(1+h)+1\}-(a-b+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{(2a-b)h+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0+}(2a-b+ah)=2a-b$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\{(1+h)^3+1\}-(a-b+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{(1+h)^3+1\}-2}{h}\ (\because$ ㉠$)$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}(3+3h+h^2)=3$

$\therefore 2a-b=3$ ……㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(1)$이 존재함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $g(x)=ax^2-bx+1\ (x\geq 1)$, $h(x)=x^3+1\ (x<1)$이라 하면

$g'(x)=2ax-b\ (x>1)$, $h'(x)=3x^2\ (x<1)$

(i) $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=h(1)$에서 $a-b+1=2 \quad \therefore a-b=1$ ……㉠

(ii) $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$g'(1)=h'(1)$에서 $2a-b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$

0331

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>a) \\ b-f(x) & (x\leq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$x=a$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}\{b-f(x)\}=b-f(a)$에서

$f(a)=b-f(a) \quad \therefore b=2f(a)$

$\therefore b=2(a^2+6a+5)$ ……㉠

또, $g'(a)$가 존재하므로

$\lim_{x\to a+}g'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a+}(2x+6)=2a+6$

$\lim_{x\to a-}g'(x)=\lim_{x\to a-}\{-f'(x)\}=\lim_{x\to a-}(-2x-6)=-2a-6$

$2a+6=-2a-6 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-8$

$\therefore ab=-3\times(-8)=24$ 답 24

발전 유형 17 도함수와 항등식 개념 05, 06

조건에 맞게 $f(x)$의 식을 세우고, $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 식에 대입한 다음 항등식의 성질을 이용한다.

(1) x에 대한 항등식 $ax^2+bx+c=0$

$\Longleftrightarrow a=0, b=0, c=0$

(2) x에 대한 항등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$

$\Longleftrightarrow a=a', b=b', c=c'$

0332

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a, b, c$는 상수, $a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)=2x^2+4x$

$\therefore ax^2+2ax+b-c=2x^2+4x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2, b-c=0$

또, $f'(-1)=-2a+b=0$이므로 $-4+b=0$

$\therefore b=4, c=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+4$이므로

$f(2)=8+8+4=20$ 답 ②

다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a, b, c$는 상수, $a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이때 주어진 식은 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$(0+1)f'(0)-f(0)=0$에서 $b-c=0$ ……㉠

$(1+1)f'(1)-f(1)=6$에서

$2(2a+b)-(a+b+c)=6, 3a+b-c=6$

$3a=6\ (\because$ ㉠$) \quad \therefore a=2$

또, $f'(-1)=0$이므로

$-2a+b=0 \quad \therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $c=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+4$이므로

$f(2)=8+8+4=20$

0333

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x), f'(x)$를 조건 (가)에 대입하면

$1-x(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2+2$

$\therefore -ax^2+1+c=x^2+2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=-1, c=1$

또, 조건 (나)에서 $f'(1)=2a+b=1$이므로

$-2+b=1 \quad \therefore b=3$

따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로

$f(5)=-25+15+1=-9$ 답 -9

0334

$f(0)=3$이고 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+3$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

모든 실수 x에 대하여 $f'(f(x))=f(f'(x))$이므로 동류항의 계수가 같아야 한다.

$f'(f(x))=2af(x)+b$의 최고차항은 $2a\times ax^2=2a^2x^2$이고

$f(f'(x))=a\{f'(x)\}^2+bf'(x)+3$의 최고차항은

$a\times(2ax)^2=4a^3x^2$이므로 $2a^2=4a^3$에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(f(x))=f(x)+b=\frac{1}{2}x^2+bx+b+3$

$f(f'(x))=\frac{1}{2}\{f'(x)\}^2+bf'(x)+3$

$=\frac{1}{2}(x+b)^2+b(x+b)+3$

$=\frac{1}{2}x^2+2bx+\frac{3}{2}b^2+3$

$b=2b, b=\frac{3}{2}b^2$에서 $b=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$이므로

$f(4)=8+3=11$ 답 ⑤

0335

$f(x)$를 n차 다항함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이므로

$f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$에서

$n+(n-1)=3 \quad \therefore n=2$

즉, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+a$

$f(x), f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3-9x^2+5x+6$

$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3-9x^2+5x+6$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=-9, a^2+2b=5, ab=6$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=-2$

따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로

$f(-3)=9+9-2=16$ 답 16

유형 18 미분법과 다항식의 나눗셈 개념 05, 06

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때

⇨ $f(a)=0, f'(a)=0$

0336

다항식 x^5+ax^3+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5+ax^3+b=(x+1)^2Q(x)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a+b=0 \quad \therefore a-b=-1$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+3ax^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$5+3a=0 \quad \therefore a=-\frac{5}{3}$

$a=-\frac{5}{3}$를 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore ab=-\frac{5}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$ 답 $\frac{10}{9}$

Lecture

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ……㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=a$를 각각 대입하면

$f(a)=0, f'(a)=0$

이를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

다항식 $f(x)$가 $f(a)=0, f'(a)=0$을 만족시킨다.

⟺ $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

0337

다항식 $x^{10}-10x+a$를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}-10x+a=(x-b)^2Q(x)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^{10}-10b+a=0$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-10=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=b$를 대입하면

$10b^9-10=0, b^9=1 \quad \therefore b=1$ ($\because b$는 실수)

$b=1$을 ㉡에 대입하면 $a=9$

$\therefore a+b=9+1=10$ 답 ⑤

Plus 0338~0339 미분법과 다항식의 나눗셈 – 나누어떨어지지 않을 때

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+mx+n$에서

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+m$

⇨ $f(a)=ma+n, f'(a)=m$, 즉 $f(a)=R(a), f'(a)=R'(a)$

0338

다항식 x^4-ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4-ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x-1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=-3$ $\therefore a-b=4$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3-2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4+2a=2$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$ 답 ④

0339

다항식 x^7-x+3을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^7-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+3=a+b$ $\therefore a+b=3$ ……㉡ … ❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$7x^6-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면 $b=-3$ … ❷

따라서 $R(x)=6x-3$이므로

$R(2)=12-3=9$ … ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $R(x)=ax+b$로 놓고 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

STEP 3 내신 마스터

0340

유형 01 평균변화율

|전략| 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

함수 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$에서 x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{2\times(-1)\times(-3)-0}{2}=3$

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(a+2)(a-1)(a-3)-6}{a}$

$\frac{(a+2)(a-1)(a-3)-6}{a}=3$에서

$(a^3-2a^2-5a+6)-6=3a$

$a^3-2a^2-8a=0$, $a(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 ④

0341

유형 03 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1)

|전략| 주어진 식의 분자를 인수분해하여 식을 변형한다.

$f(2)=g(2)=2$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)\}^2-\{g(2+h)\}^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-g(2+h)\}\{f(2+h)+g(2+h)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+g(2)-g(2+h)}{h}$

$\times\lim_{h\to0}\{f(2+h)+g(2+h)\}$

$=\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}\right\}$

$\times\{f(2)+g(2)\}$

$=\{f'(2)-g'(2)\}\times\{f(2)+g(2)\}$

$=(2-3)\times(2+2)=-4$ 답 ①

0342

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

|전략| 분자에 $f(1)$을 빼고 더하여 식을 변형한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-2x^2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-2x^2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{-2x^2+2}{x-1}$ ($\because f(1)=2$)

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}+\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=2\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}+\lim_{x\to1}\{-2(x+1)\}$

$=2f'(1)-4$

$=2\times3-4=2$ 답 ⑤

0343

유형 05 관계식이 주어질 때 미분계수 구하기

|전략| 관계식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수의 정의를 이용한다.

주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+3$ $\therefore f(0)=-3$

이때

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+3-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=1$

이므로

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+3-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=1$

$\therefore f(0)+f'(2)=-3+1=-2$ 답 ④

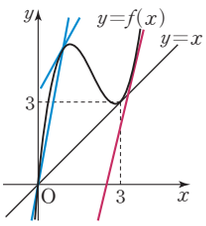
0344

유형 06 미분계수의 기하적 의미

|전략| $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기임을 이용한다.

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점과 점 $(3, 3)$을 지나므로
$f(0)=0, f(3)=3$
즉, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은
$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$ (참)

ㄴ. $t>3$이면 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(t)>1$ (참)



ㄷ. $0<t<3$이면 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(0, 0), (t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로
$f'(t)<\frac{f(t)}{t}$ $\therefore tf'(t)<f(t)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0345

유형 07 미분가능성과 연속성 – 식

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$의 값이 존재하는지 조사한다.

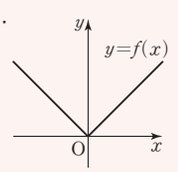
ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

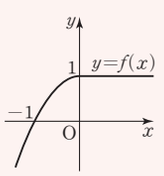
ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-1}{x}=0$
$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(-x^2+1)-1}{x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$이므로 $f'(0)$이 존재한다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

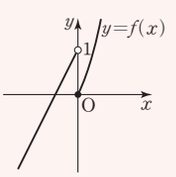
ㄷ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+x)=0$
$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+1)=1$
$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄴ이다. 답 ②

Lecture

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


0346

유형 10 미분법의 공식

|전략| $(-1)^n$은 n이 홀수일 때 -1, n이 짝수일 때 1임을 이용한다.

$f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1$에서
$f'(x)=100x^{99}+99x^{98}+98x^{97}+\cdots+2x+1$
$\therefore f'(-1)=-100+99+(-98)+\cdots+(-2)+1$
$=(-100+99)+(-98+97)+\cdots+(-2+1)$
$=-1\times 50=-50$ 답 ①

0347

유형 11 곱의 미분법

|전략| 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=f(c)=k$를 만족시키면 $f(x)-k=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓을 수 있다.

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 실수)라 하면 방정식 $f(x)=k$, 즉 $f(x)-k=0$의 세 실근이 0, 1, 2이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)-k=x(x-1)(x-2)$
양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$
$\therefore f'(0)+f'(1)+f'(2)=2+(-1)+2=3$ 답 ④

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f(0)=f(1)$에서 $c=1+a+b+c$
$\therefore a+b=-1$ ……㉠
$f(0)=f(2)$에서 $c=8+4a+2b+c$
$\therefore 2a+b=-4$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+c$이므로 $f'(x)=3x^2-6x+2$
$\therefore f'(0)+f'(1)+f'(2)=2+(-1)+2=3$

0348

유형 11 곱의 미분법

|전략| 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는 $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$임을 이용한다.

$x-3=t$라 하면 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로
$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)-1}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{t}=1$
이때 $\lim_{t\to 0} t=0$이므로 $\lim_{t\to 0}\{f(t)-1\}=0$ $\therefore f(0)=1$
$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)=1$
또, $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+2x}{x}=5$에서 $\lim_{x\to 0} x=0$이므로
$\lim_{x\to 0}\{g(x)+2x\}=0$ $\therefore g(0)=0$
$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)+2x}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{g(x)-g(0)}{x}+2\right\}=g'(0)+2=5$
$\therefore g'(0)=3$
따라서 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=1\times 0+1\times 3=3$ 답 ⑤

0349

유형 12 도함수를 이용한 극한값의 계산

|전략| $\frac{1}{n}=h$로 놓고 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$임을 이용한다.

$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times 2$$

$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$

$5f'(1)=30$에서 $f'(1)=6$

이때 $f(x)=2x^4-ax+1$에서 $f'(x)=8x^3-a$이므로

$f'(1)=8-a=6$ $\therefore a=2$

답 ②

0350

유형 15 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이고 $f'(a)$는 $f(x)$의 도함수에 $x=a$를 대입한 것임을 이용한다.

$f'(x)=2x\times(ax+b)+(x^2-1)\times a=3ax^2+2bx-a$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기가 $x=2$에서 최솟값 -13을 가지므로 $a>0$이고

$f'(x)=3a(x-2)^2-13$

$=3ax^2-12ax+12a-13$

$3ax^2+2bx-a=3ax^2-12ax+12a-13$

위의 등식이 모든 x에 대하여 성립하므로

$2b=-12a$, $-a=12a-13$

$\therefore a=1, b=-6$

따라서 $f(x)=(x^2-1)(x-6)$이므로

$f(3)=8\times(-3)=-24$

답 ③

참고 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서

(1) $a>0$ ⇨ $x=m$일 때 최솟값 n을 갖고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$ ⇨ $x=m$일 때 최댓값 n을 갖고, 최솟값은 없다.

0351

유형 16 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고, $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to 1+} 2x=\lim_{x\to 1-}(ax^2+b)=\frac{2+a+b}{2}$$

$$2=a+b=\frac{2+a+b}{2}$$

$\therefore a+b=2$ ……㉠

또, $f(1)=\frac{2+a+b}{2}=\frac{2+2}{2}=2$이고, $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0+} 2=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\{a(1+h)^2+b\}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(a+2ah+ah^2+b)-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{2ah+ah^2}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to 0-}(2a+ah)=2a$$

$2=2a$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=1\times 1=1$

답 ③

0352

유형 17 도함수와 항등식

|전략| 먼저 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2+8x^7=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+\cdots+8a_8(x-1)^7$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2+8\times 2^7=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2+8\times 0=a_1-2a_2+3a_3-\cdots-8a_8$ ……㉢

㉡−㉢을 하면 $1024=2(2a_2+4a_4+6a_6+8a_8)$

$\therefore 2a_2+4a_4+6a_6+8a_8=512$

답 ⑤

0353

유형 18 미분법과 다항식의 나눗셈

|전략| 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=(x-a)^2Q(x)+R(x)$로 나타낼 수 있다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=-4$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-4\}=0$이다. 즉, $f(2)=4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-4$$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a,b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2a+b=4$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=a$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $b=12$

따라서 $R(x)=-4x+12$이므로

$R(1)=-4+12=8$

답 ④

0354

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x^2)-f(9)}{f(x)-f(-3)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\left\{\frac{x-(-3)}{f(x)-f(-3)}\times\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times\frac{x^2-9}{x-(-3)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to -3}\left\{\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}}\times\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times(x-3)\right\}$$

$$=\frac{f'(9)}{f'(-3)}\times(-6)$$ … ❶

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. 이때 … ❷

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$$

$$=-f'(x)$$

즉, $f'(x)=-f'(-x)$이므로

$f'(-3)=-f'(3)=2$, $f'(9)=-f'(-9)=-3$ … ❸

$$\therefore\ \frac{f'(9)}{f'(-3)}\times(-6)=\frac{-3}{2}\times(-6)=9$$ … ❹

답 9

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	3점
❷ $f(x)=f(-x)$임을 알아낼 수 있다.	1점
❸ $f'(x)=-f'(-x)$임을 알고, $f'(-3)$, $f'(9)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	1점

0355

유형 11 곱의 미분법

|전략| $h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(0)=f(0)g(0)=-2\times 1=-2$ ($\because$ 조건 (가)) … ❶

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$$

$$=h'(0)$$

$$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

$$=4\times 1+(-2)\times g'(0)\ (\because \text{조건 (가)})$$

$$=4-2g'(0)$$

즉, $4-2g'(0)=0$에서 $g'(0)=2$ … ❷

답 2

채점 기준	배점
❶ $f(0)g(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $g'(0)$의 값을 구할 수 있다.	4점

0356

유형 16 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to 1+}(x^3+ax^2)=\lim_{x\to 1-}(bx+1)=1+a$$

$1+a=b+1$ $\quad\therefore\ a=b$ ……㉠ … ❶

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(2a+3)h+(a+3)h^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\{(2a+3)+(a+3)h+h^2\}=2a+3$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\{b(1+h)+1\}-(b+1)}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{bh}{h}=b$$

$\therefore\ 2a+3=b$ ……㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

$\therefore\ ab=-3\times(-3)=9$ … ❸

답 9

채점 기준	배점
❶ $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❷ $f'(1)$이 존재함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

다른 풀이 $g(x)=x^3+ax^2\ (x\geq 1)$, $h(x)=bx+1\ (x<1)$이라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax\ (x>1)$, $h'(x)=b\ (x<1)$

$x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재하므로

$g(1)=h(1)$에서 $1+a=b+1$ $\quad\therefore\ a=b$ ……㉠

$g'(1)=h'(1)$에서 $3+2a=b$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$ $\quad\therefore\ ab=9$

0357

유형 14 치환을 이용한 극한값의 계산

|전략| $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-x^3-x-6}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^n-x^3-x-6)=0$

$2^n-8-2-6=0$, $2^n=16$ $\quad\therefore\ n=4$

(2) $f(x)=x^4-x^3-x$라 하면 $f(2)=6$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-x^3-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=4x^3-3x^2-1$이므로

$f'(2)=32-12-1=19$

답 (1) 4 (2) 19

채점 기준	배점
(1) n의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-x^3-x-6}{x-2}$의 값을 구할 수 있다.	6점

0358

유형 17 도함수와 항등식

|전략| 함수 $f(x)$가 n차 다항함수이면 $g(x)$는 $(n-1)$차 다항함수임을 이용한다.

$f(x)g(x)=f(x)+g(x)+2x^3-4x^2+2x-1$에서

$f(x)g(x)-f(x)-g(x)=2x^3-4x^2+2x-1$ ……㉠

(1) $f(x)$를 n차 다항함수라 하면 $f'(x)=g(x)$에서 $g(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이다.

㉠의 양변의 차수를 비교하면

$n+(n-1)=3$ $\therefore n=2$

(2) $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라 하면

$g(x)=2ax+b$

$f(x), g(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(ax^2+bx+c)(2ax+b)$

$=(ax^2+bx+c)+(2ax+b)+2x^3-4x^2+2x-1$

$2a^2x^3+3abx^2+(2ac+b^2)x+bc$

$=2x^3+(a-4)x^2+(2a+b+2)x+b+c-1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=2, 3ab=a-4, 2ac+b^2=2a+b+2, bc=b+c-1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

(3) $f(x)=x^2-x+1$이므로

$f(1)=1-1+1=1$

답 (1) 2 (2) $f(x)=x^2-x+1$ (3) 1

채점 기준	배점
(1) $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	4점
(2) $f(x)$를 구할 수 있다.	6점
(3) $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점

참고 (1) ㉠에서 $n=1$이면 좌변은 일차함수 또는 상수함수이고 우변은 삼차함수가 되어 모순이다.

따라서 $n\geq2$인 자연수이다.

(2) $2a^2=2$에서 $a=-1$일 때

$3ab=a-4, 2ac+b^2=2a+b+2$에서 $b=\frac{5}{3}, c=\frac{5}{9}$

이때 $bc=b+c-1$이 성립하지 않으므로 $a\neq-1$

창의·융합 실력 마스터

0359

|전략| $f(x)\geq0$이면 $f(x)+|f(x)|=2f(x)$이고 $f(x)<0$이면 $f(x)+|f(x)|=0$임을 이용한다.

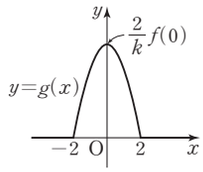
(i) $-x^2+4\geq0$, 즉 $-2\leq x\leq2$일 때

$g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{k}=\frac{2}{k}f(x)$

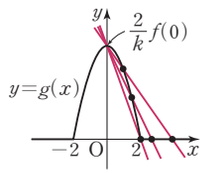
(ii) $-x^2+4<0$, 즉 $-2<x<2$일 때

$g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{k}=0$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다. 이때 함수 $g(x)$에서 x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $(0, g(0)), (t, g(t))$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 평균변화율이 정수가 되도록 하는 양수 t의 개수가 5이려면 [그림 2]와 같이 두 점 $(0, g(0)), (2, 0)$을 지나는 직선의 기울기가 -3이어야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

$\frac{0-g(0)}{2-0}=\frac{-\frac{2}{k}f(0)}{2}=-\frac{4}{k}=-3$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

답 ③

참고 두 점 $(0, g(0)), (2, 0)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하자.

m이 정수가 아니면 구하는 양수 t의 개수는 0 또는 짝수이므로 m은 정수이어야 한다.

이때 [그림 2]에서 양수 t의 값이 증가하면 두 점 $(0, g(0)), (t, g(t))$를 지나는 직선의 기울기도 증가하므로 구하는 양수 t의 개수는

$m=-1$이면 1, $m=-2$이면 3, $m=-3$이면 5, $m=-4$이면 7, …이다.

0360

|전략| $g(x)<f(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$임을 이용한다.

$-x^2-2<\frac{f(3+x)-f(3-x)}{x}<x^2-2$에서

$\lim_{x\to0}(-x^2-2)=-2, \lim_{x\to0}(x^2-2)=-2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3-x)}{x}=-2$

이때

$\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)+f(3)-f(3-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\{f(3+x)-f(3)\}-\{f(3-x)-f(3)\}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(3-x)-f(3)}{-x}$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

즉, $2f'(3)=-2$에서 $f'(3)=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는 -1이다. 답 -1

0361

|전략| 방정식 $f(x)=k$의 세 실근이 α, β, γ임을 이용한다.

방정식 $f(x)=k$, 즉 $f(x)-k=0$의 세 실근이 α, β, γ이고

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$ 답 ④

0362

|전략| $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓고 각각의 참, 거짓을 판별한다.

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

ㄱ. $f'(a)+f'(b)=(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$

$=(a-b)^2>0$

$\therefore f'(a)>-f'(b)$ (거짓)

ㄴ. $f'(b)+f'(c)=(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$

$=(b-c)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(a)=f'(c)$이면 $(a-b)(a-c)=(c-a)(c-b)$

$a\neq c$이므로 $a-b=b-c,\ 2b=a+c$ $\therefore b=\dfrac{a+c}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0363

|전략| 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는 미분계수 $g'(2)$와 같다.

다항함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, g(2))$에서 직선 $y=-x+3$과 접하므로 $g(2)=1,\ g'(2)=-1$

$(x^2-4)f(x)=g(x)-1$에서

$x\neq\pm2$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)-1}{x^2-4}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\dfrac{1}{x+2}\right\}$

$=g'(2)\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$ 답 ③

0364

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=0,\ x=1$에서 미분가능하므로 $x=0,\ x=1$에서 연속임을 이용한다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로

$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f(1)=2,\ f'(1)=1$

(i) 함수 $f(x)$가 일차함수이면 $f'(0)=0,\ f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.

(ii) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이면

$f(0)=c=0,\ f(1)=a+b+c=2$ $\therefore a+b=2$

또, $f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0,\ f'(1)=2a+b=1$

이때 $a+b=2,\ b=0,\ 2a+b=1$을 모두 만족시키는 상수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이면

$f(0)=d=0,\ f(1)=a+b+c+d=2$ $\therefore a+b+c=2$

또, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=c=0,\ f'(1)=3a+2b+c=1$

이때 $a+b=2,\ 3a+2b=1$을 모두 만족시키는 상수 a, b는

$a=-3,\ b=5$

$\therefore f(x)=-3x^3+5x^2$

따라서 $h(x)=-3x^3+5x^2$이므로

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{7}{8}$ 답 $\dfrac{7}{8}$

4 도함수의 활용 (1)

본책 60~73쪽

STEP 1 개념 마스터

0365

$f(x)=x^3-4x^2-8$이라 하면 $f'(x)=3x^2-8x$이므로

점 $(2, -16)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=3\times2^2-8\times2=-4$ 답 -4

0366

$f(x)=3x^4-5x+2$라 하면 $f'(x)=12x^3-5$이므로

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-5$ 답 -5

0367

$f(x)=x^{100}-1$이라 하면 $f'(x)=100x^{99}$이므로

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=100\times1^{99}=100$ 답 100

0368

$f(x)=-x^2+7x-10$이라 하면 $f'(x)=-2x+7$이므로

점 $(1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-2+7=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-4)=5(x-1)$

$\therefore y=5x-9$ 답 $y=5x-9$

0369

$f(x)=x^4-2x+1$이라 하면 $f'(x)=4x^3-2$이므로

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+1$ 답 $y=-2x+1$

0370

$f(x)=2x^3-5x-1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-5$이므로

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=6-5=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=1\times\{x-(-1)\}$

$\therefore y=x+3$ 답 $y=x+3$

0371

$f(x)=x^3-3x$라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=9$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{9}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{9}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{1}{9}x+\frac{20}{9}$ 답 $y=-\frac{1}{9}x+\frac{20}{9}$

0372

$f(x)=3x^2-9x-6$이라 하면 $f'(x)=6x-9$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2-9t-6)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=6t-9=3$에서 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, -12)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-12)=3(x-2)$ $\therefore y=3x-18$ 답 $y=3x-18$

0373

$f(x)=x^3-2$라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2)라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2=3$에서 $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3), (1, -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=3\{x-(-1)\}$ 또는 $y-(-1)=3(x-1)$

$\therefore y=3x$ 또는 $y=3x-4$ 답 $y=3x$ 또는 $y=3x-4$

0374

$f(x)=-x^3+4x$라 하면 $f'(x)=-3x^2+4$

직선 $y=x-1$과 평행하므로 구하는 접선의 기울기는 1이다.

이때 접점의 좌표를 $(t, -t^3+4t)$라 하면

$-3t^2+4=1$에서 $3t^2=3$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3), (1, 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=1\times\{x-(-1)\}$ 또는 $y-3=1\times(x-1)$

$\therefore y=x-2$ 또는 $y=x+2$ 답 $y=x-2$ 또는 $y=x+2$

0375

$f(x)=x^2+x$라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=(2t+1)-t^2$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 $t=0$, $t=2$를 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x$ 또는 $y=5x-4$ 답 $y=x$ 또는 $y=5x-4$

0376

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

따라서 $t=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x+2$ 답 $y=x+2$

0377

(1) $f(x)=x^3-2x^2+a$, $g(x)=-x^2+bx$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x$, $g'(x)=-2x+b$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=2$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(2)=g(2)$이고, $f'(2)=g'(2)$이다.

$f(2)=g(2)$에서 $a=-4+2b$ …… ㉠

$f'(2)=g'(2)$에서 $4=-4+b$ $\therefore b=8$

$\therefore a=12$ ($\because$ ㉠)

(2) $f(2)=g(2)=12$, $f'(2)=g'(2)=4$이므로

두 곡선의 공통인 접선의 방정식은

$y-12=4(x-2)$ $\therefore y=4x+4$

답 (1) $a=12, b=8$ (2) $y=4x+4$

0378

함수 $f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$이므로 $f'(c)=2c-4=0$

$\therefore c=2$ 답 2

0379

함수 $f(x)=x^2-2x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $f'(c)=2c-2=0$

$\therefore c=1$ 답 1

0380

함수 $f(x)=x^2-6x+1$은 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(5)=-4$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-6$이므로 $f'(c)=2c-6=0$

$\therefore c=3$ 답 3

0381

함수 $f(x)=3x^2+2x+1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{6-2}{2}=2=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=6x+2$이므로 $f'(c)=6c+2=2$

$\therefore c=0$ 답 0

0382

함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-12-0}{4}=-3=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+1$이므로 $f'(c)=-2c+1=-3$

$\therefore c=2$ 답 2

0383

함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{21-0}{3}=7=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(c)=3c^2-2=7$

$3c^2=9$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$) 답 $\sqrt{3}$

0384

$a<x\le b$인 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린구간 (a, x)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c)=0$이므로

$f(x)-f(a)=0$ $\therefore f(x)=f(a)$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

답 풀이 참조

0385

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

이때 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

즉, $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로

$h(x)=f(x)-g(x)=C$ (C는 상수)

따라서 $f(x)=g(x)+C$ (C는 상수)이다. 답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터

유형 01 접선의 기울기 개념 01

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기

⇨ $f'(a)$

0386

$f(x)=2x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=4x+a$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=4+a=-1$ $\therefore a=-5$

이때 점 $(1, 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=-3+b=0$ $\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-(-5)=8$ 답 ②

0387

$f(x)=x^4+ax^2+4$에서 $f'(x)=4x^3+2ax$

점 $(2, f(2))$에서의 접선이 x축과 평행하므로 접선의 기울기는 0이다.

$f'(2)=32+4a=0$ $\therefore a=-8$ 답 ②

참고 x축과 평행한 직선의 기울기는 0이다.

0388

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $(-1, 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=-1+a-b+c=0$ $\therefore a-b+c=1$ …… ㉠

이때 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(-1)=3-2a+b=2$ $\therefore 2a-b=1$ …… ㉡

또, $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(1)=3+2a+b=-2$ $\therefore 2a+b=-5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

$a=-1$, $b=-3$을 ㉠에 대입하면 $2+c=1$ $\therefore c=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-3x-1$이므로

$f(2)=8-4-6-1=-3$ 답 ③

Plus+ 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$의 최대·최소를 이용한다. 특히 $f(x)$가 삼차함수인 경우 $f'(x)$는 이차함수이므로 이차함수의 식을 완전제곱식으로 변형하여 최대·최소를 구하면 된다.

0389

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-2)^2+3$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 최댓값 3을 갖는다.

$\therefore k=3$

따라서 기울기가 최대일 때의 접점의 좌표는 $(2, -1)$이므로 $b=2$

이때 점 $(2, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=-2+a=-1$ $\therefore a=1$

$\therefore abk=1\times2\times3=6$ 답 6

유형 02 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 개념 02

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표 $(a, f(a))$가 주어질 때
(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0390

$f(x)=x^3-2x^2+2x-3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+2$
점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-4+2=1$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-2)=1\times(x-1)$ $\therefore y=x-3$
따라서 $a=1, b=-3$이므로 $a-b=1-(-3)=4$ 답 ⑤

0391

$f(x)=2x^3-x^2+1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-2x$
점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6-2=4$
이므로 접선의 방정식은
$y-2=4(x-1)$ $\therefore y=4x-2$
이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로 $a=-2$ 답 ②

0392

$f(x)=(x^2-1)(2x+1)$이라 하면
$f'(x)=2x(2x+1)+2(x^2-1)=6x^2+2x-2$
점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6+2-2=6$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-0=6(x-1)$ $\therefore y=6x-6$ 답 ⑤

0393

$f(x)=x^3+4x^2+3x$라 하면 $f'(x)=3x^2+8x+3$
점 $(-3, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-3)=27-24+3=6$
이므로 접선 l의 방정식은
$y-0=6\{x-(-3)\}$ $\therefore y=6x+18$ … ❶
또, 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3-8+3=-2$
이므로 접선 m의 방정식은
$y-0=-2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-2x-2$ … ❷
즉, 두 직선 l, m의 교점의 x좌표는
$6x+18=-2x-2$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$
이때 $y=3$이므로 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$이다.
따라서 $a=-\frac{5}{2}, b=3$이므로 $a+b=-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{2}$ … ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 $(-3, 0)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0394

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^2-1}=1$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로
$\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$이다. 즉, $f(1)=4$이므로
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$
$\frac{1}{2}f'(1)=1$에서 $f'(1)=2$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은
$y-4=2(x-1)$ $\therefore y=2x+2$
따라서 $a=2, b=2$이므로 $ab=2\times2=4$ 답 ④

0395

$f(x)=x^3+ax^2+2(a+1)x$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+2(a+1)$
이때 $y=x^3+ax^2+2(a+1)x+a$에서
$a(x+1)^2+(x^3+2x-y)=0$
$(x+1)^2=0, x^3+2x-y=0$에서 $x=-1, y=-3$
즉, 곡선 $y=f(x)$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -3)$을 지난다.
$\therefore$ P$(-1, -3)$
점 P$(-1, -3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3-2a+2(a+1)=5$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-3)=5\{x-(-1)\}$ $\therefore y=5x+2$
따라서 구하는 접선의 y절편은 2이다. 답 ④

Lecture
곡선 $y=f(x)$가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $f(x)-y=0$의 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리한 다음 a에 대한 항등식을 이용하여 구한다.

0396

$g(x)=(x^2+2x-2)f(x)$라 하면
$g'(x)=(2x+2)f(x)+(x^2+2x-2)f'(x)$
이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는
$g'(1)=4f(1)+f'(1)$
이때 주어진 그래프에서 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이므로
$g(1)=f(1)=1, g'(1)=4\times1+0=4$
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은
$y-1=4(x-1)$ $\therefore y=4x-3$ 답 $y=4x-3$

Lecture
미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기와 같다.
따라서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(1)=0$이다.

0397

$g(x)=(x^2+1)f(x)-4x$ ……㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=2f(1)-4$

이때 조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$이다. 즉, $f(1)=g(1)$이므로

$g(1)=2g(1)-4$ $\therefore g(1)=4$

또,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$$
$$=f'(1)-g'(1)$$

즉, $f'(1)-g'(1)=3$이므로 $f'(1)=g'(1)+3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-4$이므로

$g'(1)=2f(1)+2f'(1)-4$

$=2f(1)+2\{g'(1)+3\}-4$

$=2g'(1)+10$ ($\because f(1)=4$)

$\therefore g'(1)=-10$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-4=-10(x-1)$ $\therefore y=-10x+14$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=-10a+14$ $\therefore a=\frac{7}{5}$ 답 ②

유형 03 접선에 수직인 직선의 방정식 개념 02

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식

⇨ $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq0$)

0398

$f(x)=x^3-2x^2+3x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore x+2y-7=0$ 답 ②

0399

$f(x)=3x^3+ax-2$라 하면 $f'(x)=9x^2+a$

점 $(0, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=a$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{a}(x-0)$ $\therefore y=-\frac{1}{a}x-2$

이 직선의 x절편이 6이므로

$0=-\frac{6}{a}-2$ $\therefore a=-3$ 답 ③

0400

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$

$x=-1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-2a$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3-2a}$이다.

$-\frac{1}{3-2a}=-\frac{1}{4}$에서 $3-2a=4$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

또, 점 $(1, 5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$1+a+b=5$, $1-\frac{1}{2}+b=5$ $\therefore b=\frac{9}{2}$

$\therefore b-a=\frac{9}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=5$ 답 5

0401

두 곡선 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=ax^2$의 교점 P의 x좌표를 t ($t>0$)라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2-1=at^2$ ……㉠

또, $f'(x)=2x$, $g'(x)=2ax$이고, 점 P에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$2t\times2at=-1$ $\therefore at^2=-\frac{1}{4}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t^2-1=-\frac{1}{4}$ $\therefore t^2=\frac{3}{4}$

$t^2=\frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면 $a=-\frac{1}{3}$ ($t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because t>0$))

답 ③

유형 04 곡선과 접선의 교점 개념 02

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표

⇨ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 (단, $x\neq a$)

0402

$f(x)=x^3+2x^2-3x-6$이라 하면 $f'(x)=3x^2+4x-3$

점 $(0, -6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-3$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-3(x-0)$ $\therefore y=-3x-6$

직선 $y=-3x-6$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-3x-6=-3x-6$에서

$x^3+2x^2=0$, $x^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $a=-2$, $b=0$ ($b=f(-2)=-8+8+6-6=0$)이므로

$\therefore b-a=0-(-2)=2$ 답 ④

0403

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 P$(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-1=1\times\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+2$

직선 $y=x+2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는
$x^3-2x=x+2$에서 $x^3-3x-2=0$
$(x-2)(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2, 4)$이므로 선분 PQ의 길이는
$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

Lecture
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0404
$f(x)=x^3+ax^2-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax-2$
점 $O(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은
$y=-2x$
직선 $y=-2x$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는
$x^3+ax^2-2x=-2x$에서 $x^3+ax^2=0$
$x^2(x+a)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=-a$
따라서 점 A의 좌표는 $(-a, 2a)$이고 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(-a)=3a^2-2a^2-2=a^2-2$
$-2+(a^2-2)=0$에서 $a^2=4$
$\therefore a=2$ ($\because a>\sqrt{2}$) 답 ①

0405
$f(x)=-x^3+5x-3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$
점 $P(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$
$\therefore Q(0, -1)$
또, 직선 $y=2x-1$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는
$-x^3+5x-3=2x-1$에서 $x^3-3x+2=0$
$(x+2)(x-1)^2=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
$\therefore R(-2, -5)$
$\overline{PQ}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$
$\overline{QR}=\sqrt{(-2-0)^2+\{-5-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}=\sqrt{5}:2\sqrt{5}=1:2$ 답 ①

유형 05 기울기가 주어진 접선의 방정식 개념 03

(1) 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 m이 주어질 때
(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(iii) $y-f(t)=m(x-t)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.
(2) 기울기가 직접적으로 주어지지 않은 경우
① 평행한 두 직선은 기울기가 서로 같고, 수직인 두 직선은 기울기의 곱이 -1이다.
② 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ ($0^\circ\le\theta<90^\circ$)가 주어지면 (기울기)$=\tan\theta$임을 이용한다.

0406
$x-4y-4=0$에서 $y=\frac{1}{4}x-1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.
$f(x)=x^3-3x^2-x-2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-1$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-t-2)라 하면 접선의 기울기는 -4이므로
$f'(t)=3t^2-6t-1=-4$
$3t^2-6t+3=0$, $t^2-2t+1=0$
$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$
즉, 접점의 좌표는 $(1, -5)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-5)=-4(x-1)$ $\therefore y=-4x-1$
따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로
$a-b=-4-(-1)=-3$ 답 -3

0407
$f(x)=x^2-3x+5$라 하면 $f'(x)=2x-3$
접점의 좌표를 (t, t^2-3t+5)라 하면 직선 $y=x+2$에 평행한 직선의 기울기는 1이므로
$f'(t)=2t-3=1$ $\therefore t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-3=1\times(x-2)$ $\therefore y=x+1$
따라서 직선 $y=x+1$ 위의 점인 것은 ② $(0, 1)$이다. 답 ②

0408
$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$라 하면 $f'(x)=-x^2-2x$
접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{2}{3}\right)$라 하면 접선의 기울기는
$\tan 45^\circ=1$이므로
$f'(t)=-t^2-2t=1$, $t^2+2t+1=0$
$(t+1)^2=0$ $\therefore t=-1$
즉, 접점의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-0=1\times\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+1$
따라서 $a=1$, $b=1$이므로
$a+b=1+1=2$ 답 ①

0409
$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(1)=3$
즉, 직선 l의 기울기가 3이므로 직선 l에 평행한 직선 m의 기울기도 3이다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 (t, t^3)이라 하면
$f'(t)=3t^2=3$에서 $t^2=1$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
그런데 $t=1$이면 두 직선 l, m이 일치하므로 $t=-1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1, -1)$이므로 구하는 직선 m의 방정식은
$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$
$\therefore y=3x+2$ 답 $y=3x+2$

발전 유형 06 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용 개념 03

(1) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d

⇨ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값

(i) 주어진 직선과 평행한 곡선의 접선의 접점의 좌표를 찾는다.

(ii) 이 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값이다.

0410

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x+3$이라 하면 $f'(x)=x^2-4x+1$

접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{1}{3}t^3-2t^2+t+3\right)$이라 하면

$f'(t)=t^2-4t+1=-2, t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, 접점의 좌표는 $\left(1, \dfrac{7}{3}\right)$ 또는 $(3, -3)$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{7}{3}=-2(x-1)$ 또는 $y-(-3)=-2(x-3)$

$\therefore 6x+3y-13=0$ 또는 $2x+y-3=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $6x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\dfrac{|0+9-13|}{\sqrt{6^2+3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$

답 $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$

0411

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-3x-4$

접점의 좌표를 $\left(t, t^3-\dfrac{3}{2}t^2-4t\right)$라 하면 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=3t^2-3t-4=2, 3t^2-3t-6=0$

$3(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉, 접점의 좌표는 $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ 또는 $(2, -6)$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{3}{2}=2\{x-(-1)\}$ 또는 $y-(-6)=2(x-2)$

$\therefore 4x-2y+7=0$ 또는 $2x-y-10=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y-10=0$ 위의 한 점 $(5, 0)$과 직선 $4x-2y+7=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\dfrac{|20-0+7|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{27}{2\sqrt{5}}=\dfrac{27\sqrt{5}}{10}$

답 ②

0412

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=4x-10$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=2t=4$ $\therefore t=2$ … ❶

따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이고, 점 $(2, 4)$와 직선 $y=4x-10$, 즉 $4x-y-10=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로 … ❷

$\dfrac{|8-4-10|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{17}}=\dfrac{6\sqrt{17}}{17}$ … ❸

답 $\dfrac{6\sqrt{17}}{17}$

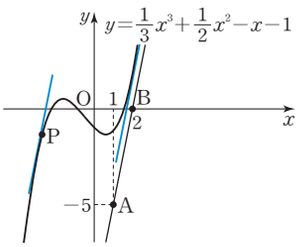
채점 기준	비율
❶ 직선과 평행한 접선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 접점과 직선과의 거리가 최소임을 알아낼 수 있다.	30%
❸ 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

0413

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x-1$이라 하면

$f'(x)=x^2+x-1$

점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 AB의 기울기인 $\dfrac{0-(-5)}{2-1}=5$이어야 한다.



점 P의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=t^2+t-1=5$

$t^2+t-6=0, (t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

이때 $t=2$이면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이므로

$t=-3$

$f(-3)=-9+\dfrac{9}{2}+3-1=-\dfrac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-3, -\dfrac{5}{2}\right)$이므로

$a=-3, b=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore ab=-3\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$

답 ⑤

유형 07 접선을 이용한 미정계수의 결정 개념 02, 03

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$일 때

⇨ $f(a)=b, f'(a)=m$

(2) 곡선과 직선이 접할 때 미정계수 구하기

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

(ii) 접선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$가 주어진 직선과 일치함을 이용하여 미정계수를 구한다.

0414

점 $(1, b)$가 곡선 $y=x^3+ax-1$ 위의 점이므로

$b=1+a-1$ $\therefore a=b$ …… ㉠

또, 점 $(1, b)$가 직선 $y=5x+c$ 위의 점이므로

$b=5+c$ …… ㉡

$f(x)=x^3+ax-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(1, b)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(1)=3+a=5$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$b=2$를 ㉡에 대입하면 $c=-3$

$\therefore a+b+c=2+2+(-3)=1$

답 ③

0415

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

점 $(0, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(0)=d=1$

또, 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(0)=c=1$

점 $(3, 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(3)=27a+9b+3c+d=4$

$\therefore 3a+b=0$ ····· ㉠

또, 점 $(3, 4)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(3)=27a+6b+c=-2$

$\therefore 9a+2b=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3}$, $b=1$

$\therefore 3abcd=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times1\times1\times1=-1$ 답 ②

0416

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 $(-2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-4\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-4x-4$

$g(x)=x^3+ax-2$라 하면 $g'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 (t, t^3+at-2)라 하면 접선의 기울기는

$g'(t)=3t^2+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at-2)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3-2$

이 직선이 직선 $y=-4x-4$와 일치해야 하므로

$3t^2+a=-4$ ····· ㉠

$-2t^3-2=-4$ ····· ㉡

㉡에서 $-2t^3=-2$, $t^3=1$

$\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$3+a=-4$ $\therefore a=-7$ 답 -7

0417

$f(x)=x^3-kx^2+kx-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2kx+k$

접점의 좌표를 (t, t^3-kt^2+kt-1)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2kt+k$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-kt^2+kt-1)=(3t^2-2kt+k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2kt+k)x-2t^3+kt^2-1$

이 직선이 직선 $y=x-1$과 일치해야 하므로

$3t^2-2kt+k=1$ ····· ㉠

$-2t^3+kt^2-1=-1$ ····· ㉡

㉡에서 $2t^3-kt^2=0$, $t^2(2t-k)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{k}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 $k=1$

(ii) $t=\frac{k}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}k^2-k^2+k=1$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 $1+2=3$ 답 3

유형 08 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식 개념 04

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1)이 주어질 때

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 (x_1, y_1)의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.

(iii) 구한 t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0418

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+t+1)=(3t^2-6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+1)x-2t^3+3t^2+1$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=3t^2-6t+1-2t^3+3t^2+1$

$t^3-3t^2+3t=0$, $t(t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=0$ ($\because t^2-3t+3>0$)

$t=0$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x+1$ 답 ①

0419

$f(x)=x^2-x$라 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (t, t^2-t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t-1$ ····· ㉠

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$ $\therefore y=(2t-1)x-t^2$

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=2t-1-t^2$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

$t=0$ 또는 $t=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$-1+3=2$ 답 2

다른 풀이 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y-(-1)=m(x-1)$, 즉 $y=mx-m-1$이라 하면 이 직선이 곡선 $y=x^2-x$에 접하므로 두 식을 연립하면

$x^2-x=mx-m-1$ $\therefore x^2-(1+m)x+m+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$에서

$(1+m)^2-4(m+1)=0$, $m^2-2m-3=0$

그런데 위의 식은 접선의 기울기 m에 대한 이차방정식이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 합은 2이다.

0420

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$ $\therefore y=3t^2x-2t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x+2$

이때 이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로 $k=-4$ 답 ②

0421

$f(x)=x^3+2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t, t^3+2t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+2)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+2$ … ❶

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+2$, $t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수) … ❷

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 5)$이므로 선분 OP의 길이는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ … ❸

답 $\sqrt{26}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 점 P의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50%
❷ 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 선분 OP의 길이를 구할 수 있다.	30%

0422

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+12t^2-18t+2$ $\therefore t^3-6t^2+9t-1=0$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 구하는 세 접점의 x좌표의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다. 답 ⑤

0423

$f(x)=x^2-1$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2-1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2-1$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1, -4)$를 지나므로

$-4=2t-t^2-1$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$\therefore \mathrm{Q}(-1, 0), \mathrm{R}(3, 8)$

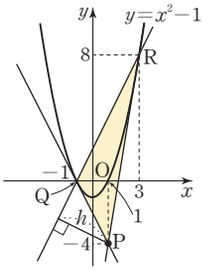
직선 QR의 방정식은

$y-0=\frac{8-0}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore 2x-y+2=0$

점 $\mathrm{P}(1, -4)$와 직선 QR 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|2+4+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$



이때 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$

이므로

$\triangle \mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times h=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$ 답 ③

0424

$f(x)=x^2+k$라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2+k)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+k)=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2+k$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-1, -2)$를 지나므로

$-2=-2t-t^2+k$ $\therefore t^2+2t-k-2=0$ …… ㉠

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-k-2$ …… ㉡

이때 α, β는 두 접점 B, C의 x좌표이므로 $\mathrm{B}(\alpha, \alpha^2+k)$, $\mathrm{C}(\beta, \beta^2+k)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta-1}{3}, \frac{\alpha^2+k+\beta^2+k-2}{3}\right)$

이 점이 점 $(-1, 6)$과 같으므로 $\frac{\alpha^2+k+\beta^2+k-2}{3}=6$에서

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2k-2=18$

$(-2)^2-2(-k-2)+2k-2=18$ ($\because$ ㉡)

$4k+6=18$ $\therefore k=3$ 답 ③

유형 09 두 곡선의 공통인 접선 개념 05

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 공통인 접선을 가질 때

(1) $x=a$에서 두 곡선이 만난다. ⇨ $f(a)=g(a)$

(2) $x=a$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ⇨ $f'(a)=g'(a)$

0425

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+c$에서

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=2$에서 $1+a=2$ $\therefore a=1$

$g(1)=2$에서 $b+c=2$ …… ㉠

점 $(1, 2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=2b$ $\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $c=0$

$\therefore a-b+c=1-2+0=-1$ 답 ②

0426

$f(x)=x^3+ax+2, g(x)=x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at+2=t^2+1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=2t$ …… ㉡

㉡에서 $a=2t-3t^2$을 ㉠에 대입하면

$t^3+(2t-3t^2)t+2=t^2+1$

$2t^3-t^2-1=0, (t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 2t^2+t+1>0)$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$ 답 -1

0427

$f(x)=-x^2+2, g(x)=ax^2+3x$에서

$f'(x)=-2x, g'(x)=2ax+3$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $-t^2+2=at^2+3t$ …… ㉠

$x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 각각

$m_1=f'(t)=-2t, m_2=g'(t)=2at+3$

이때 $m_1-m_2=1$이므로

$-2t-2at-3=1 \quad \therefore at=-t-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^2+2=t(-t-2)+3t \quad \therefore t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$2a=-4 \quad \therefore a=-2$ 답 -2

Plus+ 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$가 공통인 접선을 갖지만 접점이 다른 경우 각 접점에서의 접선이 서로 일치함을 이용한다.

0428

$f(x)=x^3-x^2+ax, g(x)=-x^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2-2x+a, g'(x)=-2x+b$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -a-2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=a+5$

이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-a-2)=(a+5)\{x-(-1)\}$

$\therefore y=(a+5)x+3$ …… ㉠

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4+2b+c)$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=b-4$

이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-4+2b+c)=(b-4)(x-2)$

$\therefore y=(b-4)x+c+4$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$a+5=b-4, 3=c+4$

$\therefore a-b=-9, c=-1$

$\therefore f(1)-g(1)=a-(-1+b+c)=a-b-c+1$

$=-9+1+1=-7$ 답 -7

유형 10 곡선과 원의 접선 개념 02-04

곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때

(1) (원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)

(2) 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

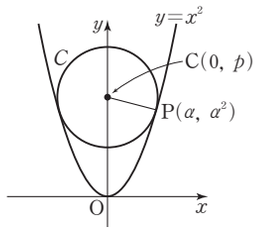
0429

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점을 $P(\alpha, \alpha^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=2\alpha$

이때 원의 중심을 C라 하면 점 $C(0, p)$와 점 P를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\alpha^2-p}{\alpha-0}=\frac{\alpha^2-p}{\alpha}$



이고, 직선 CP와 접선은 서로 수직이므로

$2\alpha\times\frac{\alpha^2-p}{\alpha}=-1, 2(\alpha^2-p)=-1$

$\therefore \alpha^2=p-\frac{1}{2}$ …… ㉠

또, 원 C의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\alpha^2-p)^2}=2$

$\therefore \alpha^2+(\alpha^2-p)^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(p-\frac{1}{2}\right)+\left(p-\frac{1}{2}-p\right)^2=4 \quad \therefore p=\frac{17}{4}$ 답 ④

0430

$f(x)=(x-1)^2$이라 하면 $f'(x)=2(x-1)$

접점을 $P(t, (t-1)^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2(t-1)$

이때 원의 중심 $(4, 0)$과 점 P를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{(t-1)^2-0}{t-4}=\frac{(t-1)^2}{t-4}$

이고, 이 직선과 접선은 서로 수직이므로

$\frac{(t-1)^2}{t-4}\times 2(t-1)=-1, 2t^3-6t^2+7t-6=0$

$(t-2)(2t^2-2t+3)=0$

$\therefore t=2\ (\because 2t^2-2t+3>0)$

즉, 곡선 $y=(x-1)^2$과 원의 접점의 좌표는 $P(2, 1)$이다.

이때 점 P가 원 위의 점이므로 원의 반지름의 길이는

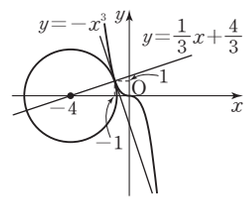
$\sqrt{(4-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는 5π 답 ⑤

0431

$f(x)=-x^3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-1)=-3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.



따라서 점 $(-1, 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}\{x-(-1)\}$ $\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

이 직선이 원의 중심 $(a, 0)$을 지나야 하므로

$0=\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}$ $\therefore a=-4$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)=-x^3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-3$

원의 중심 $(a, 0)$과 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-0}{-1-a}=\frac{1}{-1-a}$

이때 이 직선과 접선이 서로 수직이므로

$-3\times\frac{1}{-1-a}=-1$ $\therefore a=-4$

0432

$f(x)=x^4$이라 하면 $f'(x)=4x^3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=4$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

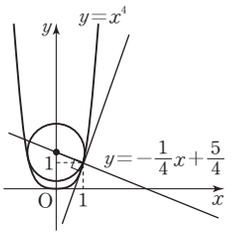
$y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ …… ㉠

중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 $x^2+(y-a)^2=r^2$ $(r>0)$이라 하면 직선 ㉠이 원의 중심 $(0, a)$를 지나야 하므로

$a=\frac{5}{4}$

이때 반지름의 길이 r는 두 점 $(1, 1)$, $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ 답 ②



유형 11 곡선 위의 점에서의 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이 개념 02~04

(i) 접선의 방정식을 구한다.

(ii) x절편과 y절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

⇨ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$이면 x절편은 $-\frac{n}{m}$, y절편은 n이다.

0433

$f(x)=x^3-2x^2+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)$ $\therefore y=-x+4$

이때 이 접선의 x절편, y절편은 각각 4, 4이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$ 답 ④

0434

$f(x)=kx^4$에서 $f'(x)=4kx^3$

점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4k$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-k=4k(x-1)$ $\therefore y=4kx-3k$

이때 이 접선의 x절편은

$4kx-3k=0$에서 $x=\frac{3}{4}$

따라서 접선의 y절편은 $-3k$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times3k=9$ $\therefore k=8$ 답 8

0435

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{1}{3}$이라 하면 $f'(x)=x^2-2$

점 $\mathrm{P}(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2$이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-1)=2(x-2)$ $\therefore y=2x-5$

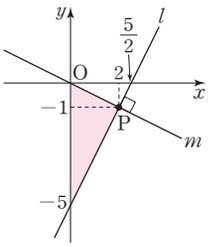
직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times2=5$ 답 ④



0436

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 P의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면 점 $\mathrm{P}(t, t^3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$

이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$ $\therefore y=3t^2x-2t^3$

삼각형 PQS, 삼각형 PRS에서 선분 PS를 밑변으로 생각할 때, 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다.

즉, 두 삼각형 PQS, PRS의 넓이의 비는 두 선분 QS, OS의 길이의 비와 같다.

이때 직선 $y=3t^2x-2t^3$의 x절편은

$0=3t^2x-2t^3$에서 $x=\frac{2}{3}t$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$

또, $\mathrm{S}(t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{QS}}=\overline{\mathrm{OS}}-\overline{\mathrm{OQ}}=t-\frac{2}{3}t=\frac{1}{3}t$

$\therefore \triangle\mathrm{PQS}:\triangle\mathrm{PRS}=\overline{\mathrm{QS}}:\overline{\mathrm{OS}}$

$=\frac{1}{3}t:t=1:3$ 답 ②

유형 12 롤의 정리 개념 06

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면
$f'(c)=0$
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0437

함수 $f(x)=(x+1)^2(x+2)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, -1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(-1)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, -1)$에 적어도 하나 존재한다. 이때
$f'(x)=2(x+1)(x+2)+(x+1)^2$
$\quad=(x+1)(3x+5)$
이므로
$f'(c)=(c+1)(3c+5)=0$
$\therefore c=-\frac{5}{3}\ (\because -2<c<-1)$ 답 $-\frac{5}{3}$

참고 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $y=\{f(x)\}^n$ (n은 자연수)에 대하여 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}\times f'(x)$이다.

0438

ㄱ. 함수 $f(x)=x^2-x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=2$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 롤의 정리가 성립한다.

ㄴ. 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=f(1)=1$이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 롤의 정리가 성립한다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

0439

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-1$은 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속이고, 열린구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로
$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a-1=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a-1$
$a^3-9a=0,\ a(a+3)(a-3)=0$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$
따라서 $f'(x)=x^2+2x-3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c의 값은
$f'(c)=c^2+2c-3=0$
$(c+3)(c-1)=0 \qquad \therefore c=1\ (\because -3<c<3)$
$\therefore a+c=3+1=4$ 답 4

유형 13 평균값 정리 개념 07

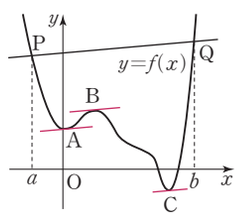
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0440

함수 $g(x)=f'(x)=x^2-2x+3$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{g(3)-g(0)}{3-0}=\frac{6-3}{3}=1=g'(c)$
인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$g'(x)=2x-2$이므로 $g'(c)=2c-2=1$
$2c=3 \qquad \therefore c=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0441

함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
이때 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$라 하면 닫힌구간 $[a, b]$에서 구하는 실수 c의 개수는 두 점 P, Q를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 P, Q를 지나는 직선과 평행한 접선을 세 점 A, B, C에서 각각 그을 수 있다.



따라서 구하는 실수 c의 개수는 3이다. 답 ④

0442

함수 $f(x)=x^2-3x-4$에 대하여 닫힌구간 $[-1, a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 $\frac{1}{2}$이므로
$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$
이 성립한다. … ❶
$f'(x)=2x-3$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$
따라서 $\frac{a^2-3a-4}{a+1}=-2$이므로 … ❷
$a^2-3a-4=-2a-2,\ a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\left(\because a>\frac{1}{2}\right)$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$이 성립함을 알아낼 수 있다.	40%
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0443

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

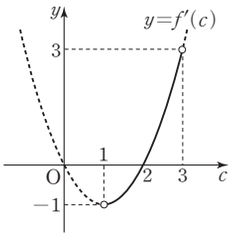
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $1\le a<c<b\le 3$이므로 $1<c<3$

또, $f'(x)=x^2-2x$이므로

$f'(c)=c^2-2c=(c-1)^2-1$

즉, $y=f'(c)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $1<c<3$이므로

$-1<f'(c)<3$

$\therefore\ -1<k<3$

답 $-1<k<3$

유형 14 평균값 정리의 변형 개념 07

(1) 평균값 정리를 이용하여 극한값 구하기

평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 상수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재하므로 $\lim_{x\to\infty}f'(x)$의 값을 이용하여 주어진 극한값을 구한다.

(2) 평균값 정리의 변형

평균값 정리에서 $h=b-a, \theta=\frac{c-a}{b-a}$로 놓으면

$h>0, 0<\theta<1$이고 $b=a+h, c=a+\theta h$이므로

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$

로 나타낼 수 있다.

따라서 상수 θ $(0<\theta<1)$가 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$를 만족시킨다고 하면 평균값 정리를 의미한다.

⇨ 주어진 식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하여 θ에 대한 식으로 정리한 다음 극한값을 구한다.

0444

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x, x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x, x+1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x, x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$

$=\lim_{c\to\infty}f'(c)=2$

답 2

0445

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1, x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}\times 2\right\}$

$=2\lim_{c\to\infty}f'(c)=2\times 4=8$

답 8

0446

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$에서

$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2(a+\theta h)$

$\frac{2ah+h^2}{h}=2a+2\theta h$

$2a+h=2a+2\theta h$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\ (\because h>0)$

답 $\frac{1}{2}$

0447

$f(x)=x^3+1$에서 $f'(x)=3x^2$

$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$에서

$\{(x+h)^3+1\}-(x^3+1)=3h(x+\theta h)^2$

$3hx^2+3h^2x+h^3=3h(x+\theta h)^2$

$x^2+hx+\frac{h^2}{3}=(x+\theta h)^2$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}-x\right)\ (\because \theta>0)$

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x\right)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{xh+\frac{h^2}{3}}{h\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x\right)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{x+\frac{h}{3}}{\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x}$

$=\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$

답 ④

STEP 3 내신 마스터

0448

유형 01 접선의 기울기

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 미분계수 $f'(a)$와 같음을 이용한다.

$f(x)=x^4-x^3+x^2+3$이라 하면 $f'(x)=4x^3-3x^2+2x$

따라서 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4-3+2=3$

답 ①

0449

유형 01 접선의 기울기

|전략| 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 $f'(x)$의 최댓값과 그때의 x의 값을 구한다.

$f(x)=-x^3+6x^2+4x-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x+4=-3(x-2)^2+16$

즉, $f'(x)$는 $x=2$일 때 최대이다.

따라서 기울기가 최대일 때의 접점의 좌표는 $(2, 23)$이므로

$a+b=2+23=25$ 답 ③

0450

유형 02 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

|전략| $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$임을 이용한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이다. 즉, $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

$g(x)=x^2f(x)$라 하면 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+f'(1)=2\times2+3=7$

$g(1)=f(1)=2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=7(x-1)$ $\therefore y=7x-5$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-7-5=-12$ 답 ①

0451

유형 04 곡선과 접선의 교점

|전략| 곡선 $y=f(x)$와 그 접선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

함수 $f(x)=ax^3+bx$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하면 두 점 P, Q의 x좌표는 방정식 $ax^3+bx=mx+n$의 실근이다.

즉, 방정식 $ax^3+(b-m)x-n=0$의 세 실근은 α, α, β이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha+\beta=0$에서 $\beta=-2\alpha$이므로 $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{-2\alpha}{\alpha}\right|=2$ 답 ③

0452

유형 05 기울기가 주어진 접선의 방정식

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=t$인 점에서의 기울기는 $f'(t)$이다.

직선 $y=\frac{1}{3}x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

$f(x)=x^3-3x^2-2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-2)라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(t)=3t^2-6t=-3$, $3t^2-6t+3=0$

$3(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-3(x-1)$ $\therefore y=-3x-1$

따라서 $m=-3$, $n=-1$이므로 $mn=-3\times(-1)=3$ 답 ⑤

0453

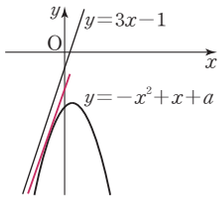
유형 06 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용

|전략| 곡선 위의 점 중 접선의 기울기가 3인 점을 구한다.

$f(x)=-x^2+x+a$라 하면

$f'(x)=-2x+1$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=3x-1$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로



$f'(t)=-2t+1=3$ $\therefore t=-1$

따라서 점 $(-1, a-2)$와 직선 $y=3x-1$, 즉 $3x-y-1=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{10}$이므로

$\frac{|-3-(a-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a+2|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$|a+2|=1$, $a+2=-1$ 또는 $a+2=1$

$\therefore a=-3$ ($\because a<-2$) 답 ⑤

0454

유형 07 접선을 이용한 미정계수의 결정

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=-2x+b$이므로 $f'(1)=-2$임을 이용한다.

점 $(1, f(1))$이 $f(x)=x^3+ax+6$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=1+a+6$ $\therefore f(1)=a+7$ ····· ㉠

또, 점 $(1, f(1))$이 직선 $y=-2x+b$ 위의 점이므로

$f(1)=-2+b$ ····· ㉡

$f'(x)=3x^2+a$이고 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(1)=3+a=-2$ $\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $f(1)=2$

$f(1)=2$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore ab=-5\times4=-20$ 답 ⑤

0455

유형 07 접선을 이용한 미정계수의 결정

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동한 그래프의 식은 $y=f(x-k)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+x^2-2$라 하면 $f'(x)=3x^2+2x$

직선 $y=x+3$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=x-k+3$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-k+3$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 1이다.

$f'(t)=3t^2+2t=1$에서

$3t^2+2t-1=0$, $(t+1)(3t-1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because t$는 정수)

따라서 접점의 좌표가 $(-1, -2)$이고 이 점이 직선 $y=x-k+3$ 위의 점이므로

$-2=-1-k+3$ $\therefore k=4$

$\therefore k+t=4+(-1)=3$ 답 ③

0456

유형 08 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=2x^2-x$라 하면 $f'(x)=4x-1$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=4t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^2-t)=(4t-1)(x-t)$ $\therefore y=(4t-1)x-2t^2$

이 직선이 점 $(2, -12)$를 지나므로

$-12=2(4t-1)-2t^2$, $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

따라서 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$, $f'(5)=19$이므로 그 합은

$-5+19=14$ 답 ②

0457

유형 08 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1)로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-2x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t+1)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3+1$

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-2t^3+1$, $t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

즉, 접점의 좌표는 $(1, 0)$, 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 기울기가 -1이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=-(x-1)$ $\therefore y=-x+1$ 답 ⑤

0458

유형 09 두 곡선의 공통인 접선

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 서로 접하면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax+b$, $g(x)=-x^2+bx$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=-2x+b$

$x=1$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(1)=g(1)$에서 $1+a+b=-1+b$

$\therefore a=-2$

$x=1$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=-2+b$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$ 답 ④

0459

유형 12 롤의 정리

|전략| 롤의 정리를 만족시키면 $f(0)=f(6)$임을 이용한다.

함수 $f(x)=-x^3+ax^2$은 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0)=f(6)$이어야 하므로

$0=-216+36a$ $\therefore a=6$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2$

$f'(x)=-3x^2+12x$이므로

$f'(c)=-3c^2+12c=0$, $-3c(c-4)=0$

$\therefore c=4$ ($\because 0<c<6$)

$\therefore a+c=6+4=10$ 답 ④

0460

유형 12 롤의 정리

|전략| 롤의 정리를 만족시키면 $f(-\sqrt{6})=f(a)$임을 이용한다.

함수 $f(x)=x^3-6x+4$는 닫힌구간 $[-\sqrt{6}, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{6}, a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-\sqrt{6})=f(a)$이어야 하므로

$-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}+4=a^3-6a+4$

$a^3-6a=0$, $a(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\sqrt{6}$ ($\because a>-\sqrt{6}$)

$f'(x)=3x^2-6$에서 $f'(c)=3c^2-6=3(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})$

(i) $a=0$일 때, 열린구간 $(-\sqrt{6}, 0)$에서 $f'(c)=0$인 c는 $c=-\sqrt{2}$

(ii) $a=\sqrt{6}$일 때, 열린구간 $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$에서 $f'(c)=0$인 c는 $c=-\sqrt{2}$ 또는 $c=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $a=\sqrt{6}$, $c_1=-\sqrt{2}$, $c_2=\sqrt{2}$ ($\because c_1<c_2$)

$\therefore a^2-c_1c_2=(\sqrt{6})^2-(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}=6+2=8$ 답 ②

0461

유형 13 평균값 정리

|전략| 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선을 찾는다.

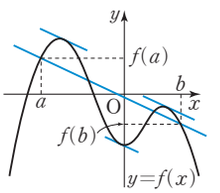
함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 구하는 실수 c의 개수는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 실수 c의 개수는 3이다.



답 ③

Lecture

롤의 정리는 곡선 $y=f(x)$에서 $f(a)=f(b)$이면 x축과 평행한 접선이 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 의미하고, 평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선이 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

0462

유형 14 평균값 정리의 변형

|전략| 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 평균값 정리를 이용한다.

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \to \infty$이면 $c \to \infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}\times 3\right\}$

$=3\lim\limits_{c\to\infty}f'(c)=3\times 6=18$ 답 ⑤

0463

유형 01 접선의 기울기

|전략| 두 접점의 좌표를 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$로 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2$이라 하면 $f'(x)=x^2-2ax$

접선의 기울기가 2이므로 $x^2-2ax=2$

이때 두 접선의 접점의 x좌표가 각각 α, β이므로 α, β는 방정식 $x^2-2ax=2$, 즉 $x^2-2ax-2=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-2$ … ❶

이때 $\alpha^2+\beta^2=40$이므로 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$40=4a^2+4$, $a^2=9$

$(a+3)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>0)$ … ❷

답 3

채점 기준	배점
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점

0464

유형 02 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

|전략| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한 다음 접선의 x절편을 구한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3$이라 하면 $f'(x)=x^2$이므로 점 $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{3}=x-1$ $\quad\therefore y=x-\dfrac{2}{3}$

$y=0$일 때 $x=\dfrac{2}{3}$이므로 $a_1=\dfrac{2}{3}$ … ❶

점 $\left(a_1, \dfrac{1}{3}a_1^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{3}a_1^3=a_1^2(x-a_1)$ $\quad\therefore y=a_1^2x-\dfrac{2}{3}a_1^3$

$y=0$일 때 $x=\dfrac{2}{3}a_1$이므로 $a_2=\dfrac{2}{3}a_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ … ❷

$\therefore\ a_1a_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{27}$ … ❸

답 $\dfrac{8}{27}$

채점 기준	배점
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a_2의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ a_1a_2의 값을 구할 수 있다.	1점

0465

유형 13 평균값 정리

|전략| 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시킴을 확인한 다음 $-2<c<1$에서 $f'(c)$의 값의 범위를 구한다.

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+5$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2+4x$이므로

$f'(c)=c^2+4c=(c+2)^2-4$ … ❶

이때 $-2<c<1$이므로

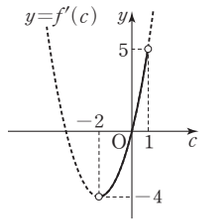
$-4<f'(c)<5$

따라서 실수 k의 값의 범위는

$-4<k<5$ … ❷

이므로 $\alpha=-4$, $\beta=5$

$\therefore\ \alpha+2\beta=-4+10=6$ … ❸



답 6

채점 기준	배점
❶ 열린구간 (a, b)에 속하는 c에 대하여 $f'(c)$를 구할 수 있다.	3점
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ $\alpha+2\beta$의 값을 구할 수 있다.	1점

0466

유형 03 접선에 수직인 직선의 방정식

|전략| 직선과 y축의 교점의 y좌표는 직선의 y절편임을 이용한다.

(1) $f(x)=x^2-1$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 $\mathrm{P}(t, t^2-1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은 $y-(t^2-1)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2-1$ …… ㉠

이때 점 Q의 y좌표는 직선 ㉠의 y절편이므로 점 Q의 좌표는 $(0, -t^2-1)$

(2) 점 P를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-(t^2-1)=-\dfrac{1}{2t}(x-t)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2t}x+t^2-\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

이때 점 R의 y좌표는 직선 ㉡의 y절편이므로 점 R의 좌표는 $\left(0, t^2-\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\overline{\mathrm{QR}}=\left|\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)-(-t^2-1)\right|=2t^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to 0}\overline{\mathrm{QR}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(2t^2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $(0, -t^2-1)$ (2) $\left(0, t^2-\dfrac{1}{2}\right)$ (3) $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	배점
(1) 점 Q의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) 점 R의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(3) $\lim\limits_{t\to 0}\overline{\mathrm{QR}}$의 값을 구할 수 있다.	2점

0467

유형 11 곡선 위의 점에서의 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 곡선 $f(x)=x^3-2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,-1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{f'(1)}$이다.

(1) $f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

이때 점 $\mathrm{P}(1,-1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선 l의 방정식은

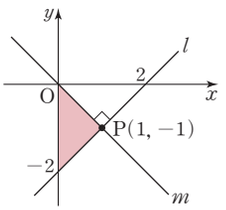
$y-(-1)=x-1$ $\quad\therefore y=x-2$

(2) 직선 m의 기울기는 -1이고, 점 $\mathrm{P}(1,-1)$을 지나므로 직선 m의 방정식은

$y-(-1)=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x$

(3) 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$



답 (1) $y=x-2$ (2) $y=-x$ (3) 1

채점 기준	배점
(1) 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(2) 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(3) 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

0468

|전략| 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고, 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 직선 PQ의 기울기를 구한다.

$f(x)=x^3-\sqrt{2}x$라 하면 $f'(x)=3x^2-\sqrt{2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ t^3-\sqrt{2}t)$라 하면

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3-\sqrt{2}t)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-(t^3-\sqrt{2}t)=(3t^2-\sqrt{2})(x-t)$ $\quad\therefore y=(3t^2-\sqrt{2})x-2t^3$

곡선 $y=f(x)$와 접선 l의 교점의 x좌표는

$x^3-\sqrt{2}x=(3t^2-\sqrt{2})x-2t^3$에서

$x^3-3t^2x+2t^3=0$, $(x-t)^2(x+2t)=0$

$\therefore x=-2t$ 또는 $x=t$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-2t,\ -8t^3+2\sqrt{2}t)$이다.

점 $\mathrm{Q}(-2t,\ -8t^3+2\sqrt{2}t)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2t)=12t^2-\sqrt{2}$이므로

$(3t^2-\sqrt{2})(12t^2-\sqrt{2})=-1$

$36t^4-15\sqrt{2}t^2+3=0$, $12t^4-5\sqrt{2}t^2+1=0$

$(2\sqrt{2}t^2-1)(3\sqrt{2}t^2-1)=0$

$\therefore t^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $t^2=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

이때 직선 PQ의 기울기는 $f'(t)=3t^2-\sqrt{2}$이므로

$t^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$일 때 $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $t^2=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$일 때 $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 직선 PQ의 기울기의 최댓값은 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. 답 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

0469

|전략| $x=a$에서의 미분계수와 함숫값이 같음을 이용한다.

$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+2$, $g(x)=\dfrac{1}{4}(x-4)^2$이라 하면

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}x$, $g'(x)=\dfrac{1}{2}(x-4)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다.

$-\dfrac{1}{4}a^2+2=\dfrac{1}{4}(a-4)^2$, $-\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{2}(a-4)$ $\quad\therefore a=2$

이때 $f(2)=g(2)=1$, $f'(2)=g'(2)=-1$이므로 두 곡선의 공통인 접선 l의 방정식은

$y-1=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+3$

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=-\dfrac{1}{2}t=1$에서 $t=-2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이므로 직선 m의 방정식은

$y-1=x+2$ $\quad\therefore y=x+3$

또, 곡선 $y=g(x)$와 직선 n의 접점의 좌표를 $(s,\ g(s))$라 하면

$g'(s)=\dfrac{1}{2}(s-4)=1$에서 $s=6$

즉, 접점의 좌표는 $(6,\ 1)$이므로 직선 n의 방정식은

$y-1=x-6$ $\quad\therefore y=x-5$

└ 직선 n의 기울기도 1이다.

두 직선 m, n 사이의 거리 k는 직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0,\ 3)$과 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$k=\dfrac{|0-3-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore a+k^2=2+(4\sqrt{2})^2=2+32=34$ 답 34

0470

|전략| 곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나는 것과 주어진 식을 이용하여 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구한다.

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=(1-a)(1-b)(1-c)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)+(a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ (b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)+(a-1)(b-1)$

$=\dfrac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1)=\dfrac{1}{2}\times(-2)=-1$ ($\because$ ㉠)

또, $f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$에서 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=(1-b)(1-c)+(1-a)(1-c)+(1-a)(1-b)$

$=(b-1)(c-1)+(a-1)(c-1)+(a-1)(b-1)=-1$

이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

따라서 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$ 답 $\dfrac{9}{2}$

0471

| 전략 | 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $(a<c<b)$인 실수 c가 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에서 $|f'(c)|\le 4$이므로

$$\left|\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}\right|\le 4$$

조건 (나)에서 $f(-1)=3$이므로

$$\left|\frac{f(1)-3}{2}\right|\le 4,\ |f(1)-3|\le 8$$

$-8\le f(1)-3\le 8$ $\therefore -5\le f(1)\le 11$

따라서 $M=11$, $m=-5$이므로

$M+m=11+(-5)=6$ 답 ③

0472

| 전략 | ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$에서 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 이용하여 평균값 정리를 적용한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$$

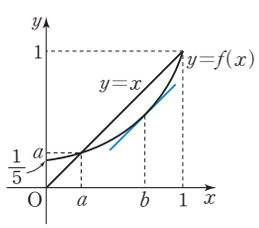
인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이므로 $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 기울기가 1인 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면

$f'(b)=1$

즉, 오른쪽 그림에서 열린구간 $(b, 1)$에 속하는 x에서 접선의 기울기 $f'(x)$에 대하여 $f'(x)>1$이다. (거짓)



ㄷ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 1)$에서 미분가능하다.

또, $a\le x\le 1$일 때, $a\le f(x)\le 1$이므로 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 닫힌구간 $[a, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 1)$에서 미분가능하다.

이때 $f(a)=a$, $f(1)=1$에서

$g(a)=(f\circ f)(a)=f(a)=a$

$g(1)=(f\circ f)(1)=f(1)=1$

이므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(1)-g(a)}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}=1=g'(k)$$

인 k가 열린구간 $(a, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

5 도함수의 활용 (2)

본책 76~93쪽

STEP 개념 마스터

0473

답 (가) < (나) 증가

0474

$0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다. 답 증가

0475

$x_1<x_2<0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, 0)$에서 감소한다. 답 감소

0476

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3-(-x_2^3)=-(x_1^3-x_2^3)$

$=-(x_1-x_2)(\underbrace{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}_{=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0})>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 답 감소

0477

$f(x)=x^2+2x$에서 $f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소한다.

답 구간 $[-1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소

0478

$f(x)=-x^2+4x+3$에서 $f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	7	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가하고, 구간 $[2, \infty)$에서 감소한다.

답 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가, 구간 $[2, \infty)$에서 감소

0479

$f(x)=x^3-12x$에서 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소한다.

답 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소

0480

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-6	↗	21	↘

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 감소한다.

답 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가, 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 감소

0481

$f(x)=x^4-2x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$, 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 감소한다.

답 닫힌구간 $[-1, 0]$, 구간 $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -1]$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 감소

0482

$f(x)=x^3+6x^2+12x+9$에서

$f'(x)=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

답 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가

0483

$f(x)=3x^4-4x^3+5$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소한다.

답 구간 $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소

0484

함수 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이며 극댓값은

$f(-1)=-1+3+1=3$

또, $x=1$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이며 극솟값은

$f(1)=1-3+1=-1$

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0485

(1) 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=f$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=f$에서 극대이다.
따라서 극대가 되는 x의 값은 b, d, f이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=c$, $x=e$, $x=g$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=c$, $x=e$, $x=g$에서 극소이다.
따라서 극소가 되는 x의 값은 c, e, g이다.

답 (1) b, d, f (2) c, e, g

0486

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하고 $x=3$에서 극값 4를 가지므로

$f(3)=4, f'(3)=0$

$\therefore f(3)+f'(3)=4+0=4$

답 4

0487

$f(x)=x^3-6x^2-15x+2$에서

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	-98	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=10$, $x=5$에서 극소이고 극솟값은 $f(5)=-98$이다.

답 극댓값: 10, 극솟값: -98

0488

$f(x)=-x^3+6x^2-1$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	31	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이고 극댓값은 $f(4)=31$,

$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$이다.

답 극댓값: 31, 극솟값: -1

0489

$f(x)=-2x^3+3x^2-6$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-6	↗	-5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=-5$,

$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-6$이다.

답 극댓값: -5, 극솟값: -6

0490

$f(x)=x^4-2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=5$,

$x=-1$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=f(1)=4$이다.

답 극댓값: 5, 극솟값: 4

0491

$f(x)=3x^4-8x^3+1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서는 극값을 갖지 않는다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값은 없고, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-15$이다.

답 극댓값: 없다., 극솟값: -15

0492

$f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2-5$에서

$f'(x)=-12x^3-12x^2+24x=-12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(-2)=27$, $f(1)=0$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-5$

이다.

답 극댓값: 27, 0, 극솟값: -5

0493

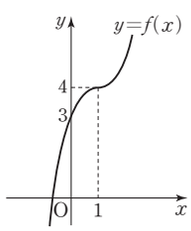
$f(x)=x^3-3x^2+3x+3$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 3)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

참고 방정식 $f(x)=0$의 실근을 구하기 어려운 경우 x축과의 교점은 생략한다.

0494

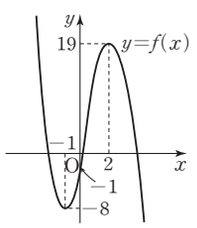
$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-1$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	19	↘



함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

0495

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

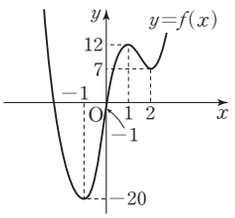
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-20	↗	12	↘	7	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0496

$f(x)=-3x^4-4x^3+6x^2+12x-4$에서

$f'(x)=-12x^3-12x^2+12x+12=-12(x+1)^2(x-1)$

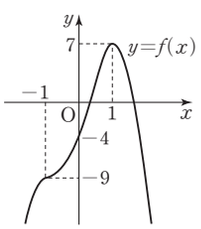
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-9	↗	7	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -4)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0497

$f(x)=2x^3-12x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-24x=6x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-11	↗	3	↘	-29

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $x=0$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 -29를 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -29

0498

$f(x)=-x^3+3x$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	18	↘	-2	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, \sqrt{3}]$에서 $x=-3$일 때 최댓값 18, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: 18, 최솟값: -2

0499

$f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because -2\le x\le 0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	11	↘	2	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-2$일 때 최댓값 11, $x=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 최댓값: 11, 최솟값: 2

0500

$f(x)=-x^4+6x^2-8x+1$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	25	↘	-2	↘	-7

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 $x=-2$일 때 최댓값 25, $x=2$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

답 최댓값: 25, 최솟값: -7

STEP 2 유형 마스터

유형 01 함수의 증가와 감소 개념 02

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소

(1) $f'(x)>0$ ⇨ $f(x)$는 이 구간에서 증가

(2) $f'(x)<0$ ⇨ $f(x)$는 이 구간에서 감소

0501

$f(x)=-x^3+3x^2-2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이다.

$-3x(x-2)\ge 0$, $x(x-2)\le 0$ $\quad\therefore 0\le x\le 2$

따라서 $a=2$, $b=0$이므로 $b-a=2-0=2$ 답 ②

0502

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이다.

$3(x+1)(x-3)\le 0 \quad \therefore -1\le x\le 3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a+b=-1+3=2$ 답 ⑤

0503

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -2, 1이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{2a}{3}$, $-2\times 1=\frac{b}{3} \quad \therefore a=\frac{3}{2}$, $b=-6$

$\therefore ab=\frac{3}{2}\times(-6)=-9$ 답 -9

0504

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax$에서 $f'(x)=x^2-4x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, b이다. … ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=4$, $1\times b=a \quad \therefore a=3, b=3$ … ❷

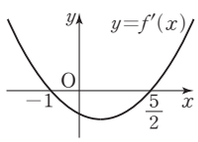
$\therefore a+b=3+3=6$ … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0505

구간 $(-\infty, -1]$ 또는 구간 $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고,



닫힌구간 $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

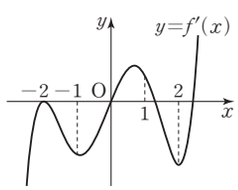
따라서 주어진 구간 중 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 ① $[-2, -1]$이다. 답 ①

0506

① 열린구간 $(-\infty, -2)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

② 열린구간 $(-2, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

③ 열린구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 감소하다가 증가한다.



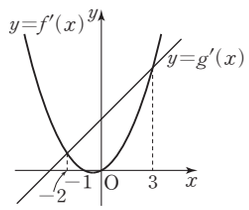
④ 열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 증가하다가 감소한다.

⑤ 열린구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 감소하다가 증가한다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0507

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 구간 $(-\infty, -2]$ 또는 구간 $[3, \infty)$에서 $h'(x)\ge 0$이고 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 $h'(x)\le 0$이다.



ㄱ. 구간 $(-\infty, -2]$에서 $h'(x)\ge 0$이므로 함수 $h(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 감소한다. (참)

ㄷ. 구간 $[3, \infty)$에서 $h'(x)\ge 0$이므로 함수 $h(x)$는 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 개념 02

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

(1) 증가 ⇨ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$

(2) 감소 ⇨ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$

0508

$f(x)=x^3+kx^2+(k+4)x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+k+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3(k+4)\le 0$, $k^2-3k-12\le 0$

이때 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $a\le k\le b$이고, a, b는 이차방정식 $k^2-3k-12=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=3$ 답 ③

Lecture

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$ ⇨ $a>0$, $D\le 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$ ⇨ $a<0$, $D\le 0$

0509

$f(x)=-x^3+kx^2-3x+1$에서 $f'(x)=-3x^2+2kx-3$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0$, $(k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 3$ 답 ③

0510

$f(x)=x^3+ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3a\leq 0,\ a(a-3)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 3$ ····· ㉠

또, $g(x)=-x^3+(a+1)x^2-(a+1)x$에서

$g'(x)=-3x^2+2(a+1)x-(a+1)$

함수 $g(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-3(a+1)\leq 0,\ (a+1)(a-2)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq a\leq 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $0\leq a\leq 2$이므로 상수 a의 값이 될 수 없는 것은 ① $-\frac{1}{2}$이다. 답 ①

0511

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=-x^3+2ax^2-3ax+5$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-3a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-9a\leq 0,\ a(4a-9)\leq 0$ $\therefore\ 0\leq a\leq \frac{9}{4}$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 0, 1, 2의 3이다. 답 ③

Lecture

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소함을 나타내는 여러 가지 표현

(1) $a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)<f(b)$이다. ⇨ 증가

(2) $a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)>f(b)$이다. ⇨ 감소

(3) 함수 $f(x)$가 일대일대응 (또는 일대일함수)이다.

(4) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

0512

함수 $f(x)$는 일대일대응이고 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다. … ❶

$f(x)=x^3+x^2+kx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2x+k$ … ❷

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3k\leq 0$ $\therefore\ k\geq \frac{1}{3}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다. … ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 $f'(x)\geq 0$임을 알아낼 수 있다.	30 %
❷ 도함수 $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

참고 일대일함수이면서 공역과 치역이 같으면 일대일대응이라 한다.

0513

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 (일대일대응) 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=-x^3+kx^2+2kx-5$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx+2k$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2+6k\leq 0,\ k(k+6)\leq 0$ $\therefore\ -6\leq k\leq 0$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$이므로 그 합은

$-6+(-5)+(-4)+\cdots+(-1)+0=-21$ 답 ③

참고 **역함수가 존재할 조건**

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재할 필요충분조건은 함수 f가 일대일대응인 것이다.

0514

모든 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서의 최댓값이 $f(t)$가 되려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-3)x^2+(a-1)x+2a$에서

$f'(x)=x^2+2(a-3)x+a-1$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a-1)\leq 0,\ a^2-7a+10\leq 0$

$(a-2)(a-5)\leq 0$ $\therefore\ 2\leq a\leq 5$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 2, 3, 4, 5의 4이다. 답 ④

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 개념 02

삼차함수 $f(x)$가 주어진 구간에서

(1) 증가 ⇨ 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$

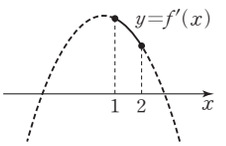
(2) 감소 ⇨ 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$

0515

$f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 증가하려면 $1\leq x\leq 2$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로



$f'(1)=-3+2+a\geq 0$에서 $a\geq 1$ ····· ㉠

$f'(2)=-12+4+a\geq 0$에서 $a\geq 8$ ····· ㉡

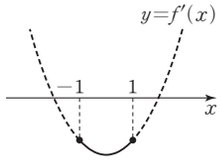
㉠, ㉡에서 $a\geq 8$ 답 $a\geq 8$

0516

$f(x)=x^3+ax+3$에서

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하려면 $-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

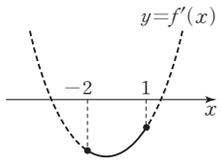


$f'(-1)=f'(1)=3+a\le 0$ $\therefore a\le -3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다. 답 ③

0517

$-2\le x\le 1$에서 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 $-2\le x\le 1$에서 감소해야 한다.



즉, $-2\le x\le 1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+kx^2-7x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-7$

$f'(-2)=12-4k-7\le 0$에서 $k\ge\frac{5}{4}$ ····· ㉠

$f'(1)=3+2k-7\le 0$에서 $k\le 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5}{4}\le k\le 2$

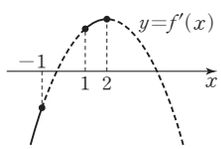
따라서 구하는 정수 k의 개수는 2의 1이다. 답 ②

0518

$f(x)=-x^3+ax^2+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 증가하려면



$x\le -1$에서 $f'(x)\le 0$, $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$f'(-1)=-3-2a\le 0$에서 $a\ge -\frac{3}{2}$ ····· ㉠

$f'(1)=-3+2a\ge 0$에서 $a\ge\frac{3}{2}$ ····· ㉡

$f'(2)=-12+4a\ge 0$에서 $a\ge 3$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a\ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. 답 ③

유형 04 함수의 극대와 극소 개념 03, 04

미분가능한 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f'(x)$를 구한다. (ii) $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

이때 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 극대, 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 극소이다.

0519

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x-2$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···	2	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−7	↗	−6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=-6$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-7$이므로

$M=-6$, $m=-7$

$\therefore M-m=-6-(-7)=1$ 답 ①

0520

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-6x^2$에서

$f'(x)=4x^3-8x^2-12x=4x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	0	···	3	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	0	↘	−45	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 구하는 모든 x의 값의 합은 $-1+0+3=2$ 답 ④

0521

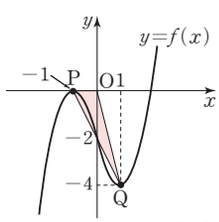
$f(x)=x^3-3x-2$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=0$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-4$이므로



$P(-1, 0)$, $Q(1, -4)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$ 답 ②

0522

$f(x)=x^3-3x^2+2x$에서 $f'(x)=3x^2-6x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ $\therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

이 접선의 y절편 $g(t)$는

$g(t)=-tf'(t)+f(t)=-t(3t^2-6t+2)+t^3-3t^2+2t$

$=-2t^3+3t^2$

$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	0	↗	1	↘

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극대이고 극댓값은 $g(1)=1$, $t=0$에서 극소이고 극솟값은 $g(0)=0$이므로 구하는 극댓값과 극솟값의 합은 $1+0=1$ 답 1

유형 05 함수의 극값을 이용한 미정계수의 결정 개념 03, 04

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면
⇨ $f(a)=b$, $f'(a)=0$
(2) 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면
⇨ α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

0523

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-3)=0$에서
$27-6a+b=0$ $\therefore 6a-b=27$ …… ㉠
$f'(1)=0$에서
$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$
함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+c$가 $x=-3$에서 극댓값 28을 가지므로
$f(-3)=28$에서
$-27+27+27+c=28$ $\therefore c=1$
따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$이므로 구하는 극솟값은
$f(1)=1+3-9+1=-4$ 답 ③

0524

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-4$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$,
$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=a-4$이다.
이때 극댓값과 극솟값의 합이 20이므로
$a+(a-4)=20$, $2a=24$ $\therefore a=12$ 답 12

0525

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ … ❶
함수 $f(x)$가 $x=-2$, $x=4$에서 극값을 가지므로
$f'(-2)=0$에서
$12-4a+b=0$ $\therefore 4a-b=12$ …… ㉠
$f'(4)=0$에서
$48+8a+b=0$ $\therefore 8a+b=-48$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-24$ … ❷
또, 함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+c$의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로
$f(-2)=-f(4)$에서
$-8-12+48+c=-(64-48-96+c)$
$\therefore c=26$ … ❸
$\therefore a+b+c=-3+(-24)+26=-1$ … ❹
답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(x)$가 $x=-2$, $x=4$에서 극값을 가지므로 $f'(-2)=0$, $f'(4)=0$에서
$f'(x)=3(x+2)(x-4)=3x^2-6x-24$
즉, $2a=-6$에서 $a=-3$이고, $b=-24$이므로
$f(x)=x^3-3x^2-24x+c$
이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로
$f(-2)=-f(4)$에서
$-8-12+48+c=-(64-48-96+c)$ $\therefore c=26$
$\therefore a+b+c=-3+(-24)+26=-1$
참고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x=-2$에서 극대, $x=4$에서 극소이다.
따라서 $f(-2)>f(4)$이므로 $|f(-2)|=|f(4)|$에서 $f(-2)=-f(4)$

0526

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)의 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x+1}=0$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로
$\lim_{x\to-1}\{f(x)+3\}=0$
$f(-1)+3=0$ $\therefore f(-1)=-3$ …… ㉠
또, $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로
$f'(-1)=0$에서
$3-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=3$ …… ㉡
조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로
$f'(1)=0$에서
$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$
즉, $f(x)=x^3-3x+c$이고 ㉠에 의하여
$-1+3+c=-3$ $\therefore c=-5$
따라서 $f(x)=x^3-3x-5$이므로
$f(2)=8-6-5=-3$ 답 -3

유형 06 함수의 극대·극소의 활용 개념 03, 04

함수의 도함수를 이용하여 극값을 갖는 x의 값을 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

0527

$f(x)=x^3+(a+1)x^2-2x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점과 극소가 되는 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=0$

한편, α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+1)}{3}=0 \qquad \therefore a=-1$ 답 ⑤

Lecture

점의 대칭이동

(1) x축에 대하여 대칭이동: $(x,y)\to(x,-y)$

(2) y축에 대하여 대칭이동: $(x,y)\to(-x,y)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동: $(x,y)\to(-x,-y)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동: $(x,y)\to(y,x)$

0528

$f(x)=-2x^3+3ax^2-2a$에서

$f'(x)=-6x^2+6ax=-6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$이다.

(i) $f(0)=0$인 경우

$-2a=0$에서 $a=0$

그런데 조건에서 $a\neq0$이므로 $f(0)=0$이 아니다.

(ii) $f(a)=0$인 경우

$-2a^3+3a^3-2a=0$

$a^3-2a=0$, $a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ ($\because a\neq0$)

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$ 답 ③

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접한다.

$\Rightarrow f(a)=0$, $f'(a)=0$

0529

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(3)=2$, $f'(3)=0$

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

이때

$g(3)=3f(3)=3\times2=6$,

$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=4\times2+3\times0=8$

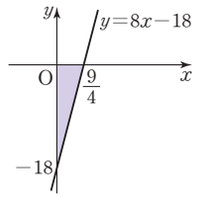
이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-6=8(x-3)$

$\therefore y=8x-18$

따라서 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{4}\times18=\dfrac{81}{4}$ 답 $\dfrac{81}{4}$



0530

삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이므로 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

즉, 함수 $f(x)$의 극값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$이다.

조건 (나)에서 두 점 $(\alpha,f(\alpha))$, $(\beta,f(\beta))$ 사이의 거리가 $3\sqrt{29}$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=3\sqrt{29}$ ····· ㉠

이때 조건 (가)에서 $|\alpha-\beta|=6$, 즉 $(\beta-\alpha)^2=36$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{36+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=3\sqrt{29}$

$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=225 \qquad \therefore |f(\beta)-f(\alpha)|=15$

따라서 극댓값과 극솟값의 차는 15이다. 답 15

유형 07 삼차함수의 계수의 부호 결정 개념 03, 04

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d는 상수)에서

(1) $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이면 $\Rightarrow a>0$

$x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이면 $\Rightarrow a<0$

(2) $f(0)>0$이면 $\Rightarrow d>0$

$f(0)<0$이면 $\Rightarrow d<0$

(3) $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면

$\Rightarrow f'(x)=0$의 두 실근은 α, β

0531

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)>0$이므로 $d>0$

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

$\therefore a>0, b<0, c>0, d>0$

따라서 옳은 것은 ② $ac>0$이다. 답 ②

0532

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)<0$이므로 $c<0$ (참)

ㄴ. $f'(0)=0$이므로 $b=0$ (참)

ㄷ. 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, 0이고 $\alpha<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha=-\dfrac{2a}{3}<0 \qquad \therefore a>0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0533

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이므로

$a<0$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)<0$이므로 $d<0$

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0,\ \alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$$

이때 $a<0$이므로 $b>0$, $c>0$

$\therefore a<0, b>0, c>0, d<0$

따라서 그 값이 양수인 것은 ③ bc이다. 답 ③

유형 08 도함수의 그래프와 함수의 극값 개념 03, 04

⑴ 도함수의 그래프와 극대·극소

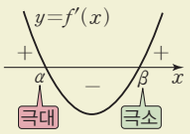
함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면

⇨ $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대

② 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면

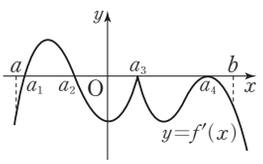
⇨ $f(x)$는 $x=\beta$에서 극소



⑵ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f(a)=b$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

0534

오른쪽 그림과 같이 $a\le x\le b$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4라 하면



(i) $x=a_2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$에서 극대이다.

(ii) $x=a_1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 개수는 2이다. 답 2

참고 $x=a_3$, $x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a_3$, $x=a_4$에서 극값을 갖지 않는다.

0535

(i) $x=5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극대이다.

$\therefore m=1$

(ii) $x=1$, $x=6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=6$에서 극소이다.

$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $m-n=1-2=-1$ 답 −1

참고 함수 $f(x)$는 $f'(6)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=6$에서 미분가능하지 않지만 $0<x<7$에서 연속이므로 $x=6$에서도 연속이다.

따라서 $x=6$에서의 극대, 극소를 판단할 수 있다.

0536

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 −3, 1이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	−3	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이다. … ❶

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ … ❷

$f'(-3)=0$에서

$27-6a+b=0$ $\therefore 6a-b=27$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서

$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$

$f(x)=x^3+3x^2-9x+c$의 극솟값이 −6이므로 $f(1)=-6$에서

$1+3-9+c=-6$ $\therefore c=-1$ … ❸

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-1$이므로 구하는 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27-1=26$ … ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소인 x의 값을 찾을 수 있다.	30 %
❷ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓고 $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	10 %

0537

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=e$

주어진 그래프에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	a	⋯	b	⋯	e	⋯
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극대이므로 구하는 x의 값은 b이다.

답 b

Lecture

함수 $f(x)-g(x)$의 극값

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(i) $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, $h'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

(ii) $h'(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다.

(iii) 표에서 함수 $h(x)$의 극값을 찾는다.

유형 09 도함수의 그래프의 해석 (1) 개념 02~04

(1) 증가, 감소 ⇨ $f'(x)$의 부호를 살펴본다.
(2) 극대, 극소 ⇨ $f'(x)=0$이 되는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 살펴본다.

0538

① $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다.
② $f'(b)\neq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다.
④ 열린구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
⑤ 열린구간 (b, c)에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0539

ㄱ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이다. (거짓)
ㄴ. $f'(1)\neq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접한다. (참)
ㄹ. 열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고, 열린구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ②

유형 10 도함수의 그래프의 해석 (2) 개념 02~05

(i) 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$에 대한 증가와 감소를 표로 나타낸다.
(ii) 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x의 값 등을 찾아 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

0540

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	a	⋯	b	⋯	c	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대, $x=a$에서 극소이다.
또, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=b$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

0541

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	⋯	0	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이다.
또, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

유형 11 삼차함수가 극값을 가질 조건 개념 03, 04

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0542

$f(x)=x^3-2ax^2+(2a^2-4)x-1$에서
$f'(x)=3x^2-4ax+2a^2-4$
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4a^2-3(2a^2-4)>0$, $-2a^2+12>0$
$a^2-6<0$, $(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})<0$
$\therefore -\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$
따라서 $\alpha=-\sqrt{6}$, $\beta=\sqrt{6}$이므로
$\beta-\alpha=\sqrt{6}-(-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{6}$

0543

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax$에서
$f'(x)=-x^2+4x+a$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4+a>0$ $\quad\therefore a>-4$
따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 -3이다. 답 ③

0544

$f(x)=x^3+kx^2+x-4$에서
$f'(x)=3x^2+2kx+1$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-3>0$, $(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})>0$
$\therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$
따라서 양의 정수 k의 최솟값은 2이다. 답 ②

0545

$f(x)=(a+1)x^3+3x^2+(a-1)x+2$에서

$f'(x)=3(a+1)x^2+6x+a-1$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3(a+1)(a-1)>0,\ -3a^2+12>0$

$a^2-4<0,\ (a+2)(a-2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

이때 $f(x)$는 삼차함수이므로 $a+1\neq 0$, 즉 $a\neq -1$이다.

따라서 구하는 정수 a의 개수는 0, 1의 2이다. 답 ②

유형 12 삼차함수가 극값을 갖지 않을 조건 개념 03, 04

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

0546

$f(x)=x^3+kx^2-2kx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-2k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2+6k\leq 0,\ k(k+6)\leq 0$

$\therefore\ -6\leq k\leq 0$ 답 $-6\leq k\leq 0$

Lecture

삼차함수가 극값을 갖지 않는다.

⟺ 삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소한다.

0547

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+k$의 그래프가 k의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만나므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+k$에서

$f'(x)=x^2+2ax+1$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\leq 0,\ (a+1)(a-1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq a\leq 1$ 답 $-1\leq a\leq 1$

Lecture

(1) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d는 상수)의 그래프가 d의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만난다.

⟺ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(2) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d는 상수)의 그래프가 d의 값에 따라 x축과 한 번 또는 두 번 또는 세 번 만난다.

⟺ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

⟺ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0548

$f(x)=-x^3+(a+1)x^2+\frac{1}{3}(a-5)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2(a+1)x+\frac{1}{3}(a-5)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2+a-5\leq 0,\ a^2+3a-4\leq 0$

$(a+4)(a-1)\leq 0$ $\therefore\ -4\leq a\leq 1$

따라서 $M=1,\ m=-4$이므로

$M-m=1-(-4)=5$ 답 ⑤

0549

$f(x)=x^3-ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3a\leq 0,\ a(a-3)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 3$ ····· ㉠ ··· ❶

한편, $g(x)=-x^3+3x^2-(a+1)x+a$에서

$g'(x)=-3x^2+6x-(a+1)$

함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=9-3(a+1)>0,\ -3a+6>0$

$\therefore\ a<2$ ····· ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $0\leq a<2$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 0, 1의 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $g(x)$가 극값을 갖는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 13 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 개념 03, 04

삼차함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 극댓값과 극솟값을 모두 가진다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 열린구간 (a,b)에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 다음 세 가지 조건을 생각한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D의 부호 ⇨ $D>0$

(ii) $f'(a),f'(b)$의 부호

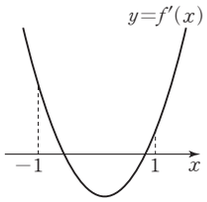
(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 축 $x=k$의 위치 ⇨ $a<k<b$

0550

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2kx^2+3kx-2$에서

$f'(x)=x^2-4kx+3k$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4k^2-3k>0,\ k(4k-3)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{3}{4}$

(ii) $f'(-1)=1+7k>0$에서 $k>-\frac{1}{7}$

(iii) $f'(1)=1-k>0$에서 $k<1$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2k$이므로

$-1<2k<1 \quad \therefore -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

(i)~(iv)에서 실수 k의 값의 범위는 $-\frac{1}{7}<k<0$

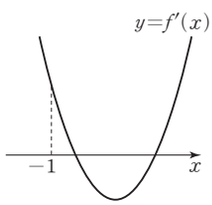
따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ③ $-\frac{1}{8}$이다. 답 ③

0551

$f(x)=x^3-3ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-9a>0,\ 9a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$

(ii) $f'(-1)=3+9a>0$에서 $a>-\frac{1}{3}$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이므로

$a>-1$

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는

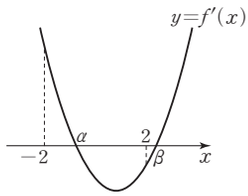
$-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $a>1$ 답 $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $a>1$

0552

$f(x)=x^3-kx^2-k^2x+3$에서

$f'(x)=3x^2-2kx-k^2$

함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x>2$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $-2<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x>2$에 있어야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-2<\alpha<2<\beta$이어야 하므로

(i) $f'(-2)=-k^2+4k+12>0$에서

$(k+2)(k-6)<0 \quad \therefore -2<k<6$

(ii) $f'(2)=-k^2-4k+12<0$에서

$(k+6)(k-2)>0 \quad \therefore k<-6$ 또는 $k>2$

(i), (ii)에서 $2<k<6$이므로 모든 정수 k의 값의 곱은

$3\times4\times5=60$ 답 ⑤

참고 이 문제의 경우에는 (i), (ii)를 만족시키기만 하면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 반드시 갖게 되므로 판별식을 사용하지 않아도 된다.

유형 14 사차함수의 극값의 조건 개념 03, 04

사차함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) $f(x)$가 극댓값 또는 극솟값을 갖지 않는다.

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

0553

$f(x)=x^4+2x^3-ax^2+1$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2-2ax=2x(2x^2+3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2+3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=9+8a>0$에서 ($a=0$이면 $2x^2+3x=0$이므로 $x=0$을 근으로 갖는다.)

$-\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-\frac{9}{8}+0+0=-\frac{9}{8}$ 답 ④

Lecture

(1) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때

$f(x)$는 삼차방정식 $f'(x)=0$의 근에 관계없이 항상 극솟값을 갖지만, $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극댓값을 갖는다.

(2) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때

$f(x)$는 삼차방정식 $f'(x)=0$의 근에 관계없이 항상 극댓값을 갖지만, $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극솟값을 갖는다.

0554

$f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax=-4x(x^2-3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=9+4a>0$에서

$-\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$ 답 $-\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

0555

$f(x)=x^4+2(a-1)x^2+4ax$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a=4(x+1)(x^2-x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 (또는 삼중근)을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+a=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=1-4a<0$ $\therefore a>\frac{1}{4}$ ($(x+1)^2=0$이 될 수 없으므로 삼중근을 갖지 않는다.)

(ii) $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 -1을 근으로 갖거나 -1이 아닌 중근을 가져야 한다.

$x^2-x+a=0$이 -1을 근으로 가지면

$1+1+a=0$ $\therefore a=-2$

$x^2-x+a=0$이 -1이 아닌 중근을 가지면

$D=1-4a=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 -2이다.

답 ①

0556

$f(x)=x^4+ax^3+2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+4x=x(4x^2+3ax+4)$

함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 극솟값만 갖고 극댓값을 갖지 않아야 한다.

즉, 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 (또는 삼중근)을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $x(4x^2+3ax+4)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9a^2-64<0$, $(3a+8)(3a-8)<0$ $\therefore -\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$

(ii) $x(4x^2+3ax+4)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$이 중근을 가져야 하므로 ($x=0$을 근으로 갖지 않는다.)

$D=9a^2-64=0$, $(3a+8)(3a-8)=0$

$\therefore a=-\frac{8}{3}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 $-\frac{8}{3}\leq a\leq\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3}$, $m=-\frac{8}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=-1$ 답 -1

발전 유형 15 함수의 그래프와 다항함수의 추론 개념 03~05

(1) 다항함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.

① $f(a)=b$, $f'(a)=0$

② $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

(2) 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)|$의 미분가능성

① $f(a)=0$, $f'(a)\neq0$

⇨ 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

② $f(a)=0$, $f'(a)=0$ ($f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.)

⇨ 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

0557

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+2ax$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -6을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $4+2a=0$ $\therefore a=-2$

$f(1)=-6$에서 $1+a+b=-6$

$1+(-2)+b=-6$ $\therefore b=-5$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2-5$이고

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-6	↗	-5	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 -5를 갖는다. 답 ①

Lecture

다항함수의 대칭성

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)=f(-x)$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f(x)$의 식은 차수가 짝수인 항 또는 상수항으로만 이루어진다.

(2) $f(x)=-f(-x)$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $f(x)$의 식은 차수가 홀수인 항으로만 이루어진다.

0558

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ (이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이다.)

조건 (가)에서 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$-\frac{2a}{6}=2$ $\therefore a=-6$

또, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$, $3+(-12)+b=0$ $\therefore b=9$

$f(1)=4$에서 $1+a+b+c=4$

$1+(-6)+9+c=4$ $\therefore c=0$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$이고

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 0을 갖는다. 답 0

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$

즉, 조건 (가)에서 $f'(3)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$

$\therefore a=-6, b=9$

$f(1)=4$에서 $1+(-6)+9+c=4$이므로 $c=0$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$이고 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=27-54+27=0$

0559

$g(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$라 하자.

$g(x)=(x-a)(x+1)(x-5)$이므로 함수 $f(x)=|g(x)|$가 $x=-1$에서만 미분가능하지 않으려면

$g'(-1)\neq 0$이고 $g'(5)=0$이어야 한다.

$\therefore a=5$ ($g'(x)=(x+1)(x-5)+(x-a)(x-5)+(x-a)(x+1)$에서 $g'(5)=0$이려면 $a=5$) … ❶

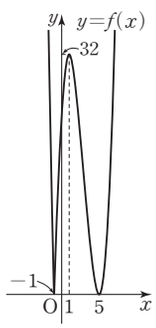
즉, $g(x)=(x+1)(x-5)^2$이고

$g'(x)=(x-5)^2+2(x+1)(x-5)=3(x-1)(x-5)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$ … ❷

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, $y=f(x)=|g(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	…	1	…	5	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	32	↘	0	↗



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 32를 갖는다. … ❸

답 32

참고 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

채점 기준	비율
❶ 절댓값 안의 식을 $g(x)$로 정의하고 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30 %

0560

$f(1)\neq 0$이면 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)^2$이므로

$f'(x)=8(x+1)(x-2)^2+8(x+1)^2(x-2)$

$=8(x+1)(x-2)(2x-1)$

이때 $f'(1)\neq 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

한편, $f(x)$가 $(x+1)^2$ 또는 $(x-2)^2$을 인수로 가지면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소가 된다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이려면 $f(x)$는 $(x+1)(x-2)$를 인수로 가져야 한다.

$\therefore f(x)=4(x+1)(x-1)^2(x-2), g(x)=\frac{1}{4}(x+1)(x-2)$

따라서 $g'(x)=\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(x+1)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$이므로

$g'(0)=-\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{1}{4}$

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 0을 가지면 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

유형 16 함수의 최대·최소 개념 06

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$의 극값을 구한다.

(ii) $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0561

$f(x)=x^3+x^2-x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	…	-1	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	2

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-2$일 때 최솟값 -1을 가지므로 $M=2$, $m=-1$

$\therefore M+m=2+(-1)=1$ 답 1

0562

닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	…	-2	…	1
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(-2)$	↘	$f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 $x=-2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(-2)$이다. 답 ②

0563

$f(x)=4x^3-3x-1$에서

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ ($\because -2\le x\le 0$)

닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	…	$-\frac{1}{2}$	…	0
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-27	↗	0	↘	-1

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 0을 가지므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0$

$\therefore 4\alpha^2+\beta^2=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=1$ 답 ③

0564

$f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{4}{3}x^3+9$에서

$f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2=\frac{4}{3}x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	0	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $x=0$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 9, $x=3$일 때 최솟값 0을 가지므로 $M=9$, $m=0$

$\therefore M-m=9-0=9$ 답 ③

0565

$f(x)=-x^3+3x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\geq -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	↗	6	↘

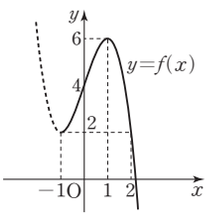
이때 $f(x)=2$에서 $-x^3+3x+4=2$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$가 최솟값 $f(-1)=2$를 갖기 위한 a의 값의 범위는

$-1<a\leq 2$ 답 ②



Plus 0566~0567 치환을 이용한 함수의 최대·최소

함수 $f(x)$의 식에 공통 부분이 있으면

(i) 공통 부분을 t로 치환하여 주어진 구간에서 t의 값의 범위를 구한다.

(ii) $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.

(iii) (i)에서 구한 t의 값의 범위에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0566

$x^2-4x+2=t$라 하면 $t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

$0\leq x\leq 4$에서 t의 값의 범위는 $-2\leq t\leq 2$

$g(t)=t^3-12t+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

$-2\leq t\leq 2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	-2	$\cdots$	2
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	17	↘	-15

따라서 함수 $g(t)$는 $-2\leq t\leq 2$에서 $t=-2$일 때 최댓값 17, $t=2$일 때 최솟값 -15를 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $17+(-15)=2$ 답 ⑤

0567

$g(x)=t$라 하면

$t=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$ $\therefore t\leq 0$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t+4$

$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ ($\because t\leq 0$)

$t\leq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(t)$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	↗	6	↘	4

따라서 함수 $f(t)$는 $t\leq 0$에서 $t=-1$일 때 최댓값 6을 가지므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 6이다. 답 ⑤

유형 17 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정 개념 06

미정계수를 포함한 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어지면

⇨ $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 직접 구하여 주어진 값과 비교한다.

0568

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2+k$	↗	$5+k$	↘	$-27+k$	↗	$-20+k$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 $5+k$, $x=3$일 때 최솟값 $-27+k$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 -12이므로

$(5+k)+(-27+k)=-12$

$-22+2k=-12$ $\therefore k=5$ 답 ①

0569

$f(x)=x^3-6x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 1\leq x\leq 5$) … ❶

닫힌구간 $[1, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-5+k$	↘	$-32+k$	↗	$-25+k$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 $x=1$일 때 최댓값 $-5+k$, $x=4$일 때 최솟값 $-32+k$를 갖는다. … ❷

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -20이므로

$-32+k=-20$ $\therefore k=12$ … ❸

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$-5+12=7$ … ❹

답 7

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0570

$f(x)=x^3-3k^2x+7$에서 $f'(x)=3x^2-3k^2=3(x+k)(x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ ($\because k>0$, $0\le x\le 2k$)

닫힌구간 $[0, 2k]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	k	$\cdots$	$2k$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	$-2k^3+7$	↗	$2k^3+7$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2k]$에서 $x=2k$일 때 최댓값 $2k^3+7$, $x=k$일 때 최솟값 $-2k^3+7$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 32이므로

$(2k^3+7)-(-2k^3+7)=32$

$4k^3=32$, $k^3=8$ $\therefore k=2$ ($\because k$는 실수) 답 2

0571

$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+b$에서 $f'(x)=ax^2-4ax=ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{7}{3}a+b$	↗	b	↘	$-\frac{16}{3}a+b$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 2$에서 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-\frac{16}{3}a+b$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -13이므로

$b=3$, $-\frac{16}{3}a+b=-13$ $\therefore a=3, b=3$

$\therefore ab=3\times 3=9$ 답 ④

0572

$f(x)=-6x^4+8x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=-24x^3+24x^2+2ax=-2x(12x^2-12x-a)$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로 $x=-1$일 때 극댓값 4를 가져야 한다.

$f'(-1)=0$에서 $48-2a=0$ $\therefore a=24$

$f(-1)=4$에서 $-14+a+b=4$

$-14+24+b=4$ $\therefore b=-6$

따라서 $f(x)=-6x^4+8x^3+24x^2-6$이고

$f(-2)=-96-64+96-6=-70$, $f(0)=-6$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 -70이다. 답 ③

유형 18 최대·최소의 활용 – 길이, 넓이 개념 06

좌표평면에서 도형의 길이, 넓이의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때

(i) 곡선 위를 움직이는 점의 x좌표를 t로 놓고, t의 값의 범위를 정한다.

(ii) 길이 또는 넓이를 t에 대한 함수로 나타낸다.

(iii) 함수의 최대·최소를 이용한다.

0573

점 P의 좌표를 (t, t^2)이라 하면

$l^2=\overline{PQ}^2=(t-3)^2+t^4=t^4+t^2-6t+9$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

이때 $2t^2+2t+3=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로

$f'(t)=0$에서 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이다.

이때 $l>0$이므로 l^2, 즉 $f(t)$가 최소이면 l도 최소이다.

따라서 l이 최소가 되는 점 P의 x좌표는 1이다. 답 ①

0574

점 P의 좌표를 $(t, -t^2+2)$라 하면

$\overline{AP}^2=(t-5)^2+(-t^2+1)^2=t^4-t^2-10t+26$,

$\overline{BP}^2=(t+3)^2+(-t^2+1)^2=t^4-t^2+6t+10$

이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2t^4-2t^2-4t+36$

$f(t)=2t^4-2t^2-4t+36$이라 하면

$f'(t)=8t^3-4t-4=4(t-1)(2t^2+2t+1)$

이때 $2t^2+2t+1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$이므로

$f'(t)=0$에서 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은

$f(1)=2-2-4+36=32$ 답 32

0575

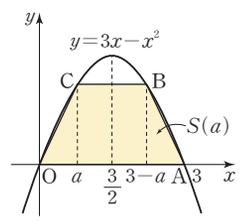
$3x-x^2=0$에서 $x(x-3)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=3$ $\therefore$ A$(3, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를

$(a, 3a-a^2)$ $\left(0<a<\frac{3}{2}\right)$이라 하면

B$(3-a, 3a-a^2)$ … ❶



사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times\{3+(3-2a)\}(3a-a^2)$

$=(3-a)(3a-a^2)=a^3-6a^2+9a$ … ❷

$S'(a)=3a^2-12a+9=3(a-1)(a-3)$

$S'(a)=0$에서 $a=1\left(\because 0<a<\frac{3}{2}\right)$

$0<a<\frac{3}{2}$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	1	…	$\frac{3}{2}$
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값은

$S(1)=1-6+9=4$ … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 점 B, C의 좌표를 문자 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 사다리꼴 OABC의 넓이를 a에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0576

두 점 $P(-1, -1)$, $Q(2, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-8=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}(x-2)$

$\therefore 3x-y+2=0$

곡선 $y=x^3$ 위를 움직이는 점 A의 좌표를 (a, a^3) $(-1<a<2)$이라 하면 점 A와 직선 PQ 사이의 거리는

$\frac{|3a-a^3+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{(2-a)(a+1)^2}{\sqrt{10}}$ $(\because -1<a<2)$

또, $\overline{PQ}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{8-(-1)\}^2}=3\sqrt{10}$

삼각형 PAQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{10}\times\frac{(2-a)(a+1)^2}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}(-a^3+3a+2)$

$S'(a)=\frac{3}{2}(-3a^2+3)=-\frac{9}{2}(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ $(\because -1<a<2)$

$-1<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	−1	…	1	…	2
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값은

$S(1)=\frac{3}{2}\times(-1+3+2)=6$ 답 ④

유형 19 최대·최소의 활용 – 부피 개념 06

입체도형의 부피의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때

(i) 변의 길이에서 줄어들거나 늘어나는 부분을 x로 놓고, x의 값의 범위를 정한다.

(ii) 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.

(iii) 함수의 최대·최소를 이용한다.

0577

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm $(0<x<4)$라 하면 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(15-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(8-2x)$ cm이다.

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$V(x)=x(15-2x)(8-2x)$

$=4x^3-46x^2+120x$

$V'(x)=12x^2-92x+120=4(3x-5)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{3}$ $(\because 0<x<4)$

$0<x<4$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{5}{3}$	…	4
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\frac{5}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{5}{3}$ cm이다. 답 $\frac{5}{3}$ cm

0578

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이 r와 높이 h의 합이 일정한 원기둥에 대하여 부피를 $V(r)$라 하면

$r+h=a$ (a는 상수) …… ㉠

$V(r)=\pi r^2h$ …… ㉡

㉠에서 $h=a-r$를 ㉡에 대입하면

$V(r)=\pi r^2(a-r)=-\pi r^3+a\pi r^2$

$V'(r)=-3\pi r^2+2a\pi r=-\pi r(3r-2a)$

$V'(r)=0$에서 $r=\frac{2}{3}a$ $(\because 0<r<a)$

$0<r<a$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

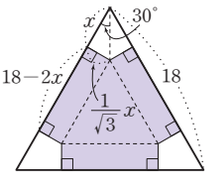
r	0	…	$\frac{2}{3}a$	…	a
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(r)$는 $r=\frac{2}{3}a$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피가 최대일 때의 r와 h의 비는

$r:h=r:(a-r)=\frac{2}{3}a:\frac{1}{3}a=2:1$ 답 ②

0579

오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 x $(0<x<9)$인 부분까지 잘라 낸다고 하면 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $18-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는



$\frac{1}{2}\times(18-2x)^2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}(x-9)^2$

이때 상자의 높이는 $x\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\sqrt{3}(x-9)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}x=x(x-9)^2$

$V'(x)=(x-9)^2+x\times2(x-9)=3(x-3)(x-9)$

$V'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0<x<9$)

$0<x<9$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	9
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

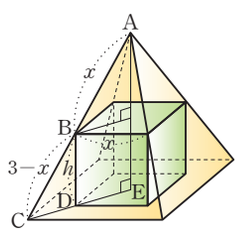
따라서 함수 $V(x)$는 $x=3$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$V(3)=3\times(3-9)^2=108$ 답 108

0580

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x $(0<x<3)$, 높이를 h라 하면 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=3-x$이다.

이때 $\triangle BCD\backsim\triangle ACE$ (AA 닮음)이므로



$\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{AE}$에서

$(3-x):3=h:\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore h=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$

$\overline{AC}=3$, $\overline{CE}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $\overline{AE}=\sqrt{9-\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x^2h=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x^2-x^3)$

정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

$V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x-3x^2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x(2-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은

$V(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(12-8)=2\sqrt{2}$ 답 ①

STEP 3 내신 마스터

0581

유형 01 함수의 증가와 감소

|전략| 함수 $f(x)$가 $\alpha\le x\le\beta$에서 증가하므로 $f'(x)\ge0$인 해를 구하여 주어진 범위와 비교한다.

$f(x)=-6x^3+18x+2$에서

$f'(x)=-18x^2+18=-18(x+1)(x-1)$

이때 함수 $f(x)$는 $\alpha\le x\le\beta$에서 증가하므로 이 범위에서 $f'(x)\ge0$이다.

$-18(x+1)(x-1)\ge0$, $(x+1)(x-1)\le0$

$\therefore -1\le x\le1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로

$\alpha\beta=-1\times1=-1$ 답 ②

0582

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 일대일함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하기 위한 조건을 구한다.

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+a$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+3a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a\le0$

$a(a+3)\le0$ $\therefore -3\le a\le0$

따라서 정수 a의 개수는 -3, -2, -1, 0의 4이다. 답 ④

0583

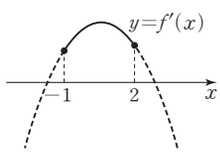
유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하려면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+ax+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하려면 $-1\le x\le2$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로



$f'(-1)=-3-6+a\ge0$에서

$a\ge9$ ····· ㉠

$f'(2)=-12+12+a\ge0$에서

$a\ge0$ ····· ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a\ge9$이므로 실수 a의 최솟값은 9이다.

답 ⑤

0584

유형 04 함수의 극대와 극소

|전략| $f'(x)=0$인 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사하여 두 점의 좌표를 찾는다.

$f(x)=\frac{3}{4}x^4+5x^3+9x^2$에서

$f'(x)=3x^3+15x^2+18x=3x(x+2)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	8	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=-3$, $\beta=0$ ($\because \alpha<\beta$)이고

$f(\alpha)=f(-3)=\frac{27}{4}$, $f(\beta)=f(0)=0$이다.

따라서 두 점 $\mathrm{A}\left(-3, \frac{27}{4}\right)$, $\mathrm{B}(0, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-\frac{27}{4}}{0-(-3)}=-\frac{9}{4}$$

답 ①

0585

유형 05 함수의 극값을 이용한 미정계수의 결정

|전략| $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-f(-1)\}=0$ $\quad\therefore f(1)=f(-1)$ ····· ㉠

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=0$ ····· ㉡

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

㉠에서 $1+a+b+c=-1+a-b+c$ $\quad\therefore b=-1$

㉡에서 $3+2a+b=0$, $3+2a-1=0$ $\quad\therefore a=-1$

즉, $f(x)=x^3-x^2-x+c$이므로

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{27}+c$	↘	$-1+c$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 조건 (나)에서 $a=1$이고

$-1+c=0$ $\quad\therefore c=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1$이므로

$f(-2)=-8-4+2+1=-9$

$\therefore a+f(-2)=1+(-9)=-8$

답 ③

0586

유형 06 함수의 극대·극소의 활용

|전략| 함수 $f(x)$가 x축과 접하려면 $f'(\alpha)=0$인 실수 α에서 $f(\alpha)=0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3-2ax^2+a^2x-\frac{a}{3}$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{a}{3}$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$, $x=a$에서 극값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$가 x축에 접하므로 $f\left(\frac{a}{3}\right)=0$ 또는 $f(a)=0$

(i) $f\left(\frac{a}{3}\right)=0$인 경우

$\frac{4}{27}a^3-\frac{1}{3}a=0$에서

$4a^3-9a=0$, $a(2a+3)(2a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $f(a)=0$인 경우

$-\frac{a}{3}=0$에서 $a=0$

(i), (ii)에서 양수 a의 값은 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

0587

유형 07 삼차함수의 계수의 부호 결정

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면 α, β가 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근임을 이용한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이므로

$a<0$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)>0$이므로 $d>0$

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}<0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$

이때 $a<0$이므로 $b<0$, $c<0$

$\therefore a<0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤ $ad>0$이다.

답 ⑤

0588

유형 08 도함수의 그래프와 함수의 극값

|전략| 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 극대 또는 극소라는 점을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=1$이므로 $d=1$

$f'(0)=3$이므로 $c=3$

또, $f'(1)=0, f'(3)=0$이므로

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+c=0$

$3a+2b+3=0 \quad \therefore 3a+2b=-3$ ····· ㉠

$f'(3)=0$에서 $27a+6b+c=0$

$27a+6b+3=0 \quad \therefore 9a+2b=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}, b=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{\frac{1}{3}}=-3$ 답 ②

0589

유형 09 도함수의 그래프의 해석 (1)

|전략| $f'(x)$의 부호와 그 변화를 보고 함수 $f(x)$를 추론한다.

ㄱ. $f'(x_2)$가 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=x_2$에서 미분가능하다. (거짓)

ㄴ. $x=x_3$, $x=x_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_3$, $x=x_6$에서 극대이고 $f(x_3)\neq f(x_6)$이므로 열린구간 (x_2, ∞)에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 2개 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=x_3$에서 극대이지만 극댓값이 0인지는 알 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0590

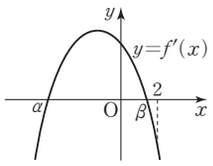
유형 13 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x<0$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $0<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x<0$에 있어야 함을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+3ax+8$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 $0<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x<0$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $0<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x<0$에 있어야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

$\alpha<0<\beta<2$이어야 하므로

(i) $f'(0)=3a>0$에서 $a>0$

(ii) $f'(2)=-12+7a<0$에서 $a<\frac{12}{7}$

(i), (ii)에서 $0<a<\frac{12}{7}$ 답 ②

0591

유형 14 사차함수의 극값의 조건

|전략| 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0$, $D=9-4a>0$에서

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 실수 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ 3이다. 답 ⑤

참고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는다.
⟺ 사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0592

유형 15 함수의 그래프와 다항함수의 추론

|전략| 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이어야 함을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(a)=0$을 만족시키는 실수 a는 반드시 하나 이상 존재한다.

이때 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $f(a)=0$인 모든 실수 a에 대하여 $f'(a)=0$이어야 하므로 다항식 $f(x)$는 $(x-a)^3$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=p(x-a)^3$ ($p>0$)이라 하면

$f'(x)=3p(x-a)^2$에서 $f'(2)=0$이므로

$3p(2-a)^2=0 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=p(x-2)^3$이므로

$\frac{f(4)}{f(3)}=\frac{8p}{p}=8$ 답 ③

Lecture

삼차함수 $f(x)$와 $|f(x)|$의 미분가능성

(1) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근 a, b, c를 갖는 경우
⇨ 함수 $|f(x)|$는 $x=a$, $x=b$, $x=c$에서 미분가능하지 않다.

(2) 방정식 $f(x)=0$이 한 실근 a와 중근 또는 한 실근 a와 두 허근을 갖는 경우
⇨ 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

(3) 방정식 $f(x)=0$이 삼중근 a를 갖는 경우
⇨ 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

0593

유형 17 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하고 최댓값을 a에 대한 식으로 나타낸 다음 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=2x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$	$a+27$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 $a+27$을 가지므로

$a+27=10 \quad \therefore a=-17$ 답 ②

0594

유형 17 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 a의 값에 따라 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2-8x=4x(x+1)(x-2)$

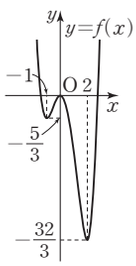
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$

또, $f(x)=0$에서 $x^2\left(x^2-\frac{4}{3}x-4\right)=0$

즉, $x=0$ 또는 $x=\frac{2\pm2\sqrt{10}}{3}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $0<a\le\frac{-2+2\sqrt{10}}{3}$인 경우

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=0$일 때 0이므로 최댓값과 최솟값의 합이 0보다 작다.

따라서 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{-2+2\sqrt{10}}{3}<a<2$인 경우

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-a)$, 최솟값은 $f(a)$이므로 $f(-a)+f(a)=0$에서

$2a^4-8a^2=0, \ 2a^2(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $a\ge2$인 경우

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-a)$, 최솟값은 $f(2)$이므로 $f(-a)+f(2)=0$에서

$a^4+\frac{4}{3}a^3-4a^2-\frac{32}{3}=0$

$(a-2)\left(a^3+\frac{10}{3}a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{3}\right)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a\ge2)$ ← $g(a)=a^3+\frac{10}{3}a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{3}$이라 하면 $g'(a)=3a^2+\frac{20}{3}a+\frac{8}{3}>0$이고 $g(0)=\frac{16}{3}$이므로 $g(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 음수이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=2$ 답 ④

0595

유형 18 최대·최소의 활용 – 길이, 넓이

|전략| 점 P의 좌표를 (t, t^2)으로 놓고 직사각형 APBC의 넓이를 t에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

점 P의 좌표를 (t, t^2) $(0<t<1)$이라 하면

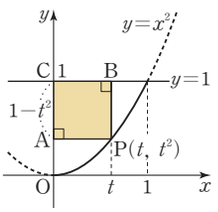
$\overline{AP}=t, \ \overline{BP}=1-t^2$

직사각형 APBC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=t(1-t^2)=-t^3+t$

$S'(t)=-3t^2+1$

$=-3\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



$S'(t)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because \ 0<t<1)$

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 APBC의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 답 ②

0596

유형 01 함수의 증가와 감소

|전략| 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[-1, 2]$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, 2임을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx-2$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[-1, 2]$이므로 $f'(x)\ge0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le2$이다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, 2이다. … ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=\frac{2a}{3}, \ -1\times2=-\frac{b}{3}$

$\therefore a=\frac{3}{2}, \ b=6$ … ❷

따라서 $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-2$이므로

$f(2)=-8+6+12-2=8$ … ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, 2임을 알 수 있다.	2점
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

참고 삼차함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[\alpha, \beta]$이면 이차부등식 $f'(x)\ge0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 이차방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=\alpha$, $x=\beta$이다.

0597

유형 12 삼차함수가 극값을 갖지 않을 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖고, 삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근, 이차방정식 $g'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a^2-2a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0,\ a^2-3a<0$

$a(a-3)<0 \quad \therefore\ 0<a<3$ ····· ㉠ ··· ❶

또, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$에서

$g'(x)=x^2+2ax+5a-4$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-(5a-4)\le 0,\ a^2-5a+4\le 0$

$(a-1)(a-4)\le 0 \quad \therefore\ 1\le a\le 4$ ····· ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $1\le a<3$이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	2점

0598

유형 16 함수의 최대·최소

|전략| $g(x)=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구한 다음 그 범위에서 $(f\circ g)(x)=f(t)$의 최댓값을 구한다.

$g(x)=t$라 하면 $t=x^2+4x+2=(x+2)^2-2 \quad \therefore\ t\ge -2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+12t$ ··· ❶

$f'(t)=-3t^2+12=-3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$ ··· ❷

$t\ge -2$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	0	+	0	−
$f(t)$	-16	↗	16	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t\ge -2$에서 $t=2$일 때 최댓값 16을 가지므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 16이다. ··· ❸

답 16

채점 기준	배점
❶ $g(x)=t$로 놓고 $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $(f\circ g)(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

0599

유형 15 함수의 그래프와 다항함수의 추론

|전략| $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 극댓값과 극솟값의 차를 구한다.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f'(3)=0$

(2) $f'(1-x)=f'(1+x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(-1)=f'(3)$

이때 $f'(3)=0$이므로 $f'(-1)=0$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x=-1$, $x=3$을 근으로 가지므로

$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$

즉, $2a=-6$, $b=-9$이므로 $a=-3$, $b=-9$

(4) $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고, $x=-1$일 때 극댓값, $x=3$일 때 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$f(-1)-f(3)=(5+c)-(-27+c)=32$

답 (1) 0 (2) 0 (3) $a=-3, b=-9$ (4) 32

채점 기준	배점
(1) $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	2점
(2) $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
(4) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구할 수 있다.	3점

0600

유형 19 최대·최소의 활용 – 부피

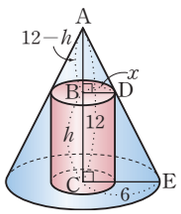
|전략| 삼각형의 닮음을 이용하여 원기둥의 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타내고 최댓값을 구한다.

(1) 오른쪽 그림에서 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BD}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$x:6=(12-h):12$

$12-h=2x \quad \therefore\ h=12-2x$



(2) $V(x)=\pi x^2 h=\pi x^2(12-2x)$

$=2\pi(6x^2-x^3)$

(3) $V'(x)=2\pi(12x-3x^2)=6\pi x(4-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because\ 0<x<6$)

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V(4)=2\pi\times(96-64)=64\pi$

답 (1) $h=12-2x$ (2) $V(x)=2\pi(6x^2-x^3)$ (3) 64π

채점 기준	배점
(1) h를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
(2) $V(x)$를 x에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	2점
(3) 원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

0601

|전략| $h(x)$가 증가하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)\geq 0$, $h(x)$가 감소하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)\leq 0$임을 이용한다.

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$가 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$에서 증가하고, 열린구간 $(0, 1)$에서 감소하므로 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$에서 $h'(x)\geq 0$이고 열린구간 $(0, 1)$에서 $h'(x)\leq 0$이다.

이때 $f'(x)=x^2+2ax+b$, $g'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -3 & (x<0)\end{cases}$이고

$x>0$에서 함수 $h'(x)$는 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $h'(1)=0$이다. ($x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀐다.)

즉, $f'(1)=g'(1)$이므로

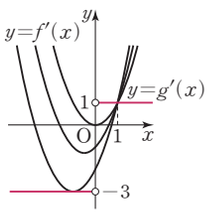
$1+2a+b=1$ $\quad\therefore b=-2a$

$\therefore f'(x)=x^2+2ax-2a$

$\quad=(x+a)^2-a^2-2a$

또, 오른쪽 그림과 같이

$x<0$에서 $f'(x)\geq g'(x)$이고



$0<x<1$에서 $f'(x)\leq g'(x)$이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$x<0$에서 $f'(x)$의 최솟값은 $x=-a$일 때 $-a^2-2a$이므로

$-a^2-2a\geq -3$, $a^2+2a-3\leq 0$

$(a+3)(a-1)\leq 0$ $\quad\therefore -3\leq a\leq 1$

이때 $a>0$이므로 $0<a\leq 1$

(ii) $0\leq -a<1$, 즉 $-1<a\leq 0$인 경우

$-3\leq f'(0)\leq 1$에서 $-3\leq -2a\leq 1$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{3}{2}$

이때 $-1<a\leq 0$이므로 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 0$

(iii) $-a>1$, 즉 $a<-1$인 경우

$x>1$에서 $f'(x)<1$, 즉 $f'(x)<g'(x)$인 구간이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 1$

따라서 $a+b=a+(-2a)=-a$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 -1이므로

$M+m=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0602

|전략| 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 함수 $g(x)$를 추론한다.

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
x의 부호	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$의 부호	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$의 부호	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$의 증감	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(a, 0)$에서 증가하고, 열린구간 $(0, b)$에서 감소한다. (거짓)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=0$, $x=b$, $x=c$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x의 개수는 4이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0603

|전략| 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 1, 3이라는 것과 함수의 그래프와 직선의 교점을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로 ($f'(1)=0$, $f'(3)=0$)

$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$

즉, $2a=-12$, $b=9$이므로 $a=-6$, $b=9$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 두 점 $(1, f(1))$, $(3, f(3))$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 $m=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{c-(c+4)}{2}=-2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x+10$

이때 직선 $y=-2x+10$ 위의 점 $(1, 8)$이 ㉠을 지나므로

$8=1-6+9+c$ $\quad\therefore c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-6)^2+9^2+4^2=133$ 답 ④

0604

|전략| 함수 $g(x)$를 구하고, $g(x)$가 미분가능하지 않은 점에서 함수 $(x-a)g(x)$의 미분가능성을 확인한다.

$f(x)=x^3-3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

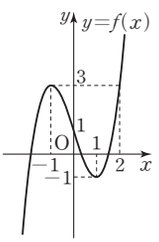
즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖고, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다.

$x^3-3x+1=3$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

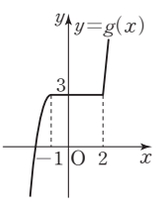
한편,

$t<-1$일 때, $g(t)=f(t)$

$-1\leq t<2$일 때, $g(t)=f(-1)$

$t\geq 2$일 때, $g(t)=f(t)$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때 함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{f(-1)-f(-1)}{x+1}=0$

$\lim_{x\to -1-}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=0$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $(x-a)g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 함수 $(x-a)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 $h(x)=(x-a)f(x)$라 하면 $h(x)$는 다항함수이고

$h'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$이므로

$\lim_{x\to 2+}\dfrac{(x-a)g(x)-(2-a)g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{(x-a)f(x)-(2-a)f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=h'(2)=f(2)+(2-a)f'(2)$

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{(x-a)g(x)-(2-a)g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{(x-a)f(2)-(2-a)f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{(x-2)f(2)}{x-2}$

$=f(2)$

즉, $f(2)+(2-a)f'(2)=f(2)$에서

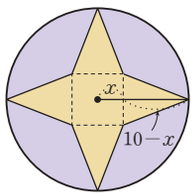
$(2-a)f'(2)=0 \quad \therefore a=2\ (\because f'(2)\neq 0)$ 답 2

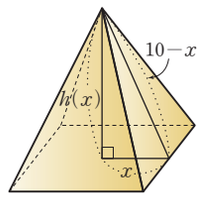
0605

| 전략 | 정사각뿔의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 $2x$로 놓고 정사각뿔의 부피를 x에 대한 식으로 나타내어 부피가 최대일 때의 x의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 정사각뿔의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 $2x$, 높이를 $h(x)$라 하면

$h(x)=\sqrt{(10-x)^2-x^2}=\sqrt{100-20x}\ (0<x<5)$





정사각뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\dfrac{1}{3}\times(2x)^2\times h(x)=\dfrac{4}{3}x^2\sqrt{100-20x}=\dfrac{4}{3}\sqrt{100x^4-20x^5}$

$g(x)=100x^4-20x^5$이라 하면

$g'(x)=400x^3-100x^4=100x^3(4-x)$

$g'(x)=0$에서 $x=4\ (\because 0<x<5)$

$0<x<5$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이다.

$g(x)$가 최대일 때 $V(x)$도 최대이므로 정사각뿔의 부피가 최대일 때의 정사각뿔의 높이는

$h(4)=\sqrt{100-80}=2\sqrt{5}$ 답 ③

6 도함수의 활용 (3)

본책 96~109쪽

STEP 개념 마스터

0606

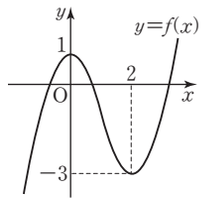
$f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 3



0607

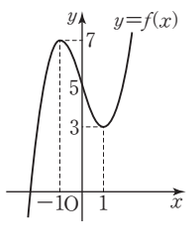
$f(x)=x^3-3x+5$라 하면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 답 1



0608

$f(x)=x^4-2x^2-3$이라 하면

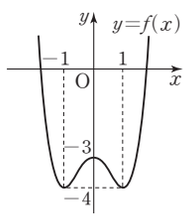
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−4	↗	−3	↘	−4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 답 2



0609

$x^3=12x-10$에서 $x^3-12x+10=0$

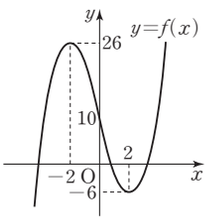
$f(x)=x^3-12x+10$이라 하면 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 3



0610

$2x^3+1=3x^2$에서 $2x^3-3x^2+1=0$

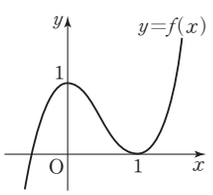
$f(x)=2x^3-3x^2+1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 답 2



0611

$2x^4-4x^3+3=-x^4+4$에서 $3x^4-4x^3-1=0$

$f(x)=3x^4-4x^3-1$이라 하면

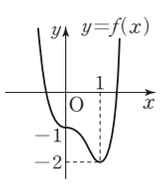
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 답 2



0612

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$ (극솟값)

이때 $f(1)f(3)=1\times(-3)=-3<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (극댓값) 답 서로 다른 세 실근

0613

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$이라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ (극솟값)

이때 $f(-2)f(1)=27\times0=0$이므로 주어진 방정식은 한 실근과 중근을 갖는다. (극댓값) 답 한 실근과 중근

0614

$f(x)=x^3+6x^2+9x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

(1) 삼차방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 (극솟값)

$f(-3)f(-1)=0$이어야 하므로 (극댓값)

$-k(-k-4)=0$, $k(k+4)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=0$

(2) 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-3)f(-1)>0$이어야 하므로

$-k(-k-4)>0$, $k(k+4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

답 (1) $k=-4$ 또는 $k=0$ (2) $k<-4$ 또는 $k>0$

0615

$f(x)=x^3-12x+16$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=$ (가) 2 ($\because x\geq0$)

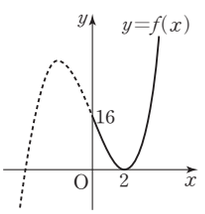
$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	16	↘	0	↗

$x\geq0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 (나) 0 을 가지므로

$f(x)=x^3-12x+16\geq0$이다.

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $x^3+16\geq12x$가 성립한다.



답 (가) 2 (나) 0

0616

$f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

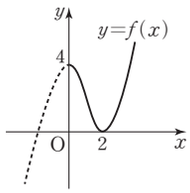
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

$x \geq 0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로 $f(x)=x^3-3x^2+4 \geq 0$이다.
따라서 $x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3-3x^2+4 \geq 0$이 성립한다.



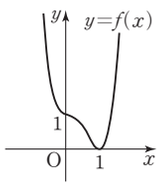
답 풀이 참조

0617

$f(x)=3x^4-4x^3+1$이라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가지므로 $f(x)=3x^4-4x^3+1 \geq 0$이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-4x^3+1 \geq 0$이 성립한다.



답 풀이 참조

0618

$v=\frac{dx}{dt}=6t-7$, $a=\frac{dv}{dt}=6$이므로
$t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=6\times3-7=11$, $a=6$

답 $v=11$, $a=6$

0619

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2$, $a=\frac{dv}{dt}=6t$이므로
$t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=3\times1^2-2=1$, $a=6\times1=6$

답 $v=1$, $a=6$

0620

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+3$, $a=\frac{dv}{dt}=-12t$이므로
$t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=-6\times2^2+3=-21$, $a=-12\times2=-24$

답 $v=-21$, $a=-24$

0621

$v=\frac{dx}{dt}=4t^3-16t$이므로 $v=4t(t+2)(t-2)=0$에서
$t=2$ ($\because t>0$)
즉, $t=2$의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=2$에서 운동 방향을 바꾼다.

답 2

0622

고무줄의 길이를 l이라 하면
$l=t^3+2t^2+t+1$ $\therefore \frac{dl}{dt}=3t^2+4t+1$
따라서 $t=2$에서의 고무줄의 길이의 변화율은
$3\times2^2+4\times2+1=21$

답 21

0623

정사각형의 넓이를 S라 하면
$S=(1+t)^2$ $\therefore \frac{dS}{dt}=2(1+t)$
따라서 $t=3$에서의 정사각형의 넓이의 변화율은
$2\times(1+3)=8$

답 8

0624

구의 부피를 V라 하면
$V=\frac{4}{3}\pi\times(2t)^3=\frac{32}{3}\pi t^3$ $\therefore \frac{dV}{dt}=32\pi t^2$
따라서 $t=2$에서의 구의 부피의 변화율은
$32\pi\times2^2=128\pi$

답 128π

STEP 2 유형 마스터

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 개념 01

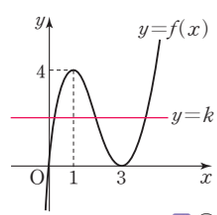
방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0625

$x^3-6x^2+9x-k=0$에서 $x^3-6x^2+9x=k$
$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $0<k<4$
따라서 $a=0$, $b=4$이므로 $b-a=4$



답 ④

0626

$x^4-4x^3-2x^2+12x-a=0$에서 $x^4-4x^3-2x^2+12x=a$
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

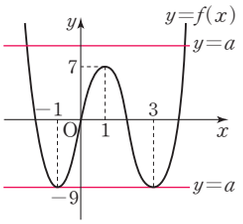
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$a=-9$ 또는 $a>7$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 -9이다. 답 -9



0627

$2f(x)-k=0$에서 $f(x)=\frac{k}{2}$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로

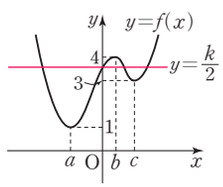
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	4	↘	3	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{2}$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$3<\frac{k}{2}<4$ $\therefore 6<k<8$ 답 ④



0628

$f(x)=x^3-12x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

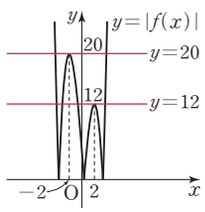
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-12	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $|x^3-12x+4|=n$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되려면 $n=12$ 또는 $n=20$이어야 한다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$12+20=32$ 답 32



참고 방정식 $|x^3-12x+4|=n$의 서로 다른 실근의 개수는

$1\le n<12$일 때 6, $12<n<20$일 때 4, $n>20$일 때 20이다.

유형 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호 개념 01

방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호와 같다.

0629

$x^3-3x-a+1=0$에서 $x^3-3x+1=a$

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

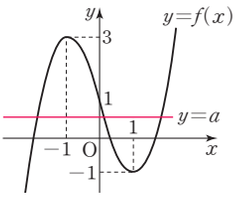
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-1<a<1$

따라서 구하는 정수 a의 값은 0이다. 답 ③



0630

$x^3-x^2+a=2x^2+9x$에서 $-x^3+3x^2+9x=a$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$라 하면

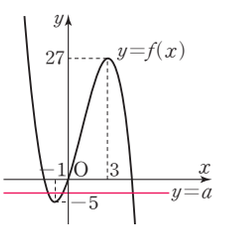
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-5<a<0$



답 $-5<a<0$

0631

$4x^3-3x-a=0$에서 $4x^3-3x=a$

$f(x)=4x^3-3x$라 하면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

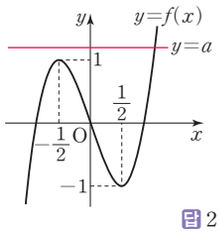
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 오직 한 개의 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는

$a>1$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.



답 2

0632

$3x^4+4x^3-12x^2+2-k=0$에서 $3x^4+4x^3-12x^2+2=k$

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

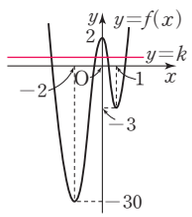
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-30	↗	2	↘	-3	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는

$-3<k<2$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1이므로 그 합은 $-2+(-1)+0+1=-2$



답 -2

유형 03 극값을 이용한 삼차방정식의 근의 판별 개념 01

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은

(1) (극댓값)×(극솟값)<0 ⟺ 서로 다른 세 실근

(2) (극댓값)×(극솟값)$=0$ ⟺ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

(3) (극댓값)×(극솟값)>0 ⟺ 한 실근과 두 허근

0633

$f(x)=2x^3-6x^2+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$k(k-8)<0$ $\quad\therefore 0<k<8$

따라서 정수 k의 개수는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7이다.

답 ③

다른 풀이 $2x^3-6x^2+k=0$에서 $-2x^3+6x^2=k$

$f(x)=-2x^3+6x^2$이라 하면

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

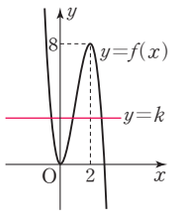
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	8	↘

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<8$

따라서 정수 k의 개수는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7이다.



0634

$-2x^3+3x^2+12x=a$에서

$2x^3-3x^2-12x+a=0$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$이어야 하므로

$(a+7)(a-20)=0$ $\quad\therefore a=-7$ 또는 $a=20$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-7+20=13$

답 ①

0635

$f(x)=x^3-3mx^2+4m$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6mx=3x(x-2m)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2m$ … ❶

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(0)f(2m)>0$이어야 하므로

$4m(-4m^3+4m)>0$

$-16m^2(m+1)(m-1)>0$

$m^2(m+1)(m-1)<0$

이때 $m^2(m+1)>0$ ($\because m>0$)이므로

$m-1<0$, 즉 $m<1$ … ❷

따라서 구하는 양수 m의 값의 범위는

$0<m<1$ … ❸

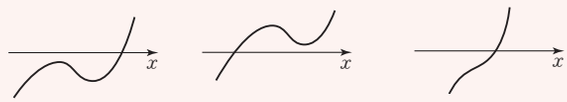
답 $0<m<1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 삼차방정식의 근의 판별을 이용하여 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖기 위한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❸ 양수 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

Lecture

삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

0636

$y=x^3-3x^2-24x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면 $y=x^3-3x^2-24x-k$, 즉 $g(x)=x^3-3x^2-24x-k$

$g'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $g(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$g(-2)g(4)>0$이어야 하므로

$(28-k)(-80-k)>0$, $(k-28)(k+80)>0$

$\therefore k<-80$ 또는 $k>28$

따라서 자연수 k의 최솟값은 29이다. 답 29

0637

$f(x)=-1$, 즉 $\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2=-1$에서 $\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2+1=0$

$g(x)=\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2+1$이라 하면

$g'(x)=mx^2-nx=x(mx-n)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{n}{m}$ (m, n은 자연수이므로 $\frac{n}{m}\neq 0$)

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $g(0)g\left(\frac{n}{m}\right)=0$이어야 하므로

$1\times\left(-\frac{n^3}{6m^2}+1\right)=0$, $\frac{n^3}{6m^2}=1$ $\therefore n^3=6m^2$

이때 m, n은 6 이하의 자연수이므로 등식을 만족시키는 m, n의 값은

$m=n=6$ $\therefore m+n=6+6=12$ 답 12

유형 04 두 그래프의 교점의 개수 개념 01

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

0638

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+3x^2-6x-2=3x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-2-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-2-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로

$(25-k)(-7-k)<0$, $(k-25)(k+7)<0$ $\therefore -7<k<25$

따라서 음의 정수 k의 개수는 $-6, -5, \cdots, -1$의 6이다. 답 ③

0639

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+4a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-4a=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(1)f(3)>0$이어야 하므로

$(4-4a)\times(-4a)>0$, $a(a-1)>0$ $\therefore a<0$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

0640

두 점 A$(-2, -1)$, B$(1, -10)$을 이은 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\frac{-10-(-1)}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-3x-7$ $(-2\le x\le 1)$

곡선 $y=x^3-3x^2-12x-a$와 선분 AB가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2-12x-a=-3x-7$, 즉 $x^3-3x^2-9x+7=a$가 $-2\le x\le 1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+7$이라 하면

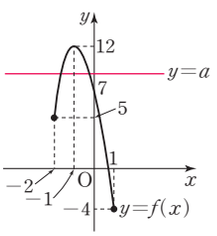
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because -2\le x\le 1$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↗	12	↘	-4

이때 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $x^3-3x^2-9x+7=a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$5\le a<12$ 답 ④

유형 05 접선의 개수 개념 01

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수를 이용하여 구할 수 있다.

0641

$y=-x^3+x^2+kx$에서 $y'=-3x^2+2x+k$

점 $(-1, 0)$에서 곡선 $y=-x^3+x^2+kx$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+t^2+kt)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(-t^3+t^2+kt)=(-3t^2+2t+k)(x-t)$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-(-t^3+t^2+kt)=(-3t^2+2t+k)(-1-t)$

$t^3-t^2-kt=3t^3+t^2-(k+2)t-k$

$\therefore 2t^3+2t^2-2t-k=0$ ····· ㉠

점 $(-1, 0)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3+2t^2-2t-k$라 하면

$f'(t)=6t^2+4t-2=2(t+1)(3t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-1)f\left(\frac{1}{3}\right)=0$이어야 하므로

$(2-k)\left(-\frac{10}{27}-k\right)=0$

$\therefore k=-\frac{10}{27}$ ($\because$ $k\neq 2$) 점 $(-1, 0)$이 곡선 $y=-x^3+x^2+kx$ 밖의 점이므로 $k\neq 2$

답 ③

0642

$y=x^3-4x^2$에서 $y'=3x^2-8x$

점 $(1, a)$에서 곡선 $y=x^3-4x^2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2)이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t^2)=(3t^2-8t)(x-t)$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a-(t^3-4t^2)=(3t^2-8t)(1-t)$

$\therefore 2t^3-7t^2+8t+a=0$ ····· ㉠

점 $(1, a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-7t^2+8t+a$라 하면

$f'(t)=6t^2-14t+8=2(t-1)(3t-4)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=\frac{4}{3}$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f\left(\frac{4}{3}\right)<0$이어야 하므로

$(3+a)\left(\frac{80}{27}+a\right)<0$

$\therefore -3<a<-\frac{80}{27}$

답 $-3<a<-\frac{80}{27}$

0643

$y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+kx$에서 $y'=x^2+4x+k$

점 $(1, 1)$에서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+kx$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^3+2t^2+kt\right)$라 하면 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2+kt\right)=(t^2+4t+k)(x-t)$ ··· ❶

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1-\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2+kt\right)=(t^2+4t+k)(1-t)$

$\therefore \frac{2}{3}t^3+t^2-4t+1-k=0$ ····· ㉠

점 $(1, 1)$에서 주어진 곡선에 그은 접선의 개수가 1이 되려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다. ··· ❷

$f(t)=\frac{2}{3}t^3+t^2-4t+1-k$라 하면

$f'(t)=2t^2+2t-4=2(t+2)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-2)f(1)>0$이어야 하므로

$\left(\frac{23}{3}-k\right)\left(-\frac{4}{3}-k\right)>0$ $\therefore k<-\frac{4}{3}$ 또는 $k>\frac{23}{3}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 t로 놓고 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ t에 대한 삼차방정식을 구하고 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0644

$y=x^3-6x^2-3$에서 $y'=3x^2-12x$

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2-3$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2-3)이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2-3)=(3t^2-12t)(x-t)$

이 직선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$k-(t^3-6t^2-3)=-3t^3+12t^2$

$\therefore 2t^3-6t^2+k+3=0$ ····· ㉠

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2-3$에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(t)=2t^3-6t^2+k+3$이라 하면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$(k+3)(k-5)<0$ $\therefore -3<k<5$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$(k+3)(k-5)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=5$

삼차방정식 $f(t)=0$이 한 실근만을 가지려면

$f(0)f(2)>0$이어야 하므로

$(k+3)(k-5)>0$ $\therefore k<-3$ 또는 $k>5$

즉, $n(k)=\begin{cases}3 & (-3<k<5)\\ 2 & (k=-3 \text{ 또는 } k=5)\\ 1 & (k<-3 \text{ 또는 } k>5)\end{cases}$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=5$일 때, $\lim_{k\to a+} n(k)\neq \lim_{k\to a-} n(k)$이다.

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+5=2$

답 2

다른 풀이 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2-3$에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이때 $f(t)=-2t^3+6t^2-3$이라 하면 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$f'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	···	0	···	2	···
$f'(t)$	−	0	+	0	−
$f(t)$	↘	−3	↗	5	↘

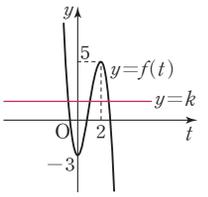
즉, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-3<k<5$일 때, $n(k)=3$

$k=-3$ 또는 $k=5$일 때, $n(k)=2$

$k<-3$ 또는 $k>5$일 때, $n(k)=1$

이므로 $\lim_{k\to a+}n(k)\neq\lim_{k\to a-}n(k)$를 만족시키는 a의 값은 -3 또는 5이다.

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $-3+5=2$



유형 06 모든 실수에서 부등식이 항상 성립할 조건 개념 02

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면

⇨ ($f(x)$의 최솟값)≥0

0645

(i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq0$일 때,

$f(x)=x^4-4k^3x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

이때 $x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(k)=-3k^4+3$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이려면 $f(k)\geq0$이어야 하므로

$-3k^4+3\geq0$, $k^4-1\leq0$

$(k^2+1)(k+1)(k-1)\leq0$

$\therefore -1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq1$ ($\because k\neq0$)

(i), (ii)에서 $-1\leq k\leq1$이므로 정수 k의 개수는 -1, 0, 1의 3이다.

답 ③

0646

$x^4-x^2-9x>5x^2-x-a$에서 $x^4-6x^2-8x+a>0$

$f(x)=x^4-6x^2-8x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$3+a$	↘	$-24+a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(2)=-24+a$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(2)>0$이어야 하므로

$-24+a>0$ $\therefore a>24$

따라서 정수 a의 최솟값은 25이다.

답 ⑤

0647

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

이때 $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$이다.

즉, $f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=a^2-2a-3$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로

$a^2-2a-3>0$, $(a+1)(a-3)>0$

$\therefore a>3$ ($\because a>0$)

답 $a>3$

0648

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 커야 한다.

$f(x)=3x^4-4x^3+16$에서 $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	16	↘	15	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=15$

또, $g(x)=-2x^2+12x+k=-2(x-3)^2+k+18$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$일 때 최대이고 최댓값은

$g(3)=k+18$

이때 $f(1)>g(3)$이어야 하므로

$15>k+18$ $\therefore k<-3$

답 $k<-3$

유형 07 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 증가·감소의 활용 개념 02

(1) 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$가 증가할 때, 이 구간에서 $f(x)<k$가 성립하려면 ⇨ $f(b)\leq k$

(2) 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$가 감소할 때, 이 구간에서 $f(x)>k$가 성립하려면 ⇨ $f(b)\geq k$

0649

$x^3-9x^2>-15x+k$에서 $x^3-9x^2+15x-k>0$

$f(x)=x^3-9x^2+15x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$1<x<5$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $1<x<5$에서 감소한다.

즉, $1<x<5$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(5)\geq 0$이어야 하므로
$f(5)=-25-k\geq 0$ $\therefore k\leq -25$
따라서 실수 k의 최댓값은 -25이다. 답 ②

0650

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+a$라 하면 $f'(x)=-x^2+4x=-x(x-4)$
$1\leq x\leq 3$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1\leq x\leq 3$에서 증가한다.
즉, $1\leq x\leq 3$일 때, $f(x)\leq 0$이려면 $f(3)\leq 0$이어야 하므로
$f(3)=9+a\leq 0$ $\therefore a\leq -9$ 답 ①

0651

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3+a-(x^2+x+b)=x^3-x^2-x+a-b$
$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$
$x>2$일 때, $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 $x>2$에서 증가한다.
즉, $x>2$일 때, $h(x)>0$이려면 $h(2)\geq 0$이어야 하므로
$h(2)=2+a-b\geq 0$ $\therefore a-b\geq -2$
따라서 $a-b$의 최솟값은 -2이다. 답 ③

유형 08 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 최대·최소의 활용 개념 02

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\leq a$가 성립하려면
⇨ 그 구간에서 ($f(x)$의 최댓값)$\leq a$
(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq a$가 성립하려면
⇨ 그 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)$\geq a$

0652

$2x^3+3x^2\geq 12x+k$에서 $2x^3+3x^2-12x-k\geq 0$
$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-7-k$	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로
최솟값은 $f(1)=-7-k$
$x>0$일 때, $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로
$-7-k\geq 0$ $\therefore k\leq -7$
따라서 실수 k의 최댓값은 -7이다. 답 ①

0653

$4x^3+1<3x^2-k$에서 $4x^3-3x^2+1+k<0$
$f(x)=4x^3-3x^2+1+k$라 하면
$f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-6+k$	↗	$1+k$	↘	$\frac{3}{4}+k$	↗	$2+k$

$-1\leq x\leq 1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이므로 최댓값은
$f(1)=2+k$
$-1\leq x\leq 1$일 때, $f(x)<0$이려면 $f(1)<0$이어야 하므로
$2+k<0$ $\therefore k<-2$ 답 $k<-2$

0654

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3+x^2-2x-(x^2+x+k)=x^3-3x-k$
$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$) … ❶
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$-2-k$	↗

임의의 양수 x에 대하여, 즉 $x>0$일 때 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $h(1)=-2-k$ … ❷
임의의 양수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로
$-2-k\geq 0$ $\therefore k\leq -2$ … ❸
따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다. … ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, $h'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0655

$x\geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 $x\geq 0$일 때 $f(x)>g(x)$이어야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3-3kx^2+6kx-(-x^3+3x^2+k-3)$
$=2x^3-3(k+1)x^2+6kx-k+3$
$h'(x)=6x^2-6(k+1)x+6k=6(x-1)(x-k)$
$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=k$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	k	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$3-k$	↗	$2+2k$	↘	$(k^2+1)(3-k)$	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=0$ 또는 $x=k$에서 최소이므로 $x\geq 0$일 때 $h(x)>0$이려면 $h(0)>0$ 또는 $h(k)>0$이어야 한다.

즉, $3-k>0$ 또는 $(k^2+1)(3-k)>0$이므로

$k<3$ ($\because k^2+1>2$)

이때 $k>1$이므로 $1<k<3$

따라서 정수 k의 개수는 2의 1이다. 답 1

Lecture

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

① 어떤 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.

⇨ 그 구간에서 항상 $f(x)>g(x)$이다.

② 어떤 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다.

⇨ 그 구간에서 항상 $f(x)<g(x)$이다.

유형 09 속도와 가속도 (1) 개념 03

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ (2) $a=\dfrac{dv}{dt}$

0656

점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-4t^2+3t=0$에서 $t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

점 P가 출발 후 마지막으로 원점을 지나는 순간은 $t=3$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8t+3$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$v=3\times3^2-8\times3+3=6$ 답 6

0657

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2+2at+2a$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 2이므로

$8+4a+2a=2$ $\therefore a=-1$ 답 ②

0658

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+34$

$3t^2-18t+34=10$에서 $3t^2-18t+24=0$

$3(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간은 $t=2$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times2-18=-6$ 답 -6

0659

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-8t+12=(t-4)^2-4$

$3\le t\le8$에서 $-4\le v\le12$이므로 $0\le|v|\le12$

따라서 점 P의 최대 속력은 12이고 그때의 시각은 $t=8$이므로

$M=12, a=8$ $\therefore M+a=12+8=20$ 답 20

유형 10 속도와 가속도 (2) 개념 03

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 x_P, x_Q라 하고 속도를 v_P, v_Q라 하면

(1) 두 점이 만난다. ⇨ $x_P=x_Q$ (2) 두 점의 속도가 같다. ⇨ $v_P=v_Q$

0660

두 점 P, Q가 만나면 두 점의 위치가 서로 같으므로

$-3t^2+2t+1=t^3-t^2$, $t^3+2t^2-2t-1=0$

$(t-1)(t^2+3t+1)=0$ $\therefore t=1$ ($\because t\ge0$)

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=-6t+2$, $v_Q=x_Q'(t)=3t^2-2t$

이므로 $t=1$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각 -4, 1이다.

따라서 $p=-4, q=1$이므로 $p+q=-4+1=-3$ 답 ③

0661

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=t^2+4$, $v_Q=x_Q'(t)=4t$ … ❶

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P=v_Q$이므로

$t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0$ $\therefore t=2$ … ❷

$t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는

$x_P(2)=\dfrac{1}{3}\times2^3+4\times2-\dfrac{2}{3}=10$, $x_Q(2)=2\times2^2-10=-2$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-(-2)=12$ … ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 같아지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0662

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=2t^2-8t+6$, $v_Q=x_Q'(t)=k$

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 때가 두 번 있으려면

$t>0$에서 $v_P=v_Q$를 만족시키는 t의 값이 2개 존재해야 한다.

따라서 방정식 $v_P=v_Q$, 즉 $2t^2-8t+6-k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) t에 대한 이차방정식 $2t^2-8t+6-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=16-2(6-k)>0$ $\therefore k>-2$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$ (성립)

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{6-k}{2}>0$에서 $k<6$

(i)~(iii)에서 $-2<k<6$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 5이다. 답 ④

유형 11 속도, 가속도와 운동 방향 개념 03

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.

(2) 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가

① 같은 방향으로 움직이면 ⇨ (두 점의 속도의 곱)>0

② 서로 반대 방향으로 움직이면 ⇨ (두 점의 속도의 곱)<0

0663

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=4$

점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$일 때이고,

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-15$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times4-15=9$ 답 9

0664

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=2t-3$, $v_Q=x_Q'(t)=2t-10$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-3)(2t-10)<0$, $(2t-3)(t-5)<0$

$\therefore \frac{3}{2}<t<5$ 답 $\frac{3}{2}<t<5$

0665

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=6$

즉, 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$일 때이고,

두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=6$일 때이다.

$t=2$에서의 점 P의 위치 A는 $2^3-12\times2^2+36\times2=32$

$t=6$에서의 점 P의 위치 B는 $6^3-12\times6^2+36\times6=0$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $32-0=32$ 답 32

0666

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

ㄱ. 출발할 때, 즉 $t=0$에서의 속도는 $v=12$ (참)

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=2$

즉, 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$2t^3-9t^2+12t=0$에서 $t(2t^2-9t+12)=0$

이때 이차방정식 $2t^2-9t+12=0$의 판별식을 D라 하면

$D=81-96=-15<0$이므로 방정식을 만족시키는 실수 t의 값이 존재하지 않는다.

즉, 점 P는 출발한 후 다시 원점으로 돌아오지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0667

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=4t^3-12t-a$

출발한 후 ($t>0$) 점 P의 운동 방향이 두 번만 바뀌어야 하므로

방정식 $v=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$4t^3-12t-a=0$에서 $4t^3-12t=a$

$f(t)=4t^3-12t$라 하면

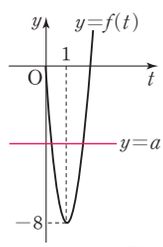
$f'(t)=12t^2-12=12(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	1	⋯
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	−8	↗

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 t좌표가 서로 다른 두 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-8<a<0$



따라서 정수 a의 개수는 -7, -6, -5, ⋯, -1의 7이다. 답 7

유형 12 정지하는 물체의 속도와 움직인 거리 개념 03

움직이는 물체가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라 하면

(1) 제동을 건 지 t초 후의 속도 ⇨ $\frac{dx}{dt}$ (2) 정지할 때의 속도 ⇨ 0

0668

자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=60-3t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$60-3t=0$ $\therefore t=20$

즉, 제동을 건 후 자동차가 멈추는 것은 20초 후이다.

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$x=60\times20-1.5\times20^2=600$ (m) 답 600 m

0669

열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=a-4t$

이때 열차가 제동을 건 지 4초 후에 정지하므로 $t=4$일 때의 속도는 0이다. 즉, $t=4$일 때 $v=0$이므로

$a-16=0 \quad \therefore a=16$ 답 ④

0670

열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-t$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-t=0 \quad \therefore t=30$

즉, 제동을 건 후 열차가 멈추는 것은 30초 후이다.

이때 열차가 30초 동안 움직인 거리는

$x=30\times30-0.5\times30^2=450$ (m)

따라서 목적지로부터 전방 450 m 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$a=450$ 답 ⑤

유형 13 위로 던진 물체의 위치와 속도 개념 03

지면과 수직으로 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 h m라 하면

(1) t초 후의 물체의 속도 ⇨ $\frac{dh}{dt}$

(2) 최고 지점에 도달했을 때의 속도 ⇨ 0

0671

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=7-9.8t$

최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$7-9.8t=0 \quad \therefore t=\frac{7}{9.8}=\frac{5}{7}$

따라서 $\frac{5}{7}$초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$h=7\times\frac{5}{7}-4.9\times\left(\frac{5}{7}\right)^2=2.5$ (m) 답 ③

0672

공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로 $h=0$에서

$20t-5t^2=0,\ 5t(4-t)=0 \quad \therefore t=4\ (\because t>0)$

공의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$

$t=4$일 때, 공의 속도는

$v=20-10\times4=-20$ (m/s)

따라서 공이 지면에 떨어지는 순간의 속력은 $|-20|=20$ (m/s)이다. 답 ②

0673

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=-10t+30$

ㄱ. 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+30=0 \quad \therefore t=3$

즉, 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 3초이다. (참)

ㄴ. 물체의 최고 높이는 $t=3$일 때의 높이이므로

$h=-5\times3^2+30\times3+40=85$ (m) (거짓)

ㄷ. 물체가 땅에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$(85-40)+85=130$ (m) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

유형 14 속도의 그래프의 해석 개념 03

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프에서

(1) $t=a$일 때 점 P의 가속도 ⇨ $t=a$일 때 접선의 기울기 $v'(a)$

(2) $v(t)$의 그래프가 t축과 $t=a$에서 만나고, $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌면 ⇨ 점 P는 $t=a$에서 운동 방향을 바꾼다.

0674

① $t=d,\ t=h$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<i$에서 운동 방향을 2번 바꾼다.

② $t=c$일 때 점 P의 가속도는 $v'(c)$이고, $v'(c)<0$이므로 가속도는 음의 값이다.

③ $h<t<i$에서 속도 $v(t)$는 증가한다.

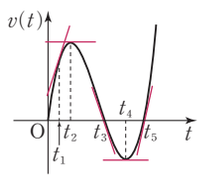
④ $v(d)=0$이므로 점 P는 정지해 있다.

⑤ $v(b)>0,\ v(f)<0$이므로 $t=b$일 때와 $t=f$일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0675

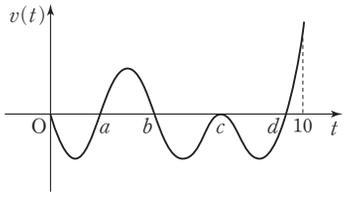
가속도는 속도의 그래프에서 접선의 기울기와 같으므로 접선의 기울기가 가장 작은 $t=t_3$에서 점 P의 가속도가 가장 작다.



답 ③

0676

다음 그림과 같이 $v(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표를 각각 a, b, c, d라 하면 $t=a,\ t=b,\ t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $0\le t\le10$에서 점 P는 운동 방향을 3번 바꾼다.



답 3번

참고 $t=c$일 때, $v(t)=0$이지만 $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 P는 $t=c$일 때, 정지하지만 운동 방향은 바꾸지 않는다.

유형 15 위치의 그래프의 해석 개념 03

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서
(1) $x'(t)>0$인 구간 ⇨ 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
(2) $x'(t)=0$일 때 ⇨ 점 P는 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.
(3) $x'(t)<0$인 구간 ⇨ 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

0677

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.
ㄱ. $t=d$일 때, $v(d)=x'(d)>0$이므로 점 P의 속도는 양의 값이다. (거짓)
ㄴ. $t=c$일 때 $v(c)=x'(c)=0$이고, 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=c$일 때, 운동 방향을 바꾼다. (참)
ㄷ. $0<k<a$이면 $v(k)=x'(k)>0$, $v(a)=x'(a)=0$에서 $v(k)>v(a)$이므로 $0<t<b$에서 점 P의 속도는 $t=a$일 때 최대가 아니다. (거짓)
ㄹ. $0<t<d$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=c$일 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0678

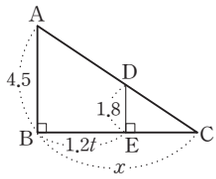
점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 $x(t)=kt(10-t)$ $(0\le t\le 10)$로 놓으면 $t=5$일 때, $x(5)=40$이므로
$40=5k(10-5)$ $\therefore k=\frac{8}{5}$
따라서 주어진 그래프의 식은
$x(t)=\frac{8}{5}t(10-t)=16t-\frac{8}{5}t^2$ $(0\le t\le 10)$
점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하자.
ㄱ. 속도는 위치의 변화량이고, (속력)$=|$(속도)$|$이므로
$|v(t)|=|x'(t)|=\left|16-\frac{16}{5}t\right|=\frac{16}{5}|t-5|$
즉, 점 P의 속력은 $0\le t\le 5$일 때 감소하고, $5\le t\le 10$일 때 증가한다. (참)
ㄴ. 가속도는 속도의 변화량이므로 $a(t)=v'(t)=-\frac{16}{5}$
즉, 점 P의 가속도는 $-\frac{16}{5}$으로 일정하다. (참)
ㄷ. $v(t)=16-\frac{16}{5}t$에서 $v(10)=-16<0$
즉, $t=10$일 때, 점 P의 속도는 음의 값이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 16 시각에 대한 길이의 변화율 개념 03

어떤 물체의 시각 t에서의 길이가 l일 때
길이의 변화율은 ⇨ $\frac{dl}{dt}$

0679

사람이 1.2 m/s의 속도로 걸어가므로 t초 동안 움직이는 거리는 $1.2t$ m
그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라 하자.
오른쪽 그림에서 △ABC∽△DEC이므로
$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$
$4.5:1.8=x:(x-1.2t)$
$1.8x=4.5x-5.4t$
$2.7x=5.4t$ $\therefore x=2t$



t초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면
$l=\overline{BC}-\overline{BE}=x-1.2t=2t-1.2t=0.8t$
따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}=0.8$ (m/s) 답 ②

0680

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(6t, 0)$, B$(0, 8t)$이므로
선분 AB의 중점 C의 좌표는 $(3t, 4t)$
$\overline{OC}=l$이라 하면
$l=\sqrt{(3t)^2+(4t)^2}=5t$ ($\because t>0$)
따라서 선분 OC의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}=5$ 답 ⑤

유형 17 시각에 대한 넓이의 변화율 개념 03

어떤 물체의 시각 t에서의 넓이가 S일 때
넓이의 변화율은 ⇨ $\frac{dS}{dt}$

0681

각 변의 길이가 0.1 cm/s씩 늘어나므로 t초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+0.1t)$ cm이다.
t초 후의 정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면 $S=(5+0.1t)^2$
$\therefore \frac{dS}{dt}=2(5+0.1t)\times 0.1=0.2(5+0.1t)$
정사각형의 넓이가 36 cm^{2}가 되었을 때 한 변의 길이는 6 cm이므로
$5+0.1t=6$에서 $t=10$
따라서 $t=10$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은
$\frac{dS}{dt}=0.2\times(5+0.1\times 10)=1.2$ (cm^2/s) 답 1.2 cm^2/s

0682

t초 후 두 원의 지름의 길이는 각각 $\overline{AP}=t$, $\overline{BP}=10-t$이므로
두 원의 반지름의 길이는 각각 $\frac{t}{2}$, $\frac{10-t}{2}$이다.
이때 t초 후의 두 원의 넓이의 합 S는
$S=\pi\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{10-t}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(t^2-10t+50)$ $(0<t<10)$
$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}(2t-10)=\pi(t-5)$
따라서 $t=6$일 때, 넓이 S의 변화율은
$\frac{dS}{dt}=\pi\times(6-5)=\pi$ 답 ④

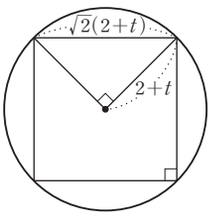
0683

원의 반지름의 길이가 1 cm/s씩 늘어나므로 t초 후 원의 반지름의 길이는 $(2+t)$ cm이다.

t초 후 원에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 a cm라 하면

$a^2+a^2=\{2(2+t)\}^2$에서 ($a^2+a^2=\{2(2+t)\}^2$: 피타고라스의 정리)

$a=\sqrt{2}(2+t)$ ($\because a>0, t>0$)



t초 후의 원에 내접하는 정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=2(2+t)^2$ $\therefore \dfrac{dS}{dt}=2\times2(2+t)=4(2+t)$

원의 넓이가 36π cm^{2}가 되었을 때 반지름의 길이는 6 cm이므로

$2+t=6$에서 $t=4$

따라서 $t=4$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=4\times(2+4)=24$ (cm^2/s) 답 24 cm^2/s

유형 18 시각에 대한 부피의 변화율 개념 03

어떤 물체의 시각 t에서의 부피가 V일 때

부피의 변화율은 ⇨ $\dfrac{dV}{dt}$

0684

반지름의 길이가 0.2 cm/s씩 늘어나므로 t초 후 풍선의 반지름의 길이는 $(2+0.2t)$ cm이다.

t초 후의 풍선의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(2+0.2t)^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{3}\pi\times3(2+0.2t)^2\times0.2=0.8\pi(2+0.2t)^2$

따라서 $t=5$일 때, 풍선의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=0.8\pi\times(2+0.2\times5)^2=7.2\pi$ (cm^3/s) 답 7.2π cm^3/s

0685

밑면의 반지름의 길이가 2 cm/s씩 늘어나고, 높이는 1 cm/s씩 줄어들므로 t초 후 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(2+2t)$ cm, 높이는 $(12-t)$ cm이다.

t초 후의 원기둥의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\pi(2+2t)^2(12-t)$

$=4\pi(-t^3+10t^2+23t+12)$ $(0<t<12)$ … ❶

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=4\pi(-3t^2+20t+23)$ … ❷

높이가 10 cm가 되었을 때의 시각은

$12-t=10$에서 $t=2$ … ❸

따라서 $t=2$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=4\pi\times(-3\times2^2+20\times2+23)$

$=204\pi$ (cm^3/s) … ❹

답 204π cm^3/s

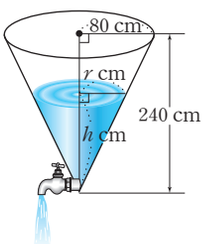
채점 기준	비율
❶ 원기둥의 부피 V를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 높이가 10 cm가 되었을 때의 시각을 구할 수 있다.	20 %
❹ $t=2$일 때, 원기둥의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0686

오른쪽 그림과 같이 물탱크의 물이 빠져나가기 시작하여 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면

$r:h=80:240$에서

$240r=80h$ $\therefore r=\dfrac{1}{3}h$ …… ㉠



이때 수면의 높이가 매초 10 cm씩 낮아지므로 t초 후 수면의 높이는 $h=240-10t$ …… ㉡

t초 후 물탱크에 남아 있는 물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}h\right)^2h=\dfrac{1}{27}\pi h^3$

$=\dfrac{1}{27}\pi(240-10t)^3$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{27}\pi\times3(240-10t)^2\times(-10)$

$=-\dfrac{10}{9}\pi\times(240-10t)^2$

수면의 높이가 30 cm가 될 때의 시각은

$240-10t=30$에서 $t=21$

따라서 $t=21$일 때, 남아 있는 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{10}{9}\pi\times(240-10\times21)^2=-1000\pi$ (cm^3/s) 답 ③

Lecture

함수의 곱의 미분법

$y=\{f(x)\}^n$ (n은 양의 정수)일 때, $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

STEP 3 내신 마스터

0687

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구한다.

$3x^4-4x^3-12x^2+15-k=0$에서 $3x^4-4x^3-12x^2+15=k$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+15$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

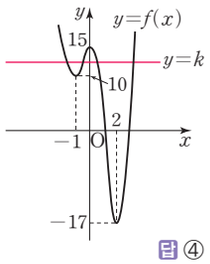
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	10	↗	15	↘	-17	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $10<k<15$

따라서 정수 k의 개수는 11, 12, 13, 14의 4이다.



답 ④

0688

유형 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되도록 하는 정수 a의 최댓값을 구한다.

$x^3-3x^2-9x-a+6=0$에서 $x^3-3x^2-9x+6=a$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

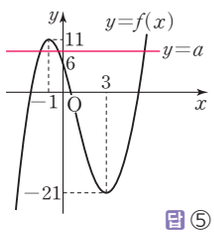
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	11	↘	−21	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 서로 다른 두 개는 음수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $6<a<11$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다.



답 ⑤

0689

유형 03 극값을 이용한 삼차방정식의 근의 판별

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, (극댓값)×(극솟값)의 부호에 따라 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 달라짐을 이용한다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	a	⋯	b	⋯	c	⋯
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	↘	↘	극소	↗

ㄱ. $f(a)=0$이면 (극댓값)×(극솟값)=0이므로
방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(a)f(c)>0$이면 (극댓값)×(극솟값)>0이므로
방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, c)에서 감소하므로
$f(c)<f(b)<f(a)$
이때 $f(b)=0$이면 $f(a)f(c)<0$, 즉 (극댓값)×(극솟값)<0이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

0690

유형 06 모든 실수에서 부등식이 항상 성립할 조건

|전략| $h(x)=f(x)-g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 커야 함을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4-4x-k^2+4k+8$

$h'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	1	⋯
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	$-k^2+4k+5$	↗

함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(1)=-k^2+4k+5$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(1)>0$이어야 하므로

$k^2-4k-5<0$, $(k+1)(k-5)<0$

$\therefore -1<k<5$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$0+1+2+3+4=10$

답 ③

0691

유형 07 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 증가·감소의 활용

|전략| 열린구간 $(-1, 1)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(1)\geq 0$인 실수 k의 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

열린구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 1)$에서 감소한다.

즉, $-1<x<1$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$f(1)=1-12+k\geq 0$ $\therefore k\geq 11$

따라서 실수 k의 최솟값은 11이다.

답 ④

0692

유형 09 속도와 가속도 (1)

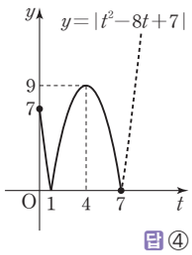
|전략| 속력은 속도 v의 절댓값이므로 $y=|v(t)|$의 그래프를 그려 최댓값을 구한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-8t+7=(t-4)^2-9$

함수 $y=|t^2-8t+7|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $0\leq t\leq 7$에서 점 P의 속력의 최댓값은 $t=4$일 때 9이다.



답 ④

0693

유형 10 속도와 가속도 (2)

|전략| 두 점 P, Q가 만나는 순간의 시각은 $x_P(t)=x_Q(t)$일 때임을 이용한다.

두 점 P, Q가 만날 때, 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$t^2-t+6=4t$, $t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$

즉, 두 점 P, Q가 두 번째로 만날 때는 $t=3$일 때이다.

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=2t-1$, $v_Q=x_Q'(t)=4$

$t=3$일 때, 두 점 P, Q의 속도는 각각 $2\times3-1=5$, 4이므로

두 점 P, Q의 속도의 차는 $|5-4|=1$ 답 ①

0694

유형 11 속도, 가속도와 운동 방향

|전략| 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾸므로 $a=2$

한편, $v(0)=3>0$이고, $1<t<3$에서 $v(t)<0$이다.

즉, $t=3$일 때 점 P의 위치가 0이므로 점 P는 $1<t<3$에서 처음 운동 방향과 반대인 원점을 향하여 움직인다. $\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$ 답 ③

0695

유형 12 정지하는 물체의 속도와 움직인 거리

|전략| 자동차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용한다.

자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-2.4t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$24-2.4t=0$ $\therefore t=10$

따라서 자동차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은 10초이다.

답 ③

0696

유형 15 위치의 그래프의 해석

|전략| 점 P의 시각 t에서의 운동 방향은 $x_P'(t)$의 부호를 보고 판단한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하자.

ㄱ. $t=8$일 때, $x_P(8)=0$이므로 점 P의 위치는 원점이다. (참)

ㄴ. $t=2$, $t=6$일 때 $v_P(2)=x_P'(2)=0$, $v_P(6)=x_P'(6)=0$이고, 그 좌우에서 $v_P(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<10$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. $t=5$일 때 $v_P(5)=x_P'(5)>0$, $v_Q(5)=x_Q'(5)>0$이므로 두 점 P, Q는 같은 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄹ. $t=6$일 때, $v_Q(6)>v_P(6)=0$이므로 점 Q의 속도는 점 P의 속도보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0697

유형 04 두 그래프의 교점의 개수

|전략| 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.

주어진 곡선과 직선의 교점의 개수가 2이려면 방정식

$4x^3-2x=x+a$, 즉 $4x^3-3x-a=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=4x^3-3x-a$라 하면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ … ❶

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)$(극솟값)$f\left(\frac{1}{2}\right)$(극댓값)$=0$이어야 하므로

$(-a+1)(-a-1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ … ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times1=-1$ … ❸

답 -1

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 조건을 만족시키는 실수 a의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	1점

0698

유형 08 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 최대·최소의 활용

|전략| $x>0$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0인 정수 k의 최댓값을 구한다.

$x^3+2x^2-2x>\frac{1}{2}x^2+4x+k$에서

$x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-k>0$

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$) … ❶

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{7}{2}-k$	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-\frac{7}{2}-k$

$x>0$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로

$-\frac{7}{2}-k>0$ $\therefore k<-\frac{7}{2}$ … ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다. … ❸

답 -4

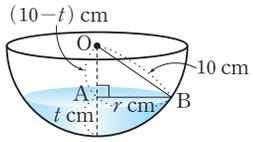
채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

0699

유형 17 시각에 대한 넓이의 변화율

|전략| 수면의 넓이를 시각 t에 대한 함수로 나타내고, 넓이의 변화율을 구한다.

(1) 수면의 높이가 매초 1 cm씩 높아지므로 t초 후의 수면의 높이는 t cm이다.



t초 후 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=10-t$ (cm)

즉, 직각삼각형 OAB에서

$r=\sqrt{10^2-(10-t)^2}=\sqrt{20t-t^2}$

(2) t초 후 수면의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi r^2=\pi(20t-t^2)$

(3) $S=\pi(20t-t^2)$이므로 $\dfrac{dS}{dt}=\pi(20-2t)$

수면의 높이가 5 cm가 될 때의 시각은 $t=5$이므로

$t=5$일 때의 수면의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=\pi\times(20-2\times5)=10\pi$ (cm^2/s)

답 (1) $\sqrt{20t-t^2}$ cm (2) $\pi(20t-t^2)$ cm^2 (3) 10π cm^2/s

채점 기준	배점
(1) 수면의 반지름의 길이를 시각 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) 수면의 넓이를 시각 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(3) 수면의 높이가 5 cm가 되는 순간의 수면의 넓이의 변화율을 구할 수 있다.	4점

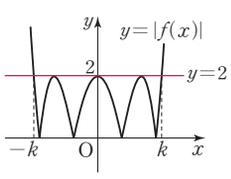
창의·융합 실력 마스터

0700

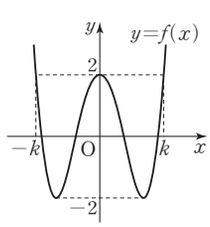
|전략| 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수가 5가 되는 사차함수 $f(x)$를 구한다.

사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$, $f(0)>0$을 만족시키고 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 5이려면 [그림 1]과 같아야 하므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $f(x)=2$는 중근 $x=0$과 $x=-k$, $x=k$를 근으로 갖는다.

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2=x^2(x+k)(x-k)=x^4-k^2x^2$ (단, $k>0$)

$f'(x)=4x^3-2k^2x=2x(\sqrt{2}x+k)(\sqrt{2}x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{k}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$

이때 함수 $f(x)$는 $x=\pm\dfrac{k}{\sqrt{2}}$에서 극소이고 $f\left(\pm\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)=-2$이므로

$f\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)^4-k^2\times\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)^2+2=-2$

$-\dfrac{k^4}{4}=-4$, $k^4=16$ $\quad\therefore k^2=4$ ($\because k^2>0$)

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+2$이므로

$f(1)=1^4-4\times1^2+2=-1$ 답 -1

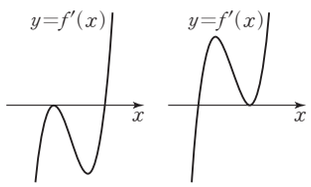
참고 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있고, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

0701

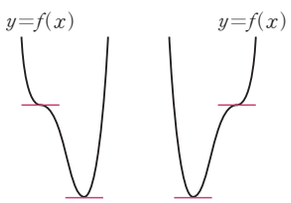
|전략| 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이면 삼차함수의 극값 중 하나가 0임을 이용한다.

조건 (가)에서 $n(A)=2$이므로 삼차함수 $f'(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $n(A\cup B)=3$이 되려면 방정식 $f(x)=0$이 삼중근을 가져야 하고 집합 B의 모든 원소의 합이 2이므로

$f(x)=(x-a)^3(x-2+a)$ (a는 상수, $a\neq1$)라 하면

$f'(x)=3(x-a)^2(x-2+a)+(x-a)^3$

$=(x-a)^2(4x+2a-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=\dfrac{3-a}{2}$

[그림 2]에서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3-a}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

$f\left(\dfrac{3-a}{2}\right)=\left(\dfrac{3-a}{2}-a\right)^3\left(\dfrac{3-a}{2}-2+a\right)$

$=\left(\dfrac{3-3a}{2}\right)^3\times\dfrac{a-1}{2}$

$=-\dfrac{27}{16}(a-1)^4$

한편, 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\dfrac{1}{3}$이어야 하므로

$-\dfrac{27}{16}(a-1)^4=-\dfrac{1}{3}$에서 $(a-1)^4=\dfrac{16}{81}$

$a-1=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $a-1=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=\dfrac{5}{3}$

즉, $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^3\left(x-\frac{5}{3}\right)$ 또는 $f(x)=\left(x-\frac{5}{3}\right)^3\left(x-\frac{1}{3}\right)$

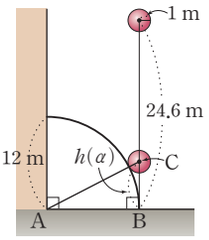
이므로 $f(0)=\frac{5}{81}$ 또는 $f(0)=\frac{125}{81}$

따라서 $f(0)$의 최댓값은 $\frac{125}{81}$이다. 답 $\frac{125}{81}$

0702

|전략| 공의 높이가 $h(t)$이면 속도는 $v=\frac{d}{dt}h(t)$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 공의 중심을 C라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.



공이 경사면과 처음으로 충돌하는 시각을 $t=a$라 하면 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서

$13^2=12^2+\{h(a)\}^2$

$\therefore h(a)=5$ ($\because h(a)>0$)

이때 $h(a)=24.6-4.9a^2$이므로 $24.6-4.9a^2=5$에서

$4.9a^2=19.6$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

공의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=h'(t)=-9.8t$

따라서 $t=2$일 때, 공의 속도는

$v=-9.8\times2=-19.6$ (m/s) 답 -19.6 m/s

0703

|전략| 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 이용한다.

$x^3-2x^2-3x+k^2=x+2k$에서 $x^3-2x^2-4x=-k^2+2k$

곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=x^3-2x^2-4x$와 직선 $y=-k^2+2k=-(k-1)^2+1$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3-2x^2-4x$라 하면

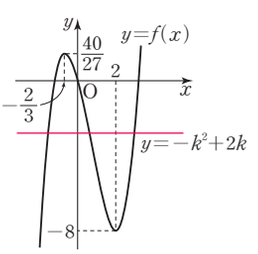
$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{40}{27}$	↘	-8	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k=1$은 서로 다른 세 점에서 만난다.
즉, 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (참)

ㄴ. $-k^2+2k=-(k-1)^2+1\le1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$가 접할 때는 $-k^2+2k=-8$일 때이다.

$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

즉, $k=-2$ 또는 $k=4$일 때, 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$가 접하므로 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+4=2$ (참)

ㄷ. $y=-k^2+2k=-(k-1)^2+1$이므로 $-2<k<4$일 때,

$-8<-k^2+2k\le1$이다.

즉, $-2<k<4$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로

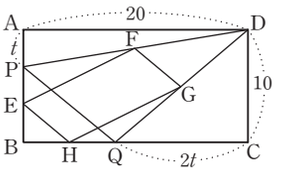
$-2<k<4$일 때, 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0704

|전략| 삼각형 BQP의 넓이 S를 t에 대한 함수로 나타낸 다음 넓이의 변화율은 $\frac{dS}{dt}$임을 이용한다.

점 P는 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 매초 1의 속력으로 움직이므로 t초 후 선분 AP의 길이는



$\overline{AP}=t$

점 Q는 꼭짓점 C에서 꼭짓점 B까지 매초 2의 속력으로 움직이므로 t초 후 선분 CQ의 길이는

$\overline{CQ}=2t$

t초 후 두 직각삼각형 APD, DQC의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times t\times20=10t$

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times2t\times10=10t$

t초 후 사각형 BQDP의 넓이를 S_3이라 하면

$S_3=$(직사각형 ABCD의 넓이)$-(S_1+S_2)$

$=20\times10-(10t+10t)$

$=200-20t$

사각형 BQDP의 넓이는 사각형 EHGF의 넓이의 2배이므로 t초 후 사각형 EHGF의 넓이를 S_4라 하면

$S_4=\frac{1}{2}S_3=\frac{1}{2}(200-20t)=100-10t$

사각형 EHGF의 넓이가 직사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{8}$이 될 때의 시각은 $S_4=\frac{1}{8}\times200$에서

$100-10t=25$ $\therefore t=\frac{15}{2}$

t초 후 삼각형 BQP의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BQ}$

$=\frac{1}{2}(10-t)(20-2t)=(10-t)^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=-2(10-t)$

따라서 $t=\frac{15}{2}$일 때, 삼각형 BQP의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=-2\times\left(10-\frac{15}{2}\right)=-5$ 답 -5

7 부정적분

본책 112~125쪽

STEP 1 개념 마스터

0705

ㄱ. $F'(x)=(x^7+x)'=7x^6+1$

ㄴ. $F'(x)=(x^7-8)'=7x^6$

ㄷ. $F'(x)=(x^7+\pi)'=7x^6$

ㄹ. $F'(x)=(7x^6-\sqrt{3})'=42x^5$

따라서 함수 $f(x)=7x^6$의 부정적분이 아닌 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0706

$(5x)'=5$이므로

$\int 5\,dx=5x+C$ 답 $5x+C$

0707

$(-x^2)'=-2x$이므로

$\int(-2x)dx=-x^2+C$ 답 $-x^2+C$

0708

$(3x^3)'=9x^2$이므로

$\int 9x^2dx=3x^3+C$ 답 $3x^3+C$

0709

$(-x^4)'=-4x^3$이므로

$\int(-4x^3)dx=-x^4+C$ 답 $-x^4+C$

0710

$f(x)=(-x^2+3x+C)'=-2x+3$ 답 $f(x)=-2x+3$

0711

$f(x)=\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)'=2x^2$ 답 $f(x)=2x^2$

0712

$f(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3+2x+C\right)'=-x^2+2$ 답 $f(x)=-x^2+2$

0713

$f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3-x+C\right)'=x^3-6x^2-1$

답 $f(x)=x^3-6x^2-1$

0714

$xf(x)=(x^4-5x^2+C)'$

$=4x^3-10x=x(4x^2-10)$

$\therefore f(x)=4x^2-10$ 답 $f(x)=4x^2-10$

0715

$(x+2)f(x)=(2x^3+3x^2-12x+C)'$

$=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$\therefore f(x)=6x-6$ 답 $f(x)=6x-6$

0716

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2-2x)dx\right\}=x^2-2x$ 답 x^2-2x

0717

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-2x)\right\}dx=x^2-2x+C$ 답 x^2-2x+C

0718

$\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$ 답 $\frac{1}{5}x^5+C$

0719

$\int x^7dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C$ 답 $\frac{1}{8}x^8+C$

0720

$\int x^m\times x^ndx=\int x^{m+n}dx=\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C$

답 $\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C$

0721

$\int(x^m)^ndx=\int x^{mn}dx=\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C$

답 $\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C$

0722

$\int(4x+5)dx=\int 4x\,dx+\int 5\,dx$

$=4\int x\,dx+5\int dx$

$=2x^2+5x+C$ 답 $2x^2+5x+C$

0723

$$\int(3x^2+2x-1)dx=\int 3x^2dx+\int 2x\,dx-\int 1\,dx$$
$$=3\int x^2dx+2\int x\,dx-\int dx$$
$$=x^3+x^2-x+C$$

답 x^3+x^2-x+C

0724

$$\int(y-2)(3y+1)dy=\int(3y^2-5y-2)dy$$
$$=\int 3y^2dy-\int 5y\,dy-\int 2\,dy$$
$$=3\int y^2dy-5\int y\,dy-2\int dy$$
$$=y^3-\frac{5}{2}y^2-2y+C$$

답 $y^3-\frac{5}{2}y^2-2y+C$

0725

$$\int(2x+3)^2dx=\int(4x^2+12x+9)dx$$
$$=\int 4x^2dx+\int 12x\,dx+\int 9\,dx$$
$$=4\int x^2dx+12\int x\,dx+9\int dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+C$$

답 $\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+C$

0726

$$\int\frac{x^2-9}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}dx=\int(x-3)dx$$
$$=\int x\,dx-3\int dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-3x+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2-3x+C$

0727

$$\int\frac{t^3-1}{t-1}dt=\int\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}dt$$
$$=\int(t^2+t+1)dt$$
$$=\int t^2dt+\int t\,dt+\int dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+C$$

답 $\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+C$

0728

$$\int(x+1)^2dx-\int(x-1)^2dx$$
$$=\int(x^2+2x+1)dx-\int(x^2-2x+1)dx$$
$$=\int\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$$
$$=\int 4x\,dx=4\int x\,dx$$
$$=2x^2+C$$

답 $2x^2+C$

0729

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$$
$$=\int\frac{x^2}{x-1}dx+\int\frac{-1}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx$$
$$=\int(x+1)dx=\int x\,dx+\int dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0730

$$\int\frac{x^3}{x+2}dx+\int\frac{8}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$$
$$=\int(x^2-2x+4)dx=\int x^2dx-2\int x\,dx+4\int dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$$

답 $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

0731

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(9x^2+2x)dx$$
$$=9\int x^2dx+2\int x\,dx=3x^3+x^2+C$$

이때 $f(0)=-7$이므로 $C=-7$

$\therefore f(x)=3x^3+x^2-7$

답 $f(x)=3x^3+x^2-7$

0732

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3+4x-5)dx$$
$$=4\int x^3dx+4\int x\,dx-5\int dx=x^4+2x^2-5x+C$$

이때 $f(1)=0$이므로 $1+2-5+C=0$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=x^4+2x^2-5x+2$

답 $f(x)=x^4+2x^2-5x+2$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 부정적분의 정의 개념 01

함수 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나이다.

⇨ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.

⇨ $f(x)=F'(x)$

⇨ $\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

0733

$\int(6x^2+ax-3)dx=bx^3+5x^2+cx+1$에서

$6x^2+ax-3=(bx^3+5x^2+cx+1)'=3bx^2+10x+c$

즉, $6=3b$, $a=10$, $-3=c$이므로 $a=10$, $b=2$, $c=-3$

$\therefore a+b+c=10+2+(-3)=9$

답 9

0734

$f(x)=(x^3-x^2-2x+1)'=3x^2-2x-2$

$\therefore f(-1)=3+2-2=3$ 답 ③

0735

$F'(x)=f(x), G'(x)=f(x)$이므로

$F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$

$\therefore F(x)-G(x)=\int\{F'(x)-G'(x)\}dx$

$=\int 0\,dx=C$

이때 $F(0)-G(0)=2-5=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore F(-1)-G(-1)=C=-3$ 답 -3

0736

$\int(x-1)f(x)dx=2x^3-3x^2+C$에서

$(x-1)f(x)=(2x^3-3x^2+C)'=6x^2-6x=6x(x-1)$

따라서 $f(x)=6x$이므로 $f(2)=6\times2=12$ 답 12

0737

$F(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f'(x)=6x+2a$이므로 $f'(1)=-2$에서

$6+2a=-2$ $\therefore a=-4$ … ❶

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-8+b=-3$ $\therefore b=5$ … ❷

$\therefore a+b=-4+5=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0738

ㄱ. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3+1)'=3x^2$, $(x^3-\sqrt{2})'=3x^2$, …이므로 $3x^2$의 부정적분은 무수히 많다. (거짓)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이면 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로 $g'(x)=f(x)$이다. (참)

ㄷ. $\left(\int 3x^2dx\right)'=3x^2$이므로 $\int 3x^2\,dx$는 $3x^2$의 부정적분이다. (참)

ㄹ. 도함수가 0인 함수는 상수함수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0739

$f(x)=2x^2+1, g(x)=4x-1$에서 $f'(x)=4x, g'(x)=4$

$\int h(x)dx=f(x)g(x)$에서

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=4x(4x-1)+(2x^2+1)\times4=24x^2-4x+4$

$\therefore h(-1)=24+4+4=32$ 답 32

Lecture

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

0740

$\int g(x)dx=3x^2f(x)+a$에서

$g(x)=\{3x^2f(x)+a\}'=6xf(x)+3x^2f'(x)$

이때 $f(-1)=3, f'(-1)=7$이므로

$g(-1)=-6f(-1)+3f'(-1)$

$=-6\times3+3\times7=3$ 답 ②

유형 02 부정적분과 미분의 관계 (1) 개념 01

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$ (그대로)

0741

$\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^2+4x+3)dx\right\}=8x^2+bx+c$이므로

$ax^2+4x+3=8x^2+bx+c$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=8, b=4, c=3$

$\therefore a+b+c=8+4+3=15$ 답 ⑤

0742

$\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=x^4+x^3+x^2$이므로

$xf(x)=x^4+x^3+x^2=x(x^3+x^2+x)$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x$이므로

$f(2)=8+4+2=14$ 답 ③

0743

$\frac{d}{dx}\left(\int x\,dx\right)=x$, $\frac{d}{dx}\left\{\int(5x^2-4x-6)dx\right\}=5x^2-4x-6$이므로

주어진 방정식은 $x=5x^2-4x-6$, 즉 $5x^2-5x-6=0$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-5}{5}=1$ 답 ①

0744

로그의 밑과 진수의 조건에서

$x+1>0, x+1\neq1, x^2+2x+1>0$

$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+2x+1)dx\right\}=x^2+2x+1$이므로

$\log_{x+1}\left[\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+2x+1)dx\right\}\right]=\log_{x+1}(x^2+2x+1)$

$=\log_{x+1}(x+1)^2=2$

즉, $2=x^2+3x-8$이므로

$x^2+3x-10=0, (x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because$ ㉠) 답 2

유형 03 부정적분과 미분의 관계 (2) 개념 01

$$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$$ (+적분상수)

0745

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3x)\right\}dx=x^3-2x^2+3x+C$이므로

$f(x)=x^3-2x^2+3x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$이므로

$f(3)=27-18+9+1=19$ 답 19

0746

$\int\left\{\frac{d}{dx}(-3x^2+12x+7)\right\}dx=-3x^2+12x+C$이므로

$f(x)=-3x^2+12x+C=-3(x-2)^2+12+C$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $12+C$를 가지므로

$12+C=20 \quad \therefore C=8$

따라서 $f(x)=-3x^2+12x+8$이므로

$f(1)=-3+12+8=17$ 답 ④

Lecture

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값은 q이고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값은 q이고, 최솟값은 없다.

0747

$g(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^4+2x+6+C$

$h(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)=x^4+2x+6$

이때 $g(-1)=3$이므로

$1-2+6+C=3 \quad \therefore C=-2$

따라서 $g(x)=x^4+2x+4$이므로

$g(1)+h(-2)=(1+2+4)+(16-4+6)=25$ 답 25

0748

$$\int\left[\frac{d}{dx}\left[\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]\right]dx=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=f(x)+C_2$$

이므로

$F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+C_2$

이때 $F(0)=2$이므로 $C_2=2$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+2$이므로

$F(1)=100+99+\cdots+2+1+2$

$=\frac{100\times(100+1)}{2}+2=5052$ 답 ⑤

Lecture

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

유형 04 부정적분의 계산 개념 02

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 $y=1$의 부정적분

① n이 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

② $\int 1dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(3) $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (복호동순)

0749

$f(x)=\int(x+3)(x^2-3x+9)dx-\int(x-3)(x^2+3x+9)dx$

$=\int(x^3+27)dx-\int(x^3-27)dx$

$=\int\{(x^3+27)-(x^3-27)\}dx$

$=\int 54\,dx=54x+C$

이때 $f(0)=6$이므로 $C=6$

따라서 $f(x)=54x+6$이므로

$f(1)=54+6=60$ 답 60

0750

$f(x)=\int(\sqrt{x}+1)^2dx+\int(\sqrt{x}-1)^2dx$

$=\int(x+2\sqrt{x}+1)dx+\int(x-2\sqrt{x}+1)dx$

$=\int\{(x+2\sqrt{x}+1)+(x-2\sqrt{x}+1)\}dx$

$=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C$

이때 $f(1)=8$이므로 $1+2+C=8 \quad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 4이다. 답 ⑤

0751

$f(x)=\int\left(\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{8}x^8+\cdots+x\right)dx$

$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}x^9+\cdots+\frac{1}{2}x^2+C$

이때 $f(0)=10$이므로 $C=10$

따라서

$f(x)=\frac{1}{10\times11}x^{11}+\frac{1}{9\times10}x^{10}+\frac{1}{8\times9}x^9+\cdots+\frac{1}{1\times2}x^2+10$

이므로

$f(1)=\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{8\times9}+\cdots+\frac{1}{1\times2}+10$

$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$

$+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right)+10$

$=1-\frac{1}{11}+10=\frac{120}{11}$ 답 ④

참고 부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0752

$g(x)=\int f(x)dx+\int(x-1)f'(x)dx$

$=\int\{f(x)+(x-1)f'(x)\}dx=\int\{(x-1)f(x)\}'dx$

$=(x-1)f(x)+C=(x-1)\times\dfrac{x^2+4x+7}{x-1}+C$

$=x^2+4x+7+C$

이때 $g(-2)=9$이므로 $4-8+7+C=9$ $\therefore C=6$

따라서 $g(x)=x^2+4x+13$이므로

$g(-1)=1-4+13=10$ 답 10

유형 05 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 구하기 개념 01, 02

$\dfrac{d}{dx}f(x)=g(x)$ 꼴이 주어질 때

⇨ 양변을 적분하여 $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

(단, C는 적분상수)

0753

조건 (가)의 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$

이때 조건 (나)에서 $f(1)=3, g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1+C=0$ $\therefore C=-1$

즉, $f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로

$\begin{cases}f(x)=x-1\\g(x)=x^2+x+1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2+x+1\\g(x)=x-1\end{cases}$

그런데 $f(1)=3, g(1)=0$이므로

$f(x)=x^2+x+1, g(x)=x-1$

$\therefore f(2)+g(5)=(4+2+1)+(5-1)=11$ 답 ①

0754

$\int(x+2)f'(x)dx=x^3+x^2-8x+5$에서

$\dfrac{d}{dx}\left\{\int(x+2)f'(x)dx\right\}=\dfrac{d}{dx}(x^3+x^2-8x+5)$

$(x+2)f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$

즉, $f'(x)=3x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C$

이때 $f(2)=-4$이므로 $6-8+C=-4$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x-2$이므로

$f(6)=54-24-2=28$ 답 28

0755

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3dx$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+C_1$

또, $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x-5$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(4x-5)dx$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2-5x+C_2$ … ❶

이때 $f(2)=5, g(2)=-1$이므로

$f(2)+g(2)=6+C_1=4$ $\therefore C_1=-2$

$f(2)g(2)=8-10+C_2=-5$ $\therefore C_2=-3$

$f(x)+g(x)=3x-2$, $f(x)g(x)=2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$

$\therefore\begin{cases}f(x)=2x+1\\g(x)=x-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x-3\\g(x)=2x+1\end{cases}$

그런데 $f(2)=5, g(2)=-1$이므로

$f(x)=2x+1, g(x)=x-3$ … ❷

$\therefore f(1)+g(-2)=3+(-5)=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$, $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)+g(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0756

$g(x)=\int\{f(x)-2x^2\}dx$에서

$\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\int\{f(x)-2x^2\}dx\right]$

$g'(x)=f(x)-2x^2$이므로 $f(x)=g'(x)+2x^2$

이때 $f(x)+g(x)=2x-5$이므로

$\{g'(x)+2x^2\}+g(x)=2x-5$

$\therefore g(x)+g'(x)=-2x^2+2x-5$ …… ㉠

즉, $g(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차함수이므로

$g(x)=-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=-4x+a$

㉠에서 $(-2x^2+ax+b)+(-4x+a)=-2x^2+2x-5$

$-2x^2+(a-4)x+a+b=-2x^2+2x-5$ ← x에 대한 항등식

$a-4=2, a+b=-5$ $\therefore a=6, b=-11$

따라서 $g(x)=-2x^2+6x-11$이므로

$g(1)=-2+6-11=-7$ 답 ②

다른 풀이 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$g(x)=\int\{f(x)-2x^2\}dx=\int\{(a-2)x^2+bx+c\}dx$

$=\dfrac{a-2}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C$

이때 $f(x)+g(x)=2x-5$이므로 ← x에 대한 항등식

$\dfrac{a-2}{3}x^3+\left(a+\dfrac{b}{2}\right)x^2+(b+c)x+c+C=2x-5$

$\dfrac{a-2}{3}=0, a+\dfrac{b}{2}=0, b+c=2, c+C=-5$

$\therefore a=2, b=-4, c=6, C=-11$

따라서 $g(x)=-2x^2+6x-11$이므로

$g(1)=-2+6-11=-7$

유형 06 도함수가 주어질 때 함수 구하기 개념 02

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 주어질 때

(i) $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

(ii) 함숫값을 이용하여 적분상수를 구한다.

0757

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax-1)dx$$
$$=x^3+ax^2-x+C$$

이때 $f(0)=1$, $f(1)=4$이므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(1)=4$에서 $1+a-1+1=4$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-x+1$이므로

$f(-2)=-8+12+2+1=7$ 답 7

0758

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x-4)dx$$
$$=x^3+x^2-4x+C$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 5)$를 지나므로 $f(1)=5$에서

$1+1-4+C=5$ $\therefore C=7$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-4x+7$이므로

$f(3)=27+9-12+7=31$ 답 31

0759

$$f'(x)=\frac{x^6-1}{x^2-x+1}=\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x^3-1)}{x^2-x+1}$$
$$=(x+1)(x^3-1)=x^4+x^3-x-1$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^4+x^3-x-1)dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-x+C$$

이때 $f(0)=\frac{4}{5}$이므로 $C=\frac{4}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{4}{5}$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1+\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}$ 답 ②

0760

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=4$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=0$이다.

$\therefore f(1)=-3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

$f'(x)=6x+a$이므로

$6+a=4$ $\therefore a=-2$

즉, $f'(x)=6x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C$

이때 $f(1)=-3$이므로

$3-2+C=-3$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로

$f(5)=75-10-4=61$ 답 ④

0761

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+ax+5)dx$$
$$=x^3+\frac{a}{2}x^2+5x+C$$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

또, 함수 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=0$

즉, $f(1)=1+\frac{a}{2}+5-2=0$에서 $a=-8$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$이므로

$f(2)=8-16+10-2=0$ 답 ③

0762

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x)dx=4x^3-3x^2+C_1$

이때 $f(1)=4$이므로

$4-3+C_1=4$ $\therefore C_1=3$

$\therefore f(x)=4x^3-3x^2+3$

$F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-3x^2+3)dx=x^4-x^3+3x+C_2$

이때 $F(-1)=-2$이므로

$1+1-3+C_2=-2$ $\therefore C_2=-1$

따라서 $F(x)=x^4-x^3+3x-1$이므로

$F(1)=1-1+3-1=2$ 답 2

0763

$f(x)+g(x)=\int\{f'(x)+g'(x)\}dx$

$=\int(4x+3)dx=2x^2+3x+C_1$

$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$

$=\int(6x^2+1)dx=2x^3+x+C_2$

이때 $f(0)=-1, g(0)=3$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=2$, $f(0)g(0)=C_2=-3$

$f(x)+g(x)=2x^2+3x+2=(x-1)+(2x^2+2x+3)$

$f(x)g(x)=2x^3+x-3=(x-1)(2x^2+2x+3)$

$\therefore \begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=2x^2+2x+3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=2x^2+2x+3 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$

그런데 $f(0)=-1, g(0)=3$이므로

$f(x)=x-1, g(x)=2x^2+2x+3$

$\therefore f(3)+g(-1)=(3-1)+(2-2+3)=5$ 답 5

0764

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

조건 (가)에서 $f'(-1)=f'(0)=f'(4)$이므로

$f'(x)=4x(x+1)(x-4)+a$ (a는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=3$에서 x축에 접하므로

$f(3)=0, f'(3)=0$

$f'(3)=0$에서

$4\times3\times4\times(-1)+a=0 \quad \therefore a=48$

즉, $f'(x)=4x(x+1)(x-4)+48=4x^3-12x^2-16x+48$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-12x^2-16x+48)dx$$
$$=x^4-4x^3-8x^2+48x+C$$

$f(3)=0$에서

$81-108-72+144+C=0 \quad \therefore C=-45$

따라서 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+48x-45$이므로

$f(1)=1-4-8+48-45=-8$ 답 ①

참고 $f'(-1)=f'(0)=f'(4)=a$라 하면 $x=-1, x=0, x=4$는 삼차방정식 $f'(x)-a=0$의 서로 다른 세 실근이다.

즉, $f'(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로

$f'(x)-a=4x(x+1)(x-4)$에서

$f'(x)=4x(x+1)(x-4)+a$

유형 07 접선의 기울기가 주어질 때 함수 구하기 개념 02

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx$

0765

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+2x+1)dx$$
$$=2x^3+x^2+x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+x+2$이므로

$f(1)=2+1+1+2=6$ 답 ③

0766

$f'(x)=2x^2-4x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^2-4x)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=3$에서

$\frac{2}{3}-2+C=3 \quad \therefore C=\frac{13}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{13}{3}$이므로

$f(-2)=-\frac{16}{3}-8+\frac{13}{3}=-9$

$\therefore k=-9$ 답 -9

0767

$f'(x)=3x^2+5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+5)dx=x^3+5x+C$

$f(-1)=-1-5+C=-6+C, f'(-1)=3+5=8$

이므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6+C)=8\{x-(-1)\} \quad \therefore y=8x+2+C$

이때 이 직선의 x절편이 $\frac{1}{2}$이므로

$0=8\times\frac{1}{2}+2+C \quad \therefore C=-6$

따라서 $f(x)=x^3+5x-6$이므로

$f(4)=64+20-6=78$ 답 ③

0768

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(2ax+1)dx\right\}=2ax+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=-1$에서

$2a+1=-1 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+1)dx=-x^2+x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=3$에서

$-1+1+C=3 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-x^2+x+3$이므로

$f(2)=-4+2+3=1$ 답 ⑤

0769

$f'(x)=4x-12$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-12)dx$$
$$=2x^2-12x+C=2(x-3)^2-18+C$$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로

$-18+C=-9 \quad \therefore C=9$

$\therefore f(x)=2x^2-12x+9$

따라서 닫힌구간 $[2, 5]$에서 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은 $f(5)=50-60+9=-1$ 답 ②

0770

$f'(x)=3x^2-2x+2$이고, 직선 $y=3x-2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(a, 3a-2)$ $\left(a>\frac{2}{3}\right)$라 하면 $f'(a)=3$이므로

$3a^2-2a+2=3, 3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 \left(\because a>\frac{2}{3}\right)$ … ❶

$f(x)=\int(3x^2-2x+2)dx=x^3-x^2+2x+C$ … ❷

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f(1)=1$에서

$1-1+2+C=1 \quad \therefore C=-1$ … ❸

따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x-1$이므로

$f(3)=27-9+6-1=23$ … ❹

답 23

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ 적분상수 C를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0771

$f'(x)=x^2-2x+a$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x+a)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+C$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 $-\frac{11}{3}$을 가지므로

$f'(3)=0, f(3)=-\frac{11}{3}$

$f'(3)=0$에서 $9-6+a=0$ $\therefore a=-3$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$이므로 $f(3)=-\frac{11}{3}$에서

$9-9-9+C=-\frac{11}{3}$ $\therefore C=\frac{16}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{16}{3}$

한편, $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+\frac{16}{3}=7$ 답 ④

0772

$f'(x)=-x+a$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x+a)dx=-\frac{1}{2}x^2+ax+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, -8)$을 지나므로 $f(2)=-8$에서

$-2+2a+C=-8$ $\therefore C=-2a-6$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax-2a-6$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $-\frac{1}{2}x^2+ax-2a-6=0$의 실근이 존재하려면

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\geq0$이어야 한다.

$D=a^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2a-6)\geq0$

$a^2-4a-12\geq0, (a+2)(a-6)\geq0$

$\therefore a\leq-2$ 또는 $a\geq6$

따라서 양수 a의 최솟값은 6이다. 답 6

Lecture

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D>0$

(2) 중근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D=0$

(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D<0$

유형 08 함수와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어질 때 함수 구하기 개념 02

함수 $f(x)$와 그 부정적분 $F(x)$ 사이의 관계식이 주어질 때

(i) 양변을 x에 대하여 미분한 후 $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

(ii) $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

0773

$F(x)=xf(x)-2x^3-2x^2+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2-4x$

$xf'(x)=6x^2+4x=x(6x+4)$ $\therefore f'(x)=6x+4$

$\therefore f(x)=\int(6x+4)dx=3x^2+4x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=3x^2+4x$이므로

$f(-3)=27-12=15$ 답 15

0774

$(x-1)f(x)-F(x)=2x^3-3x^2-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=6x^2-6x$

$(x-1)f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ $\therefore f'(x)=6x$

$\therefore f(x)=\int6x\,dx=3x^2+C$

이때 $f(1)=2$이므로

$3+C=2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$f(2)=12-1=11$ 답 11

0775

$2\int f(x)dx=xf(x)+f(x)-5x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+f'(x)-5$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-5$ ····· ㉠ ··· ❶

이때 함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 상수, n은 자연수, $a\neq0$)이라 하면 함수 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이므로 ㉠에서

$a=an$ $\therefore n=1$ ($\because a\neq0$) ··· ❷

즉, $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=a$

㉠에서

$ax+b=a(x+1)-5, ax+b=ax+a-5$

$\therefore b=a-5$ ····· ㉡

또, $f(2)=-2$이므로 ㉠에 대입하면

$2a+b=-2$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1, b=-4$

따라서 $f(x)=x-4$이므로 ··· ❸

$f(6)=6-4=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$가 일차함수임을 알아낼 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(6)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0776

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=2x^3+3x^2-x+3$ ····· ㉠

즉, $xf(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=4x+a$

㉠에서

$4x+a+x(2x^2+ax+b)=2x^3+3x^2-x+3$

$2x^3+ax^2+(b+4)x+a=2x^3+3x^2-x+3$

$\therefore a=3, b=-5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-5$이므로

$f(1)=2+3-5=0$ 답 ②

참고 다항함수 $f(x)$가 n차함수이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차, $xf(x)$는 $(n+1)$차이므로 $f'(x)+xf(x)$는 $(n+1)$차함수이다.

유형 09 부정적분과 함수의 연속 개념 02

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases} g(x) & (x>a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때

(1) $f(x)=\begin{cases} \int g(x)dx & (x>a) \\ \int h(x)dx & (x<a) \end{cases}$

(2) $f(a)=\lim\limits_{x\to a+}\int g(x)dx=\lim\limits_{x\to a-}\int h(x)dx$

0777

$f'(x)=\begin{cases} -4x^3+k & (x>-1) \\ 4x+5 & (x<-1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} -x^4+kx+C_1 & (x>-1) \\ 2x^2+5x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

$f(-3)=-6$이므로

$18-15+C_2=-6 \quad \therefore C_2=-9$

$f(1)=2$이므로

$-1+k+C_1=2 \quad \therefore k+C_1=3$ ····· ㉠

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}(-x^4+kx+C_1)=\lim\limits_{x\to -1-}(2x^2+5x-9)$에서

$-1-k+C_1=2-5-9$

$\therefore k-C_1=11$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_1=-4, k=7$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^4+7x-4 & (x\geq -1) \\ 2x^2+5x-9 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(2)=-16+14-4=-6$ 답 -6

0778

$f'(x)=\begin{cases} 8x-3 & (x\geq 2) \\ 3x^2+1 & (x<2) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} 4x^2-3x+C_1 & (x\geq 2) \\ x^3+x+C_2 & (x<2) \end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_2=1$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2+}(4x^2-3x+C_1)=\lim\limits_{x\to 2-}(x^3+x+1)$에서

$16-6+C_1=8+2+1 \quad \therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 4x^2-3x+1 & (x\geq 2) \\ x^3+x+1 & (x<2) \end{cases}$이므로

$f(4)=64-12+1=53$ 답 ⑤

Lecture

미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

0779

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} x+2 & (x>-1) \\ -1 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x>-1) \\ -x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로 $f(-2)=0$에서

$2+C_2=0 \quad \therefore C_2=-2$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+C_1\right)=\lim\limits_{x\to -1-}(-x-2)$에서

$\frac{1}{2}-2+C_1=1-2 \quad \therefore C_1=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2} & (x\geq -1) \\ -x-2 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$ 답 3

0780

$f'(x)=3x|x-1|+x+2$에서

$f'(x)=\begin{cases} 3x(x-1)+x+2 & (x\geq 1) \\ -3x(x-1)+x+2 & (x<1) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3x^2-2x+2 & (x\geq 1) \\ -3x^2+4x+2 & (x<1) \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2x+C_1 & (x\geq 1) \\ -x^3+2x^2+2x+C_2 & (x<1) \end{cases}$

$f(0)=4$이므로 $C_2=4$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1+}(x^3-x^2+2x+C_1)=\lim\limits_{x\to 1-}(-x^3+2x^2+2x+4)$에서

$1-1+2+C_1=-1+2+2+4 \quad \therefore C_1=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2x+5 & (x\geq 1) \\ -x^3+2x^2+2x+4 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(-1)+f(2)=(1+2-2+4)+(8-4+4+5)$

$=18$ 답 ④

유형 10 부정적분과 미분계수 개념 02

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$\Rightarrow f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

0781

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x+2)(x^2+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)(x^2+2)$

$\therefore f'(1)=3\times 3=9$

따라서 구하는 값은 $2f'(1)=2\times 9=18$ 답 ⑤

0782

$f(x)=\int(x^3+k)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3+k$

이때 $f'(1)=-3$이므로

$1+k=-3 \qquad \therefore k=-4$

따라서 $f'(x)=x^3-4$이므로

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\left\{\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}\times\dfrac{1}{x-2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x-2}$

$=f'(-2)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

$=(-8-4)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=3$ 답 3

0783

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(x+2h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times 2+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$

즉, $3f'(x)=9x^2+6x-3$에서 $f'(x)=3x^2+2x-1$ … ❶

$\therefore f(x)=\int(3x^2+2x-1)dx=x^3+x^2-x+C$ … ❷

이때 $f(1)=3$이므로

$1+1-1+C=3 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(2)=8+4-2+2=12$ … ❸

답 12

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0784

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

$f'(1)=1$에서 $6+k=1 \qquad \therefore k=-5$

$f'(x)=6x-5$이므로 $f(x)=\int(6x-5)dx=3x^2-5x+C$

이때 $f(1)=0$이므로 $3-5+C=0 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+2$이므로

$f(2)=12-10+2=4$ 답 ④

0785

$f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(2x^2+ax)\right\}dx=2x^2+ax+C$이므로

$f'(x)=4x+a$

이때 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=11$에서 $f'(2)=11$이므로

$8+a=11 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=2x^2+3x+C$

또, $f(-1)=4$이므로 $2-3+C=4 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x+5$이므로

$f(1)=2+3+5=10$ 답 ⑤

0786

$f(x)=\int(-6x^2+2ax-a)dx$에서

$f(x)=-2x^3+ax^2-ax+C$이고, $f'(x)=-6x^2+2ax-a$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=4$에서 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+f'(x)\}=0$이다. 즉, $f(0)+f'(0)=0$이므로

$C+(-a)=0 \qquad \therefore C=a$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^3+(a-6)x^2+ax}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\{-2x^2+(a-6)x+a\}=a=4$

㉠에서 $C=4$

따라서 $f(x)=-2x^3+4x^2-4x+4$이므로

$f(-1)=2+4+4+4=14$ 답 14

유형 11 부정적분과 극값 개념 02

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 ⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 ⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

0787

$f'(x)=6x^2-10x+4=2(3x-2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{2}{3}$	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 $f(1)=5$

이때 $f(x)=\int(6x^2-10x+4)dx=2x^3-5x^2+4x+C$이므로

$2-5+4+C=5 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+4x+4$이므로

$f(-1)=-2-5-4+4=-7$ 답 −7

0788

$f'(x)=-x^2+1=-(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f(1)=\frac{7}{3}$

이때 $f(x)=\int(-x^2+1)dx=-\frac{1}{3}x^3+x+C$이므로

$-\frac{1}{3}+1+C=\frac{7}{3} \quad \therefore C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{5}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(-1)=\frac{1}{3}-1+\frac{5}{3}=1$ 답 1

0789

$f(x)$의 최고차항이 $2x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $6x^2$이다.

즉, $f'(-1)=f'(5)=0$이므로 $f'(x)=6(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	5	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 $f(-1)=24$

이때

$$\begin{aligned}f(x)&=\int 6(x+1)(x-5)dx\\&=\int(6x^2-24x-30)dx\\&=2x^3-12x^2-30x+C\end{aligned}$$

이므로

$-2-12+30+C=24 \quad \therefore C=8$

따라서 $f(x)=2x^3-12x^2-30x+8$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(5)=250-300-150+8=-192$ 답 −192

0790

$f(x)=\int(3x^2+ax-9)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax-9$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$에서

$3+a-9=0 \quad \therefore a=6$

즉, $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−3	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 $f(1)=-8$

이때 $f(x)=\int(3x^2+6x-9)dx=x^3+3x^2-9x+C$이므로

$1+3-9+C=-8 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-3$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27-3=24$ 답 ④

0791

$f'(x)=x^2-kx=x(x-k)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	k	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=k$에서 극소이다.

이때 $f(x)=\int(x^2-kx)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2+C$이므로

$f(0)-f(k)=C-\left(\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3+C\right)=\frac{1}{6}k^3$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차가 36이므로

$\frac{1}{6}k^3=36,\ k^3=216 \quad \therefore k=6\ (\because k>0)$ 답 6

0792

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 조건 (나)에서 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않으려면 함수 $f(x)$가 항상 증가해야 한다.

$\therefore f'(x)\geq 0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고, 조건 (가)에서 $f'(3)=0$이므로

$f'(x)=3(x-3)^2=3x^2-18x+27$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-18x+27)dx=x^3-9x^2+27x+C$

이때 조건 (가)에서 $f(3)=0$이므로

$27-81+81+C=0 \quad \therefore C=-27$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+27x-27$이므로

$f(2)=8-36+54-27=-1$ 답 ③

참고 • 조건 (가)에서 $f'(3)=0$이므로 $f'(x)$는 $x-3$을 인수로 갖고, 조건 (나)에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 $f'(x)=3(x-3)^2$이다.
• 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 조건 (가), (나)를 만족시키려면 방정식 $f(x)=0$은 $x=3$에서 삼중근을 가져야 하므로 $f(x)=(x-3)^3$이다.

Lecture

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
⇨ 삼차함수 $f(x)$가 항상 증가하거나 항상 감소한다.
⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.
⇨ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이다.

유형 12 부정적분과 도함수의 그래프 개념 02

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 주어졌을 때
⇨ 그래프가 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha\neq\beta)$에서 x축과 만나면
$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq 0)$로 놓고 주어진 극값을 이용한다.

0793

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-2$, $x=0$에서 x축과 만나고 아래로 볼록하므로 $f'(x)=ax(x+2)$ $(a>0)$라 하면

$$f(x)=\int ax(x+2)dx=\int(ax^2+2ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3+ax^2+C$$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로
$f(0)=1$에서 $C=1$

$x=-2$에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀐다.

또, $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로
$f(-2)=5$에서

$$-\frac{8}{3}a+4a+1=5 \qquad \therefore a=3$$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+1$이므로
$f(2)=8+12+1=21$ 답 ②

0794

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=3$에서 x축과 만나고 위로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면
$f'(0)=3$에서 $-3a=3$ $\therefore a=-1$

$$\therefore f(x)=\int\{-(x+1)(x-3)\}dx=\int(-x^2+2x+3)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$$

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀐다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이므로
$f(3)=10$에서
$-9+9+9+C=10$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$$f(-1)=\frac{1}{3}+1-3+1=-\frac{2}{3}$$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 $x=-1$에서 극소이다.

답 ②

0795

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.
즉, $f'(x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이다.
함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=0$, $x=5$에서 x축과 만나므로
$f'(x)=6x(x-5)=6x^2-30x$

$$\therefore f(x)=\int(6x^2-30x)dx=2x^3-15x^2+C$$

따라서
$f(-1)=-2-15+C=-17+C$,
$f(2)=16-60+C=-44+C$
이므로
$f(-1)-f(2)=(-17+C)-(-44+C)=27$ 답 27

0796

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\geq 0)\\ -2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+C_1 & (x\geq 0)\\ -2x+C_2 & (x<0)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나고 $x=0$에서 연속이므로
$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$에서

$$0=\lim_{x\to 0+}(x^2-2x+C_1)=\lim_{x\to 0-}(-2x+C_2) \qquad \therefore C_1=0,\ C_2=0$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x\geq 0)\\ -2x & (x<0)\end{cases} \quad \cdots ❷$$

이때 양수 a에 대하여 $f(-a)+f(a)=8$이므로
$2a+(a^2-2a)=8$, $a^2=8$ $\therefore a=2\sqrt{2}$ $(\because a>0)$ $\cdots ❸$

답 $2\sqrt{2}$

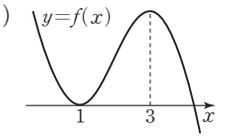
채점 기준	배점
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

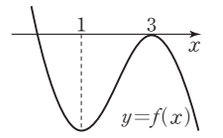
0797

$f(x)$는 최고차항의 계수가 −1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 −3인 이차함수이다.
함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=3$에서 x축과 만나므로
$f'(x)=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$

$$\therefore f(x)=\int(-3x^2+12x-9)dx=-x^3+6x^2-9x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하므로 다음 그림과 같이 극값 중 하나가 0이어야 한다.

(i) 

(ii) 

(i) $f(1)=0$일 때
$-1+6-9+C=0$에서 $C=4$이므로
$f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$ $\therefore f(-1)=1+6+9+4=20$

(ii) $f(3)=0$일 때
$-27+54-27+C=0$에서 $C=0$이므로
$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ $\therefore f(-1)=1+6+9=16$

(i), (ii)에 의하여 가능한 모든 $f(-1)$의 값의 합은
$20+16=36$ 답 ⑤

0798

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=1$에서 x축과 만나고 아래로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a>0)$이라 하면

$f'(0)=-3$이므로 $-a=-3$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=\int 3(x+1)(x-1)dx=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^3-3x+1$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀐다.

한편, $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은

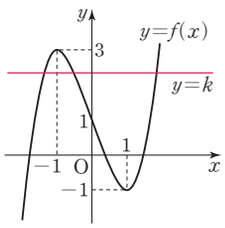
$f(-1)=-1+3+1=3$

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.

또, $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은

$f(1)=1-3+1=-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$-1<k<3$

답 $-1<k<3$

다른 풀이 $f(x)=k$에서 $x^3-3x+1=k$

$\therefore x^3-3x+1-k=0$

$g(x)=x^3-3x+1-k$라 하면

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(-1)g(1)<0$이어야 한다.

$(3-k)(-1-k)<0$에서

$(k-3)(k+1)<0$ $\therefore -1<k<3$

발전 유형 13 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기 개념 02

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 꼴의 식이 주어지면

(i) $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

(iii) $f'(x)$의 부정적분을 구하고, $f(0)$의 값을 이용하여 적분상수를 찾는다.

0799

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)+1$ $\therefore f(0)=-1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$에서 $f(x+h)=f(x)+f(h)+1$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+1-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=-1)$$

$$=f'(0)=1$$

$\therefore f(x)=\int 1\,dx=x+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=x-1$이므로

$f(12)=12-1=11$ 답 11

0800

$f(x+y)-f(x)=kxy+y^2$에서

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{kxh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(kx+h)=kx$$

$f'(3)=6$에서

$3k=6$ $\therefore k=2$

$\therefore f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$

$f(3)=16$에서

$9+C=16$ $\therefore C=7$

따라서 $f(x)=x^2+7$이므로

$f(6)=36+7=43$ 답 43

0801

$f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy-2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)-2$ $\therefore f(0)=2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-4xh-2-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-2}{h}-4x\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to 0}4x\ (\because f(0)=2)$$

$$=f'(0)-4x=-4x+5\ (\because f'(0)=5)$$

$\therefore f(x)=\int(-4x+5)dx=-2x^2+5x+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=-2x^2+5x+2$이므로

$f(-1)=-2-5+2=-5$ 답 ①

0802

$f(x-y)=f(x)-f(y)+3xy(x-y)-2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0-0)=f(0)-f(0)-2$ $\therefore f(0)=-2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(h)+3xh(x-h)-2-f(x)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+2}{h}-3x(x-h)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to 0}3x(x-h)\ (\because f(0)=-2)$$

$$=f'(0)-3x^2=-3x^2+4\ (\because f'(0)=4)$$

$\therefore f(x)=\int(-3x^2+4)dx=-x^3+4x+C$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=-x^3+4x-2$이므로

$f(-3)=27-12-2=13$ 답 13

STEP 3 내신 마스터

0803
유형 01 부정적분의 정의

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$이다.

$\int f(x)dx=x^2g(x)+3x+C$에서

$f(x)=\{x^2g(x)+3x+C\}'$

$\quad=2xg(x)+x^2g'(x)+3$

$\therefore f(3)=6g(3)+9g'(3)+3$

$\quad=6\times3+9\times(-2)+3$

$\quad=3$

답 ④

0804
유형 02 부정적분과 미분의 관계 (1) + 03 부정적분과 미분의 관계 (2)

|전략| $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$, $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

$\frac{d}{dx}\left[\int\{2f(x)+x^3-5\}dx\right]=2f(x)+x^3-5$,

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-4x\}\right]dx=f(x)-4x+C$

이므로 주어진 등식은

$2f(x)+x^3-5=f(x)-4x+C$

$\therefore f(x)=-x^3-4x+5+C$

이때 $f(1)=9$이므로

$-1-4+5+C=9 \qquad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=-x^3-4x+14$이므로

$f(2)=-8-8+14=-2$

답 ②

0805
유형 04 부정적분의 계산

|전략| 이차방정식의 판별식을 이용하여 조건을 만족시키는 적분상수의 값의 범위를 찾는다.

조건 (가)에서

$f(x)=\int(6x+6)dx=3x^2+6x+C$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $3x^2+6x+C\geq0$이므로 이차방정식 $3x^2+6x+C=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=9-3C\leq0 \qquad \therefore C\geq3$

따라서

$f(2)=12+12+C=24+C\geq27$

이므로 $f(2)$의 최솟값은 27이다.

답 ⑤

Lecture

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때,

모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이다. $\Longleftrightarrow a>0, D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq0$이다. $\Longleftrightarrow a>0, D\leq0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이다. $\Longleftrightarrow a<0, D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq0$이다. $\Longleftrightarrow a<0, D\leq0$

0806
유형 01 부정적분의 정의 + 04 부정적분의 계산

|전략| 부정적분의 정의를 이용하여 $f(x)-g(x)$와 $f(x)+g(x)$의 차수를 찾는다.

두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)-g(x)$의 부정적분 중 하나가 $f(x)+g(x)$의 도함수이므로

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\{f(x)+g(x)\}'$ ····· ㉠

즉, $f(x)-g(x)$는 일차식, $f(x)+g(x)$는 삼차식이어야 한다.

$f(x)=2x^3-x^2+4x+5$이므로

$g(x)=2x^3-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq4$)라 하면

$f(x)-g(x)=(4-a)x+5-b$

$f(x)+g(x)=4x^3-2x^2+(4+a)x+5+b$

㉠에서 $\int\{(4-a)x+5-b\}dx=\{4x^3-2x^2+(4+a)x+5+b\}'$

$\frac{4-a}{2}x^2+(5-b)x+C=12x^2-4x+4+a$

$\frac{4-a}{2}=12$, $5-b=-4 \qquad \therefore a=-20, b=9$

따라서 $g(x)=2x^3-x^2-20x+9$이므로

$g(-1)=-2-1+20+9=26$

답 ③

0807
유형 05 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 구하기

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$임을 이용한다.

$\int(2x+7)f'(x)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-14x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(2x+7)f'(x)=2x^2+3x-14=(2x+7)(x-2)$

즉, $f'(x)=x-2$이므로

$f(x)=\int(x-2)dx=\frac{1}{2}x^2-2x+C_1$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $f(0)=\frac{5}{2}$에서 $C_1=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$이므로

$f(5)=\frac{25}{2}-10+\frac{5}{2}=5$

답 ⑤

0808
유형 05 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 구하기

|전략| 두 번째 식에서 $g(x)$는 일차함수임을 유추하고, 첫 번째 식에서 $g'(x)=x^2+f(x)$임을 이용한다.

$f(x)g(x)=-x^3+2x^2+x-2$ ····· ㉠

㉠에서 $f(x)$가 이차함수이므로 $g(x)$는 일차함수이다.

또, $g(x)$가 일차함수이므로 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$에서

$x^2+f(x)$는 상수함수이다.

즉, $x^2+f(x)=a$ ($a\neq0$인 상수)라 하면 $f(x)=-x^2+a$

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx=\int a\,dx=ax+C$

㉠에서

$(-x^2+a)(ax+C)=-x^3+2x^2+x-2$

$-ax^3-Cx^2+a^2x+aC=-x^3+2x^2+x-2$

$-a=-1,\ -C=2 \quad \therefore a=1, C=-2$

따라서 $g(x)=x-2$이므로 $g(4)=4-2=2$ 답 ②

0809

유형 06 도함수가 주어질 때 함수 구하기

|전략| 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$임을 이용한다.

$f'(x)=(x-2)\{f(2)-6x\}$

$=-6x^2+\{f(2)+12\}x-2f(2)$ ····· ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 -6이고 $x-2$를 인수로 가지므로

$f'(x)=-6(x-2)^2=-6x^2+24x-24$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $f(2)=12$

$f(x)=\int(-6x^2+24x-24)dx=-2x^3+12x^2-24x+C$

이때 $f(2)=12$이므로

$-16+48-48+C=12 \quad \therefore C=28$

따라서 $f(x)=-2x^3+12x^2-24x+28$이므로

$f(1)=-2+12-24+28=14$ 답 ③

0810

유형 07 접선의 기울기가 주어질 때 함수 구하기

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(-2)(x+2)+4$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=2f'(-2)+4 \quad \therefore f'(-2)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

즉, $f'(x)=3(x+2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=\int 3(x+2)(x+a)dx=\int\{3x^2+3(a+2)x+6a\}dx$

$=x^3+\frac{3(a+2)}{2}x^2+6ax+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2, 4)$를 지나므로 $f(-2)=4$에서

$-8+6(a+2)-12a+C=4 \quad \therefore C=6a$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{3(a+2)}{2}x^2+6ax+6a$

이때

$f(1)=1+\frac{3(a+2)}{2}+6a+6a=\frac{27}{2}a+4$,

$f'(1)=3\times 3\times(1+a)=9a+9$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(9a+9)(x-1)+\frac{27}{2}a+4$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-(9a+9)+\frac{27}{2}a+4,\ \frac{9}{2}a=9 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+12x+12$이므로

$f(0)=12$ 답 ①

다른 풀이 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2, 4)$를 지나므로 $f(-2)=4$에서

$-8+4a-2b+c=4 \quad \therefore 4a-2b+c=12$ ····· ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선이 점 $(0, 4)$를 지나므로 접선의 기울기는 두 점 $(-2, 4)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

즉, $f'(-2)=\frac{4-4}{-2-0}=0$이므로

$12-4a+b=0 \quad \therefore 4a-b=12$ ····· ㉡

한편, $f(1)=1+a+b+c$, $f'(1)=3+2a+b$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(3+2a+b)(x-1)+1+a+b+c$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-(3+2a+b)+1+a+b+c \quad \therefore c=a+6$ ····· ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $5a-2b=6$ ····· ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=6, b=12$

따라서 $a=6$을 ㉢에 대입하면 $c=12$이므로 $f(0)=c=12$

0811

유형 08 함수와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어질 때 함수 구하기

|전략| 양변을 x에 대하여 미분하고, $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

$2F(x)=x\{f(x)-3\}$ ····· ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)-3+xf'(x) \quad \therefore f(x)=xf'(x)-3$ ····· ㉡

$f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 자연수)이라 하면 $xf'(x)$의 최고차항은 nx^n이므로 ㉡에 의하여

$n=1$

즉, $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=x+a$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=1$

이것을 ㉡에 대입하면

$x+a=x-3 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x-3$이고 $f(2)=-1$이므로 ㉠에서

$2F(2)=2\{f(2)-3\} \quad \therefore F(2)=-1-3=-4$ 답 ①

0812

유형 11 부정적분과 극값 + 12 부정적분과 도함수의 그래프

|전략| $y=f'(x), y=g'(x)$의 그래프가 $x=a, x=\beta$에서 만나면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($a\ne 0$인 상수)로 놓을 수 있다.

$y=f'(x), y=g'(x)$의 그래프가 $x=0, x=2$에서 만나고 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록, $y=g'(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=ax(x-2)$ ($a<0$)라 하면

$h(x)=\int ax(x-2)dx=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	2	···
$h'(x)$	−	0	+	0	−
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 $h(2)=5$에서

$\frac{8}{3}a-4a+C=5 \quad \therefore -\frac{4}{3}a+C=5$ ····· ㉠

또, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $h(0)=1$에서

$C=1$

㉠에서 $-\frac{4}{3}a+1=5 \quad \therefore a=-3$

따라서 $h(x)=-x^3+3x^2+1$이므로

$h(-2)=8+12+1=21$ 답 ⑤

0813

유형 13 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

조건 (가)의 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

조건 (나)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-1=3$$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=4$ ····· ㉠

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-x=-x+4 \ (\because ㉠)$$

$\therefore f(x)=\int(-x+4)dx=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 8이다. 답 ④

0814

유형 10 부정적분과 미분계수

|전략| $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재할 때, (분모)→0이면 (분자)→0임을 이용한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-1}=2$에서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로

$f'(x)=2x+a$ (a는 상수)

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=2$에서 $\lim_{x\to 4}(x-4)=0$이므로 $\lim_{x\to 4}f(x)=0$이다.

즉, $f(4)=0$이므로

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=2$

$f'(4)=2$에서 $8+a=2 \quad \therefore a=-6$

$f'(x)=2x-6$이므로 ··· ❶

$f(x)=\int(2x-6)dx=x^2-6x+C$

이때 $f(4)=0$이므로

$16-24+C=0 \quad \therefore C=8$

$\therefore f(x)=x^2-6x+8$ ··· ❷

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 8이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	2점

0815

유형 09 부정적분과 함수의 연속 + 12 부정적분과 도함수의 그래프

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1, x=1$에서 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & (x>1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ 2 & (x<-1)\end{cases}$$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2x+C_1 & (x>1)\\ x^2+C_2 & (-1<x<1)\\ 2x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$$ ··· ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서 $C_2=0$

$f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to -1+}x^2=\lim_{x\to -1-}(2x+C_3)$에서

$1=-2+C_3 \quad \therefore C_3=3$

또, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1+}(-2x+C_1)=\lim_{x\to 1-}x^2$에서

$-2+C_1=1 \quad \therefore C_1=3$ ··· ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x\geq 1)\\ x^2 & (-1\leq x<1)\\ 2x+3 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(-2)+f(2)=(-4+3)+(-4+3)=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	배점
❶ 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	2점
❷ C_1, C_2, C_3의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(-2)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0816

유형 11 부정적분과 극값

|전략| 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$에서 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 함을 이용한다.

(1) $f(x)=\int(3x^2-9x+6)dx=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$

(2) $f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···	2	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=1-\frac{9}{2}+6+C=C+\frac{5}{2}$

또, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=8-18+12+C=C+2$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$\left(C+\frac{5}{2}\right)(C+2)<0$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 적분상수 C의 값의 범위는 $-\frac{5}{2}<C<-2$이다.

답 (1) $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$

(2) 극댓값: $C+\frac{5}{2}$, 극솟값: $C+2$ (3) $-\frac{5}{2}<C<-2$

채점 기준	배점
(1) $f'(x)$의 부정적분을 적분상수 C를 사용하여 나타낼 수 있다.	3점
(2) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 적분상수 C를 사용하여 나타낼 수 있다.	3점
(3) 주어진 조건을 만족시키는 적분상수 C의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

0817

|전략| 조건 (가)와 (나)의 두 식을 변끼리 더하고,

$\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]=\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}$

임을 이용한다.

조건 (가)와 (나)의 두 식을 변끼리 더하면

$\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}=3x^2-2x+1$

이때

$\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]=\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}$

이므로

$\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]=3x^2-2x+1$ ····· ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 적분하면

$x\{F(x)+G(x)\}=x^3-x^2+x+C$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

즉, $x\{F(x)+G(x)\}=x^3-x^2+x=x(x^2-x+1)$이므로

$F(x)+G(x)=x^2-x+1$ ····· ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=2x-1$

$\therefore f(2)+g(2)=4-1=3$ 답 3

0818

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

$f'(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to-2+}3x^2=\lim_{x\to-2-}(ax+b)$에서 $-2a+b=12$ ····· ㉠

$\lim_{x\to2+}(ax+b)=\lim_{x\to2-}3x^2$에서 $2a+b=12$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=12$

$f'(x)=\begin{cases}12 & (x\geq2)\\ 3x^2 & (-2<x<2)\\ 12 & (x\leq-2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}12x+C_1 & (x\geq2)\\ x^3+C_2 & (-2<x<2)\\ 12x+C_3 & (x\leq-2)\end{cases}$

이때 $f(0)=1$에서 $C_2=1$

$f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 미분가능하므로 $x=-2$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-2+}(x^3+1)=\lim_{x\to-2-}(12x+C_3)$에서

$-7=-24+C_3$ $\therefore C_3=17$

또, $\lim_{x\to2+}(12x+C_1)=\lim_{x\to2-}(x^3+1)$에서

$24+C_1=9$ $\therefore C_1=-15$

$\therefore f(x)=\begin{cases}12x-15 & (x\geq2)\\ x^3+1 & (-2<x<2)\\ 12x+17 & (x\leq-2)\end{cases}$

한편, $|f(x)|=9$에서

(i) $x\leq-2$일 때

$|12x+17|=9$, $12x+17=-9$ ($\because x\leq-2$)

$12x=-26$ $\therefore x=-\frac{13}{6}$

(ii) $-2<x<2$일 때

$|x^3+1|=9$

이때 $-2<x<2$에서 위의 등식을 만족시키는 x의 값은 없다.

(iii) $x\geq2$일 때

$|12x-15|=9$, $12x-15=9$ ($\because x\geq2$)

$12x=24$ $\therefore x=2$

따라서 (i)~(iii)에서 방정식 $|f(x)|=9$의 모든 실근의 합은

$-\frac{13}{6}+2=-\frac{1}{6}$ 답 $-\frac{1}{6}$

0819

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용한다.

조건 (가)의 $f'(-x)=-f'(x)$에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=-f'(0)$ $\therefore f'(0)=0$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$

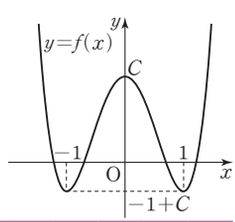
즉, 조건 (가)에서 $f'(-1)=-f'(1)=0$

이때 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

따라서 $f'(x)=4x(x+1)(x-1)=4x^3-4x$이므로

$f(x)=\int(4x^3-4x)dx=x^4-2x^2+C$

한편, 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극솟값 $-1+C$를 갖고 $x=0$에서 극댓값 C를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



x	···	-1	···	0	···	1	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 조건 (다)에서

$g(k)=\begin{cases}2 & (k>C)\\ 3 & (k=C)\\ 4 & (-1+C<k<C)\\ 2 & (k=-1+C)\\ 0 & (k<-1+C)\end{cases}$

즉, $\lim_{k\to17+}g(k)-\lim_{k\to17-}g(k)=4$에서

$\lim_{k\to17+}g(k)=4$, $\lim_{k\to17-}g(k)=0$이므로

$-1+C=17$ $\therefore C=18$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $C=18$이다. 답 ④

0820

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=-6, x=2$에서 미분가능함을 이용하여 $f'(x)$를 찾고 부정적분을 이용한다.

함수 $g(x)$가 $x=-6$, $x=2$에서 미분가능하면 $x=-6$, $x=2$에서 연속이므로 $g(-6)=a, g(2)=a$에서

$|f(-6)|=|f(2)|=a$ ····· ㉠

또, $x=-6$, $x=2$에서 미분가능하므로 $g'(-6)=0, g'(2)=0$에서

$f'(-6)=0, f'(2)=0$

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.

$\therefore f'(x)=-3(x+6)(x-2)=-3x^2-12x+36$

$f(x)=\int(-3x^2-12x+36)dx=-x^3-6x^2+36x+C$

이때

$f(-6)=216-216-216+C=-216+C$,

$f(2)=-8-24+72+C=40+C$

이므로 ㉠에서 $|-216+C|=|40+C|$

$216-C=40+C$ $\therefore C=88$

x	···	-6	···	2	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-6)=-216+C=-216+88=-128$ 답 ④

참고 • $x<-6$, $x>2$에서 함수 $g(x)$는 상수함수이므로 $x=-6$, $x=2$에서의 미분계수는 0이어야 한다.

• $-216+C<40+C$이므로 $|-216+C|=|40+C|$에서 $-216+C<0$, $40+C>0$이다. 즉, $216-C=40+C$이다.

0821

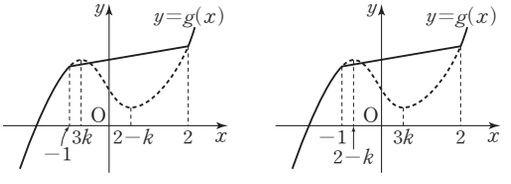
|전략| 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 항상 증가하거나 항상 감소해야 함을 이용한다.

$f'(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\le-1$ 또는 $x\ge2$인 범위에서는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이고, $-1<x<2$인 범위에서는 두 점 $(-1, f(-1))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 일부이다.

따라서 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le2$에서만 극값을 가져야 하고 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$f'(x)=3(x-3k)(x-2+k)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=3k$ 또는 $x=2-k$

$-1\le3k\le2$에서 $-\frac{1}{3}\le k\le\frac{2}{3}$, $-1\le2-k\le2$에서 $0\le k\le3$

$\therefore 0\le k\le\frac{2}{3}$ ····· ㉠

또, $-1<x<2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선이어야 한다.

$\therefore f(2)-f(-1)>0$

$f(x)=\int3(x-3k)(x-2+k)dx$

$=\int\{3x^2-6(k+1)x+9k(2-k)\}dx$

$=x^3-3(k+1)x^2+9k(2-k)x+C$

이므로

$f(2)-f(-1)=\{8-12(k+1)+18k(2-k)+C\}$

$-\{-1-3(k+1)-9k(2-k)+C\}$

$=-27k^2+45k=-9k(3k-5)>0$

$9k(3k-5)<0$ $\therefore 0<k<\frac{5}{3}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\le\frac{2}{3}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{2}{3}$이므로 $\alpha+\beta=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

참고 • $x<-1$ 또는 $x>2$인 범위에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지면 함수 $g(x)$에서 증가와 감소가 바뀌는 점이 생기므로 실수 전체의 집합에서 증가할 수 없다.

• 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우, 즉 $3k=2-k$에서 $k=\frac{1}{2}$일 때

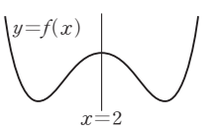
$f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 이 경우에도 주어진 조건을 만족시킨다.

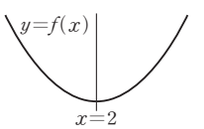
0822

|전략| 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 사차함수의 그래프의 개형을 그려보고 극솟값과 최솟값의 관계를 이용하여 함수식을 세운다.

조건 (가)에 의하여 사차함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]이다.



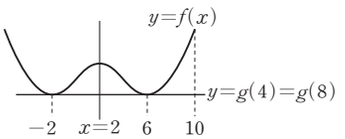
[그림 1]



[그림 2]

조건 (나)에 의하여 닫힌구간 $[2, 6]$에서 닫힌구간 $[6, 10]$까지, 즉 $2\le x\le10$에서 길이가 4인 임의의 닫힌구간에서의 함수 $f(x)$의 최솟값이 닫힌구간 $[2, 6]$에서의 함수 $f(x)$의 최솟값과 같아야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]이어야 하고 [그림 3]과 같이 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 극솟값을 가져야 한다.



[그림 3]

이때 함수 $f(x)$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $x=2$에서 극댓값을 갖고, $x=-2$ 또는 $x=6$에서 극솟값을 갖는다.

즉, 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$f'(x)=4(x+2)(x-2)(x-6)=4x^3-24x^2-16x+96$

$\therefore f(x)=\int(4x^3-24x^2-16x+96)dx$

$=x^4-8x^3-8x^2+96x+C$

이때 $f(-1)=-45$이므로

$1+8-8-96+C=-45$ $\therefore C=50$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3-8x^2+96x+50$이므로

$f(1)=1-8-8+96+50=131$ 답 131

8 정적분

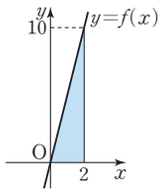
본책 128~145쪽

STEP 1 개념 마스터

0823

정적분 $\int_0^2 5x\,dx$의 값은 함수 $f(x)=5x$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$\int_0^2 5x\,dx=\frac{1}{2}\times 2\times 10=10$ 답 10

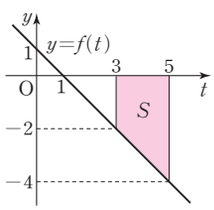


0824

함수 $f(t)=-t+1$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=3$, $t=5$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 정적분 $\int_3^5(-t+1)dt$의 값은 $-S$이므로

$\int_3^5(-t+1)dt=-S$

$=-\left\{\frac{1}{2}\times(2+4)\times 2\right\}=-6$ 답 −6



0825

$\int_1^1(6x-1)dx=0$ 답 0

0826

$\int_3^0(2x-4)dx=-\int_0^3(2x-4)dx$

함수 $f(x)=2x-4$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형에서 x축 위쪽, 아래쪽에 있는 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 정적분 $\int_0^3(2x-4)dx$의 값은 S_1-S_2이다.

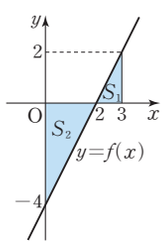
이때

$S_1=\frac{1}{2}\times(3-2)\times 2=1$, $S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$

이므로

$\int_0^3(2x-4)dx=S_1-S_2=1-4=-3$

$\therefore \int_3^0(2x-4)dx=-(-3)=3$ 답 3



0827

$\frac{d}{dx}\int_1^x\left(\frac{1}{3}t+2\right)dt=\frac{1}{3}x+2$ 답 $\frac{1}{3}x+2$

0828

$\frac{d}{dx}\int_{-3}^x(t+3)(t^2+t-1)dt$

$=(x+3)(x^2+x-1)$

$=x^3+4x^2+2x-3$ 답 x^3+4x^2+2x-3

0829

$\int_{-2}^1(3x^2+2x)dx=\left[x^3+x^2\right]_{-2}^1$

$=(1+1)-(-8+4)=6$ 답 6

0830

$\int_0^2(t^3-2t+1)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-t^2+t\right]_0^2$

$=(4-4+2)-0=2$ 답 2

0831

$\int_{-1}^2(x+2)(3x-2)dx=\int_{-1}^2(3x^2+4x-4)dx$

$=\left[x^3+2x^2-4x\right]_{-1}^2$

$=(8+8-8)-(-1+2+4)=3$ 답 3

0832

$\int_3^1(-3x^2+2x)dx=\left[-x^3+x^2\right]_3^1$

$=(-1+1)-(-27+9)=18$ 답 18

0833

$\int_0^2(2+x)^3dx+\int_0^2(2-x)^3dx$

$=\int_0^2\{(2+x)^3+(2-x)^3\}dx=\int_0^2(12x^2+16)dx$

$=\left[4x^3+16x\right]_0^2=(32+32)-0=64$ 답 64

0834

$\int_1^4(2x-x^2)dx+\int_1^4(2y+y^2)dy$

$=\int_1^4(2x-x^2)dx+\int_1^4(2x+x^2)dx$

$=\int_1^4\{(2x-x^2)+(2x+x^2)\}dx$

$=\int_1^4 4x\,dx=\left[2x^2\right]_1^4$

$=32-2=30$ 답 30

0835

$\int_{-1}^1(x^2+x+1)dx+\int_1^{-1}(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^1(x^2+x+1)dx-\int_{-1}^1(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^1\{(x^2+x+1)-(x^2-x)\}dx$

$=\int_{-1}^1(2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_{-1}^1$

$=(1+1)-(1-1)=2$ 답 2

0836

$\int_{-1}^1(2x+3)dx+\int_1^2(2x+3)dx$

$=\int_{-1}^2(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_{-1}^2$

$=(4+6)-(1-3)=12$ 답 12

0837

$$\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_2^1(-x^2+2x)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2x)dx-\int_1^2(-x^2+2x)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^2(x^2-2x)dx$$
$$=\int_0^2(x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}-4\right)-0=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

0838

$$\int_{-1}^2(1+2x-x^3)dx-\int_3^2(1+2y-y^3)dy$$
$$=\int_{-1}^2(1+2x-x^3)dx-\int_3^2(1+2x-x^3)dx$$
$$=\int_{-1}^2(1+2x-x^3)dx+\int_2^3(1+2x-x^3)dx$$
$$=\int_{-1}^3(1+2x-x^3)dx=\left[x+x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^3$$
$$=\left(3+9-\frac{81}{4}\right)-\left(-1+1-\frac{1}{4}\right)=-8$$

답 -8

0839

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0(-2x)\,dx+\int_0^2 3x\,dx$$
$$=\left[-x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=1+6=7$$

답 7

0840

$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$이므로

$$\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 1

0841

$|x(x+1)|=\begin{cases} x^2+x & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -x^2-x & (-1<x<0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^2|x(x+1)|dx=\int_{-1}^0(-x^2-x)dx+\int_0^2(x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{14}{3}=\frac{29}{6}$$

답 $\frac{29}{6}$

0842

$$\int_{-1}^1(3x^2+4x)dx=\int_{-1}^1 3x^2dx+\int_{-1}^1 4x\,dx$$
$$=2\int_0^1 3x^2dx+0=2\left[x^3\right]_0^1=2\times 1=2$$

답 2

0843

$$\int_{-2}^2(x^2+x+1)dx=\int_{-2}^2(x^2+1)dx+\int_{-2}^2 x\,dx$$
$$=2\int_0^2(x^2+1)dx+0=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{14}{3}=\frac{28}{3}$$

답 $\frac{28}{3}$

0844

$$\int_{-1}^1(t^3+5t^2-2t)dt=\int_{-1}^1(t^3-2t)dt+\int_{-1}^1 5t^2\,dt$$
$$=0+2\int_0^1 5t^2\,dt=2\left[\frac{5}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

0845

$$\int_3^{-3}(x^3-2x^2+x-5)dx$$
$$=-\int_{-3}^3(x^3-2x^2+x-5)dx$$
$$=-\int_{-3}^3(x^3+x)dx+\int_{-3}^3(2x^2+5)dx$$
$$=-0+2\int_0^3(2x^2+5)dx=2\left[\frac{2}{3}x^3+5x\right]_0^3$$
$$=2\times 33=66$$

답 66

0846

$$\int_{-2}^2(3x+1)(x-2)dx=\int_{-2}^2(3x^2-5x-2)dx$$
$$=\int_{-2}^2(3x^2-2)dx-\int_{-2}^2 5x\,dx$$
$$=2\int_0^2(3x^2-2)dx-0=2\left[x^3-2x\right]_0^2$$
$$=2\times 4=8$$

답 8

0847

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 최소의 양수가 2이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

답 2

0848

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_{-2}^{\boxed{0}} f(x)dx=\int_{\boxed{6}}^8 f(x)dx$$

답 0, 6

0849

한 주기의 정적분의 값은 항상 같으므로

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0850

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=3\int_{0}^{2} f(x)dx=3\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=3\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=3\times\frac{4}{3}=4$$

답 4

0851

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-3$

답 $f(x)=3x^2+10x-3$

0852

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=4x^3+9x^2=x(4x^2+9x)$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=4x^2+9x$

답 $f(x)=4x^2+9x$

0853

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x$

또, 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=1-2+a,\ 0=-1+a$

$\therefore a=1$

답 $f(x)=3x^2-4x,\ a=1$

0854

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+1)f(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=4(x^2-x+1)=4x^2-4x+4$

또, 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$\int_{-2}^{-2}(t+1)f(t)dt=16-8+a,\ 0=8+a$

$\therefore a=-8$

답 $f(x)=4x^2-4x+4,\ a=-8$

0855

$f(t)=2t^2+t+1$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(2t^2+t+1)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=1$$

답 1

0856

$f(t)=t^2-t+3$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^2-t+3)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=5$$

답 5

STEP 2 유형 마스터

유형 01 미적분의 기본정리 개념 03

(1) 미적분의 기본정리: 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

→ 위끝과 아래끝의 대소에 관계없이 항상 성립한다.

(2) $a\geq b$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 정의

① $a=b$일 때, $\int_a^a f(x)dx=0$

② $a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

0857

$$\int_2^2(2x-5)(x^2+1)dx-\int_2^{-1}(2y+1)(3y-1)dy$$
$$=0+\int_{-1}^{2}(6y^2+y-1)dy$$
$$=\left[2y^3+\frac{1}{2}y^2-y\right]_{-1}^{2}=\frac{33}{2}$$

답 $\frac{33}{2}$

0858

$$\int_1^a(4x-3)dx=\Big[2x^2-3x\Big]_1^a=2a^2-3a+1$$

즉, $2a^2-3a+1=3$이므로

$2a^2-3a-2=0,\ (2a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 정수)

답 2

0859

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2+2ax)dx$$
$$=\Big[2x^3+ax^2\Big]_0^1=2+a$$

이때 $f(1)=6+2a$이므로

$2+a=6+2a \qquad \therefore a=-4$

답 ①

0860

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ ($\because \alpha<\beta$)

$$\therefore \int_\alpha^\beta(3x^2+2x-1)dx$$
$$=\Big[x^3+x^2-x\Big]_\alpha^\beta$$
$$=(\beta^3+\beta^2-\beta)-(\alpha^3+\alpha^2-\alpha)$$
$$=(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)-(\beta-\alpha)$$
$$=\{(\beta-\alpha)^3+3\beta\alpha(\beta-\alpha)\}+(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)$$
$$=\{(\sqrt{5})^3+3\times 1\times\sqrt{5}\}+3\times\sqrt{5}-\sqrt{5}$$
$$=(5\sqrt{5}+3\sqrt{5})+3\sqrt{5}-\sqrt{5}$$
$$=10\sqrt{5}$$

답 ⑤

0861

두 함수 $F(x), G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $C=-2$ $\therefore G(x)=F(x)-2$ … ❶

조건 (나)에서 $F(3)=10$이므로

$G(3)=F(3)-2=10-2=8$ … ❷

$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx=\Big[G(x)\Big]_{-1}^{3}=G(3)-G(-1)$

$=8-4=4$ … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)와 두 함수 $F(x), G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분임을 이용하여 두 함수 사이의 관계식을 얻어낼 수 있다.	40 %
❷ $F(3)=10$임을 이용하여 $G(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분임을 이용하여 $\int_{-1}^{3} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)라 하면 조건 (가)에서

$F(1)=G(1)+2$ $\therefore C=2$

즉, $F(x)=G(x)+2$이고 $G(-1)=4$이므로

$F(-1)=4+2=6$

$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{-1}^{3}=F(3)-F(-1)=10-6=4$

유형 02 미적분의 기본정리의 활용 개념 03

정적분의 식이 주어지면 미적분의 기본정리를 이용하여 정적분의 값을 미정계수를 포함한 식으로 나타낸 다음 주어진 조건에 맞게 식을 세워 푼다.

0862

$\int_{0}^{2}(-3x^2+4kx+4)dx=\Big[-x^3+2kx^2+4x\Big]_{0}^{2}=8k$

즉, $8k<16$이므로 $k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 1

0863

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 만나는 세 점의 x좌표가 -2, 0, 1이므로

$f(x)-g(x)=ax(x+2)(x-1)$ (a는 상수, $a\neq 0$)이라 하자.

$\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{2}ax(x+2)(x-1)dx$

$=\int_{0}^{2}(ax^3+ax^2-2ax)dx$

$=\Big[\frac{a}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3-ax^2\Big]_{0}^{2}$

$=\frac{8}{3}a$

조건 (나)에서 $\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=8$이므로

$\frac{8}{3}a=8$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)-g(x)=3x(x+2)(x-1)$이므로

$f(-1)-g(-1)=3\times(-1)\times 1\times(-2)=6$ 답 6

0864

조건 (가)의 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$1+a+b+c=0$ $\therefore c=-a-b-1$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\Big\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\Big\}=\frac{1}{2}f'(1)=2$

$\therefore f'(1)=4$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$3+2a+b=4$ $\therefore 2a+b=1$ …… ㉡

조건 (나)에서

$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\Big]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=-\frac{1}{4}$

$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=-\frac{1}{2}$, $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-a-b-1=-\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore 4a+3b=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

또, $a=3$, $b=-5$를 ㉠에 대입하면 $c=1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-5x+1$이므로

$f(-3)=-27+27+15+1=16$ 답 16

유형 03 정적분의 계산 – 실수배, 합, 차의 정적분 개념 04

두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) $\int_{a}^{b} kf(x)dx=k\int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_{a}^{b}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{a}^{b} g(x)dx$

(3) $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{a}^{b} f(x)dx-\int_{a}^{b} g(x)dx$

0865

$\int_{1}^{2}(3x-1)^2dx+\int_{1}^{2}(6x+3)dx=\int_{1}^{2}\{(3x-1)^2+(6x+3)\}dx$

$=\int_{1}^{2}(9x^2+4)dx$

$=\Big[3x^3+4x\Big]_{1}^{2}=25$ 답 25

0866

$\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+1}dx-\int_{1}^{0}\frac{1}{t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1}\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2-x+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{0}^{1}=\frac{5}{6}$ 답 ②

0867

$\int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}dx=9$ ····· ㉠

$\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=-5$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$\int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}dx=4$

$\int_{-2}^{2}2f(x)dx=4,\ 2\int_{-2}^{2}f(x)dx=4$

$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx=2$

㉠−㉡을 하면

$\int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)\}dx=14$

$\int_{-2}^{2}2g(x)dx=14,\ 2\int_{-2}^{2}g(x)dx=14$

$\therefore \int_{-2}^{2}g(x)dx=7$

$\therefore \int_{-2}^{2}\{5f(x)+3g(x)\}dx=5\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}g(x)dx$

$=5\times2+3\times7=31$ 답 31

0868

$f(k)=\int_{1}^{3}(x+k)^2dx-\int_{3}^{1}(2x^2+1)dx$

$=\int_{1}^{3}(x+k)^2dx+\int_{1}^{3}(2x^2+1)dx$

$=\int_{1}^{3}\{(x+k)^2+(2x^2+1)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(3x^2+2kx+k^2+1)dx$

$=\left[x^3+kx^2+(k^2+1)x\right]_{1}^{3}$

$=2k^2+8k+28$

$=2(k+2)^2+20$

즉, 함수 $f(k)$는 $k=-2$일 때 최솟값 20을 갖는다.

따라서 $a=-2,\ b=20$이므로

$a+b=-2+20=18$ 답 ④

유형 04 정적분의 계산 – 나누어진 구간에서의 정적분 개념 04

함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

⇨ $\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx$

0869

$\int_{4}^{3}(3x^2-2x)dx-\int_{3}^{2}(3x^2+2x-8)dx+\int_{2}^{4}(3x^2-2x)dx$

$=\int_{2}^{4}(3x^2-2x)dx+\int_{4}^{3}(3x^2-2x)dx-\int_{3}^{2}(3x^2+2x-8)dx$

$=\int_{2}^{3}(3x^2-2x)dx+\int_{2}^{3}(3x^2+2x-8)dx$

$=\int_{2}^{3}(6x^2-8)dx$

$=\left[2x^3-8x\right]_{2}^{3}=30$ 답 30

0870

$\int_{0}^{3}(6x+5)dx-\int_{a}^{3}(6t+5)dt=\int_{0}^{3}(6x+5)dx+\int_{3}^{a}(6x+5)dx$

$=\int_{0}^{a}(6x+5)dx=\left[3x^2+5x\right]_{0}^{a}$

$=3a^2+5a$

즉, $3a^2+5a=22$이므로 $3a^2+5a-22=0$

$(3a+11)(a-2)=0$ $\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ④

0871

$\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$

$=-\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$

$=-B+A+C=A-B+C$ 답 $A-B+C$

0872

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{3}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{-2}^{3}f(x)dx$

$=4-3+7=8$

$\therefore \int_{0}^{3}\{3x^2-f(x)\}dx=\int_{0}^{3}3x^2dx-\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=\left[x^3\right]_{0}^{3}-8=27-8=19$ 답 ④

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분 개념 05

함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\geq c)\\ h(x) & (x<c)\end{cases}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a<c<b$

일 때 ⇨ $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}h(x)dx+\int_{c}^{b}g(x)dx$

0873

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(2x+3)dx+\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx$

$=\left[x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[-x^3+3x\right]_{0}^{1}=2+2=4$ 답 4

0874

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서 $b=4$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서 $-3+a=4$이므로 $a=7$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-3x^2+7 & (x\geq1)\\ 4 & (0\leq x<1)\\ 2x+4 & (x<0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{1}4dx+\int_{1}^{3}(-3x^2+7)dx$

$=\left[x^2+4x\right]_{-1}^{0}+\left[4x\right]_{0}^{1}+\left[-x^3+7x\right]_{1}^{3}$

$=3+4+(-12)=-5$ 답 −5

0875

$f(x)=\begin{cases}-x^2 & (x\ge 0)\\ -2x & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(x-2)=\begin{cases}-(x-2)^2 & (x\ge 2)\\ -2x+4 & (x<2)\end{cases}$ (x 대신 $x-2$를 대입)

$$\therefore \int_1^3 f(x-2)dx=\int_1^2(-2x+4)dx+\int_2^3\{-(x-2)^2\}dx$$
$$=\int_1^2(-2x+4)dx+\int_2^3(-x^2+4x-4)dx$$
$$=\Big[-x^2+4x\Big]_1^2+\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\Big]_2^3$$
$$=1+\Big(-\frac{1}{3}\Big)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0876

조건 (나)에서 $f'(x)=\begin{cases}-2 & (x>0)\\ 6x+4 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-2x+C_1 & (x>0)\\ 3x^2+4x+C_2 & (x<0)\end{cases}$ … ❶

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$에서 $C_1=C_2=1$ ($\because$ 조건 (가))

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x\ge 0)\\ 3x^2+4x+1 & (x<0)\end{cases}$이므로 … ❷

$$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0(3x^2+4x+1)dx+\int_0^3(-2x+1)dx$$
$$=\Big[x^3+2x^2+x\Big]_{-1}^0+\Big[-x^2+x\Big]_0^3$$
$$=0+(-6)=-6$$ … ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-1}^3 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0877

$f(x)=\begin{cases}3 & (x\ge 1)\\ 3x & (x<1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3(x+2)f(x)dx=\int_0^1 3x(x+2)dx+\int_1^3 3(x+2)dx$$
$$=\int_0^1(3x^2+6x)dx+\int_1^3(3x+6)dx$$
$$=\Big[x^3+3x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{3}{2}x^2+6x\Big]_1^3$$
$$=4+24=28$$

답 ③

0878

$a>0$이므로

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_{-a}^0(x^2+4x-1)dx+\int_0^a(2x-1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+2x^2-x\Big]_{-a}^0+\Big[x^2-x\Big]_0^a$$
$$=\Big(\frac{1}{3}a^3-2a^2-a\Big)+(a^2-a)=\frac{1}{3}a^3-a^2-2a$$

즉, $\frac{1}{3}a^3-a^2-2a=\frac{4}{3}a$이므로 $a^3-3a^2-10a=0$

$a(a+2)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=5$ ($\because a>0$)

답 ③

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분 개념 05

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누고 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

0879

$3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$에서

$|3x^2-2x-1|=\begin{cases}3x^2-2x-1 & \left(x\le -\frac{1}{3}\text{ 또는 }x\ge 1\right)\\ -3x^2+2x+1 & \left(-\frac{1}{3}<x<1\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2|3x^2-2x-1|dx$$
$$=\int_0^1(-3x^2+2x+1)dx+\int_1^2(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_0^1+\Big[x^3-x^2-x\Big]_1^2=1+3=4$$

답 4

0880

$x^3-x^2=x^2(x-1)$에서

$|x^3-x^2|=\begin{cases}x^3-x^2 & (x\ge 1)\\ -x^3+x^2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2|x^3-x^2|dx=\int_0^1(-x^3+x^2)dx+\int_1^2(x^3-x^2)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{17}{12}=\frac{3}{2}$$

답 ①

0881

$0\le a\le 3$일 때, $|x-a|=\begin{cases}x-a & (a\le x\le 3)\\ -x+a & (0\le x<a)\end{cases}$이므로

$$f(a)=\int_0^3|x-a|dx=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^3(x-a)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+ax\Big]_0^a+\Big[\frac{1}{2}x^2-ax\Big]_a^3$$
$$=\frac{1}{2}a^2+\Big(\frac{1}{2}a^2-3a+\frac{9}{2}\Big)=a^2-3a+\frac{9}{2}=\Big(a-\frac{3}{2}\Big)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $f(a)$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

0882

$2x^2-4x=2x(x-2)$에서

$|2x^2-4x|=\begin{cases}2x^2-4x & (x\le 0\text{ 또는 }x\ge 2)\\ -2x^2+4x & (0<x<2)\end{cases}$

이때 $a>2$이므로

$$\int_0^a|2x^2-4x|dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx+\int_2^a(2x^2-4x)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\Big]_0^2+\Big[\frac{2}{3}x^3-2x^2\Big]_2^a$$
$$=\frac{8}{3}+\Big(\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}\Big)=\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{16}{3}$$

즉, $\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{16}{3}=16$이므로 $a^3-3a^2-16=0$

$(a-4)(a^2+a+4)=0$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a$는 실수)

답 ②

0883

$f(x)=|x^2-4|, g(x)=x+1$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$

$=|(x+1)^2-4|=|x^2+2x-3|$

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$에서

$(f\circ g)(x)=\begin{cases} x^2+2x-3 & (x\le -3 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2-2x+3 & (-3<x<1) \end{cases}$이므로

$\int_{-3}^{3}(f\circ g)(x)dx=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx+\int_{1}^{3}(x^2+2x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{1}^{3}$

$=\frac{32}{3}+\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$ 답 ③

0884

$f(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$에서

$x<-1$일 때

$f(x)=-(x-1)-x-(x+1)=-3x$

$-1\le x<0$일 때

$f(x)=-(x-1)-x+(x+1)=-x+2$

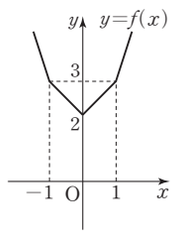
$0\le x<1$일 때

$f(x)=-(x-1)+x+(x+1)=x+2$

$x\ge 1$일 때

$f(x)=(x-1)+x+(x+1)=3x$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 2를 가지므로

$a=2$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x+2)dx+\int_1^2 3x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=7$ 답 7

유형 07 $\int_a^b f'(x)dx$를 포함한 식의 계산 개념 03

닫힌구간 $[a, b]$에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여

$\int_a^b f'(x)dx=\left[f(x)\right]_a^b=f(b)-f(a)$

0885

$\int_{-1}^{2}\{2f'(x)-3x^2\}dx=\left[2f(x)-x^3\right]_{-1}^{2}$

$=\{2f(2)-8\}-\{2f(-1)+1\}$

$=2f(2)-7\ (\because f(-1)=-1)$

즉, $2f(2)-7=5$이므로

$2f(2)=12 \quad \therefore f(2)=6$ 답 6

0886

$y=f(x)$의 그래프에서 $f(3)=0, f(0)=-5$이므로

$\int_0^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^3=f(3)-f(0)$

$=0-(-5)=5$ 답 ⑤

0887

$\int_{-2}^{0}f'(x)dx=\int_{0}^{1}f'(x)dx=0$에서

$\left[f(x)\right]_{-2}^{0}=\left[f(x)\right]_{0}^{1}=0$

즉, $f(0)-f(-2)=f(1)-f(0)=0$이므로

$f(-2)=f(0)=f(1)=k$ (k는 상수)라 하면 … ❶

$f(x)=x(x+2)(x-1)+k=x^3+x^2-2x+k$ … ❷

따라서 $f'(x)=3x^2+2x-2$이므로

$f'(2)=12+4-2=14$ … ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ $\int_{-2}^{0}f'(x)dx=\int_{0}^{1}f'(x)dx=0$을 이용하여 $f(-2)=f(0)=f(1)$임을 알아낼 수 있다.	40 %
❷ $f(0)=k$라 하면 $f(x)=x^3+x^2-2x+k$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0888

$y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값 -16, $x=1$에서 극댓값 11을 가지므로

$f(-2)=-16, f(1)=11, f'(-2)=f'(1)=0$

또, 함수 $f(x)$는 $-2<x<1$에서 증가하고, $x<-2$ 또는 $x>1$에서 감소하므로 $-2\le x\le 1$에서 $f'(x)\ge 0$이고 $x<-2$ 또는 $x>1$에서 $f'(x)<0$이다.

따라서 $|f'(x)|=\begin{cases} -f'(x) & (x<-2 \text{ 또는 } x>1) \\ f'(x) & (-2\le x\le 1) \end{cases}$이므로

$\int_{-2}^{2}|f'(x)|dx=\int_{-2}^{1}f'(x)dx+\int_{1}^{2}\{-f'(x)\}dx$

$=\left[f(x)\right]_{-2}^{1}-\left[f(x)\right]_{1}^{2}$

$=f(1)-f(-2)-\{f(2)-f(1)\}$

$=11-(-16)-0+11=38$ 답 ④

유형 08 $\int_{-a}^{a}x^n dx$의 계산 – 피적분함수가 주어진 경우 개념 05

정적분 $\int_{-a}^{a}x^n\,dx$의 계산

(1) n이 짝수일 때, $\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_{0}^{a}x^n\,dx$

(2) n이 홀수일 때, $\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$

0889

$\int_{-a}^{3}(2x^3+x^2-2x)dx+\int_{3}^{a}(2x^3+x^2-2x)dx$

$=\int_{-a}^{a}(2x^3+x^2-2x)dx=2\int_{0}^{a}x^2dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=2\times\frac{1}{3}a^3=\frac{2}{3}a^3$

즉, $\frac{2}{3}a^3=\frac{16}{3}$이므로

$a^3=8 \quad \therefore a=2\ (\because a\text{는 실수})$ 답 2

0890

$$\int_{-3}^{3}\{f(x)\}^2dx=\int_{-3}^{3}(2x+3)^2dx=\int_{-3}^{3}(4x^2+12x+9)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(4x^2+9)dx=2\left[\frac{4}{3}x^3+9x\right]_0^3$$
$$=2\times63=126$$
$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x+3)dx=2\int_{0}^{1}3\,dx$$
$$=2\left[3x\right]_0^1=2\times3=6$$

즉, $\int_{-3}^{3}\{f(x)\}^2dx=k\left\{\int_{-1}^{1}f(x)dx\right\}^3$에서 $126=k\times6^3$이므로

$216k=126 \quad \therefore k=\frac{7}{12}$ 답 ④

0891

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+5x^4+\cdots+99x^{98})dx$$
$$=2\left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{99}\right]_0^1$$
$$=2\times(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50개})$$
$$=2\times50=100$$ 답 100

0892

$$\int_{-a}^{a}(2x^3+6x^2-x-a)dx=2\int_{0}^{a}(6x^2-a)dx=2\left[2x^3-ax\right]_0^a$$
$$=2\times(2a^3-a^2)=4a^3-2a^2$$

즉, $4a^3-2a^2=a+1$이므로

$4a^3-2a^2-a-1=0$, $(a-1)(4a^2+2a+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수) 답 1

유형 09 $\int_{-a}^{a}x^n dx$의 계산 – 피적분함수가 주어지지 않은 경우 개념 05

(1) $f(-x)=f(x)$일 때 → $f(x)$는 우함수

⇨ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

(2) $f(-x)=-f(x)$일 때 → $f(x)$는 기함수

⇨ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

0893

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고

$(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)$, $(-x)^5f(-x)=-x^5f(x)$이므로

$x^3f(x)$, $x^5f(x)$는 모두 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}(x^5-x^3+3)f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}x^5f(x)dx-\int_{-2}^{2}x^3f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=3\int_{-2}^{2}f(x)dx=3\times2\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=6\int_{0}^{2}f(x)dx=6\times7=42$$ 답 42

Lecture

일반적으로 우함수와 기함수를 연산하면 다음이 성립한다.

① (우함수)×(우함수) ⇨ (우함수)

② (기함수)×(기함수) ⇨ (우함수)

③ (우함수)×(기함수) ⇨ (기함수)

0894

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.

따라서 함수 $f(x)$는 기함수이고, 기함수를 미분한 함수는 우함수이므로 $f'(x)$는 우함수이다.

(차수가 홀수인 항으로만 이루어진 함수를 미분하면 차수가 짝수인 항 또는 상수항으로만 이루어진 함수가 된다.)

$$\therefore \int_{-3}^{3}f'(x)dx=2\int_{0}^{3}f'(x)dx$$
$$=2\left[f(x)\right]_0^3=2\{f(3)-f(0)\}$$
$$=2\times3=6$$ 답 ⑤

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.

따라서 $f(-3)=-3$이므로

$\int_{-3}^{3}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-3}^{3}=f(3)-f(-3)=3-(-3)=6$

0895

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $x^2f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^2+5x-6)f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+5\int_{-1}^{1}xf(x)dx-6\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=5\int_{-1}^{1}xf(x)dx=5\times2\int_{0}^{1}xf(x)dx$$
$$=10\int_{0}^{1}xf(x)dx=10\times2=20$$ 답 20

0896

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=5$ … ❶

또, 조건 (나)에서 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx=20$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=10$ … ❷

$$\therefore \int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx$$
$$=5+10=15$$ … ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{0}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{0}^{3}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-1}^{3}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0897

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-2}^{5}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx=\int_{2}^{5}f(x)dx$$
$$=\int_{2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$$
$$=-(-3)+k=k+3$$

이때 $\int_{-2}^{5}f(x)dx=4k-1$이므로

$4k-1=k+3$ $\therefore k=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0898

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, 우함수를 미분한 함수는 기함수이므로 $f'(x)$는 기함수이다.

따라서 $x^2f'(x)$는 기함수, $xf'(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3}f'(x)(2x^2+3x-3)dx$$
$$=2\int_{-3}^{3}x^2f'(x)dx+3\int_{-3}^{3}xf'(x)dx-3\int_{-3}^{3}f'(x)dx$$
$$=3\int_{-3}^{3}xf'(x)dx=3\times2\int_{0}^{3}xf'(x)dx$$
$$=6\int_{0}^{3}xf'(x)dx=6\times2=12$$ 답 12

0899

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수, $g(-x)=g(x)$에서 $g(x)$는 우함수이므로 $f(x)g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-a}^{a}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_{-a}^{a}g(x)dx+\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}g(x)dx=2\int_{0}^{a}g(x)dx=2\times3=6$$ 답 6

0900

사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=4ax^3+2bx$

이때 $f(0)=5$이므로 $c=5$

또, $f'(-1)=0$이므로

$-4a-2b=0$ $\therefore b=-2a$

따라서 $f(x)=ax^4-2ax^2+5$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}(ax^4-2ax^2+5)dx$$
$$=2\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{2a}{3}x^3+5x\right]_0^1=-\frac{14}{15}a+10$$

즉, $-\frac{14}{15}a+10=-4$이므로

$-\frac{14}{15}a=-14$ $\therefore a=15$

따라서 $f(x)=15x^4-30x^2+5$이므로

$f(1)=15-30+5=-10$ 답 -10

유형 10 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수의 정적분 개념 05

함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ (p는 0이 아닌 실수)일 때

(1) $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np}f(x)dx$ (단, n은 정수)

(2) $\int_{a}^{a+p}f(x)dx=\int_{b}^{b+p}f(x)dx$

(3) $\int_{a}^{a+np}f(x)dx=n\int_{0}^{p}f(x)dx$ (단, n은 정수)

0901

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx$$

이때 $f(x)=-x^2+1$ ($-1\le x\le1$)이 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$\therefore \int_{0}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx$$
$$=5\int_{0}^{1}f(x)dx=5\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=5\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$ 답 $\frac{10}{3}$

0902

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=2\times8=16$$

조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-4}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{8}f(x)dx$$
$$=\int_{8}^{12}f(x)dx$$
$$\therefore \int_{-4}^{12}f(x)dx=4\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=4\times16=64$$ 답 64

0903

$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+2 & (1\le x<2)\\ 6x^2-2x & (0\le x<1)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(6x^2-2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[2x^3-x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$$
$$=1+\frac{11}{4}=\frac{15}{4}$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{4}f(x)dx=\cdots=\int_{18}^{20}f(x)dx$$
$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx=\cdots=\int_{-20}^{-18}f(x)dx$$
$$\therefore \int_{-20}^{20}f(x)dx=20\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=20\times\frac{15}{4}=75$$ 답 75

0904

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다. … ❶

조건 (다)에서

$$\int_{-1}^{1}(x+4)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}4f(x)dx$$
$$=4\int_{-1}^{1}f(x)dx=16$$

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=4$ … ❷

조건 (나)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-8}^{-6}f(x)dx=\cdots=\int_{10}^{12}f(x)dx$$

$\therefore \int_{-8}^{12}f(x)dx=10\int_{-1}^{1}f(x)dx=10\times4=40$ … ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 우함수이고 $xf(x)$는 기함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\int_{-1}^{1}f(x)dx=4$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-8}^{12}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 11 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간이 상수인 경우 개념 06

$f(x)=g(x)+\int_{a}^{b}f(t)dt$ (a, b는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

(i) $\int_{a}^{b}f(t)dt=k$ (k는 상수)라 한다.

(ii) $f(x)=g(x)+k$를 $\int_{a}^{b}f(t)dt=k$에 대입하여 k의 값을 구한다.

0905

$\int_{0}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2-2x+k$

$f(t)=3t^2-2t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(3t^2-2t+k)dt=k$, $\left[t^3-t^2+kt\right]_{0}^{2}=k$

$8-4+2k=k$ $\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로

$f(1)=3-2-4=-3$ 답 −3

0906

$f(x)=x^2+\int_{0}^{1}(2x+1)f(t)dt$

$=x^2+2x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=x^2+2kx+k$

$f(t)=t^2+2kt+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(t^2+2kt+k)dt=k$, $\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+kt\right]_{0}^{1}=k$

$\frac{1}{3}+2k=k$ $\therefore k=-\frac{1}{3}$

따라서 $\int_{0}^{1}f(t)dt=-\frac{1}{3}$이므로

$\int_{1}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{3}$ 답 ④

0907

$\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=x^2-2x+k$

$f(t)=t^2-2t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(t^3-2t^2+kt)dt=k$, $\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{0}^{1}=k$

$\frac{k}{2}-\frac{5}{12}=k$ $\therefore k=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$f(3)=9-6-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$ 답 ①

0908

$\int_{0}^{2}tf'(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=x^3+3kx^2+4x$이므로 $f'(x)=3x^2+6kx+4$

$f'(t)=3t^2+6kt+4$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(3t^3+6kt^2+4t)dt=k$, $\left[\frac{3}{4}t^4+2kt^3+2t^2\right]_{0}^{2}=k$

$12+16k+8=k$ $\therefore k=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+4x$이므로

$f(-1)=-1-4-4=-9$ 답 −9

0909

$\int_{1}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=\frac{12}{7}x^2-2kx+k^2$

$f(t)=\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2$을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{2}\left(\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2\right)dt=k$, $\left[\frac{4}{7}t^3-kt^2+k^2t\right]_{1}^{2}=k$

$4-3k+k^2=k$, $(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

$\therefore 10\int_{1}^{2}f(x)dx=10k=10\times2=20$ 답 20

0910

$\int_{0}^{1}g(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면 $f(x)=2x+1-a$

$\int_{0}^{2}f(t)dt=b$ (b는 상수)라 하면 $g(x)=4x-3+b$

$\int_{0}^{1}g(t)dt=\int_{0}^{1}(4t-3+b)dt=\left[2t^2-3t+bt\right]_{0}^{1}=-1+b$

즉, $-1+b=a$이므로 $a-b=-1$ …… ㉠

$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}(2t+1-a)dt=\left[t^2+t-at\right]_{0}^{2}=6-2a$

즉, $6-2a=b$이므로 $2a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

따라서

$f(x)=2x+1-\frac{5}{3}=2x-\frac{2}{3}$, $g(x)=4x-3+\frac{8}{3}=4x-\frac{1}{3}$

이므로 $f(1)+g(2)=\frac{4}{3}+\frac{23}{3}=9$ 답 9

유형 12 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간에 변수가 있는 경우

개념 06

$\int_a^x f(t)dt=g(x)$ (a는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

(1) 등식의 양변에 $x=a$를 대입한다. ⇨ $g(a)=0$

(2) 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다. ⇨ $f(x)=g'(x)$

0911

$\int_a^x f(t)dt=x^2-x+1-a$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^2-a+1-a$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

또, $\int_1^x f(t)dt=x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-1$

$\therefore f(a)=f(1)=2-1=1$ 답 ①

0912

$\int_1^x f(t)dt=x^3+2ax^2-3x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=1+2a-3$

$2a-2=0$ $\therefore a=1$

또, $\int_1^x f(t)dt=x^3+2x^2-3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4x-3$

$\therefore f(2)=12+8-3=17$ 답 17

0913

$f(x)=\int_{-1}^x (t^2-5t+6)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로 … ❶

$|f'(x)|=\begin{cases}(x-2)(x-3) & (x\le 2 \text{ 또는 } x\ge 3)\\ -(x-2)(x-3) & (2<x<3)\end{cases}$ … ❷

$\therefore \lim_{x\to 2+}\frac{|f'(x)|}{x-2}+\lim_{x\to 3+}\frac{|f'(x)|}{x-3}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{-(x-2)(x-3)}{x-2}+\lim_{x\to 3+}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 2+}\{-(x-3)\}+\lim_{x\to 3+}(x-2)$

$=1+1=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\|f'(x)\|$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 극한값을 구할 수 있다.	40 %

0914

$\int_{-1}^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^4+ax-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\int_{-1}^{-1} \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=1-a-3$

$-a-2=0$ $\therefore a=-2$

한편, $\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로 ㉠에서

$\int_{-1}^x f'(t)dt=x^4-2x-3$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=4x^3-2$

$\therefore f'(2)=32-2=30$ 답 30

0915

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면 $\int_0^x f(t)dt=-x^3+\frac{9}{4}kx^2-k^2x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-3x^2+\frac{9}{2}kx-k^2$

$f(t)=-3t^2+\frac{9}{2}kt-k^2$을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2\left(-3t^2+\frac{9}{2}kt-k^2\right)dt=k$, $\left[-t^3+\frac{9}{4}kt^2-k^2t\right]_0^2=k$

$-8+9k-2k^2=k$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

따라서 $f(x)=-3x^2+9x-4$이므로

$f(1)=-3+9-4=2$ 답 ③

0916

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=8-12+\int_2^2 f(t)dt$

$2f(2)=-4$ $\therefore f(2)=-2$

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2-6x$ $\therefore f'(x)=3x-6$

$\therefore f(x)=\int(3x-6)dx=\frac{3}{2}x^2-6x+C$

이때 $f(2)=-2$이므로 $6-12+C=-2$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+4$이므로

$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2\left(\frac{3}{2}x^2-6x+4\right)dx=2\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2+4\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^3+4x\right]_0^2=2\times 12=24$ 답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+4$이므로 $f(-2)=6+12+4=22$

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-2f(-2)=-8-12+\int_2^{-2} f(t)dt$

$\therefore \int_{-2}^2 f(t)dt=-20+2f(-2)=24$

유형 13 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간에 변수만 있는 경우

개념 06

$\int_x^{x+a} f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)의 양변을 x에 대하여 미분한다.

⇨ $f(x+a)-f(x)=g'(x)$

0917

$f(x)=\int_x^{x+2}(t^2+2t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+2)^2+2(x+2)\}-(x^2+2x)$

$=4x+8$

$\therefore \int_0^3 xf'(x)dx=\int_0^3(4x^2+8x)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3+4x^2\right]_0^3=72$ 답 72

0918

$f(x)=\int_{x-1}^{x}(3t^2-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(3x^2-x)-\{3(x-1)^2-(x-1)\}$

$=6x-4$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6-4=2$ 답 2

0919

$f(x)=\int_x^{x+1} t^3dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

$\therefore f(x)=\int(3x^2+3x+1)dx=x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$

이때 $f(-1)=-\frac{1}{4}$이므로

$-1+\frac{3}{2}-1+C=-\frac{1}{4}$ $\therefore C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}$이므로

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx$

$=2\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^1=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0920

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=\int_{x-2}^{x}(t^3-3t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(x^3-3x)-\{(x-2)^3-3(x-2)\}$

$=6x^2-12x+2=6(x-1)^2-4$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$ab=1\times(-4)=-4$ 답 ②

유형 14 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 경우

개념 06

$\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$ (a는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

(1) 등식의 양변에 $x=a$를 대입한다. ⇨ $g(a)=0$

(2) $\int_a^x (x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 다음 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다. ⇨ $\int_a^x f(t)dt=g'(x)$

0921

$\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)dt=2x^3+x^2-8x-7$에서

$x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}tf(t)dt=2x^3+x^2-8x-7$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+2x-8$

$\therefore \int_{-1}^{x}f(t)dt=6x^2+2x-8$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=12x+2$

$\therefore f(-2)=-24+2=-22$ 답 -22

0922

$3\int_1^x(x-t)f(t)dt=-xf(x)+3x^3-x$에서

$3x\int_1^x f(t)dt-3\int_1^x tf(t)dt=-xf(x)+3x^3-x$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-f(1)+3-1$ $\therefore f(1)=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3\int_1^x f(t)dt+3xf(x)-3xf(x)=-f(x)-xf'(x)+9x^2-1$에서

$3\int_1^x f(t)dt=-f(x)-xf'(x)+9x^2-1$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-f(1)-f'(1)+9-1$ $\therefore f'(1)=6$ ($\because f(1)=2$) 답 6

0923

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+bx+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2+bx+1$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$ $\therefore a+b=-2$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2ax+b$ ····· ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3+2a+b$ $\therefore 2a+b=-3$ ····· ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=6x+2a=6x-2$

$\therefore a+b+f(2)=-1+(-1)+10=8$ 답 8

0924

$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\frac{1}{2}x^3+3x^2$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}x^3+3x^2$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\frac{3}{2}x^2+6x$

$\therefore \int_0^x f'(t)dt=\frac{3}{2}x^2+6x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x+6$

$\therefore f(x)=\int(3x+6)\,dx=\frac{3}{2}x^2+6x+C$

이때 $f(0)=\frac{3}{2}$이므로 $C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{3}{2}$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}+6+\frac{3}{2}=9$ 답 ⑤

다른 풀이 $\int_0^x f'(t)dt=\frac{3}{2}x^2+6x$에서

$\int_0^x f'(t)dt=\left[f(t)\right]_0^x=f(x)-f(0)$이므로

$f(x)-f(0)=\frac{3}{2}x^2+6x$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+6x+f(0)=\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{3}{2}\left(\because f(0)=\frac{3}{2}\right)$

이므로 $f(1)=\frac{3}{2}+6+\frac{3}{2}=9$

발전 유형 15 정적분으로 정의된 함수의 극대와 극소 개념 06

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$ (a는 상수)와 같이 정의된 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같이 구한다.

(i) 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다. ⇨ $f'(x)=g(x)$

(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

⇨ ① $f'(x)$의 부호가 양 → 음이면 극대

② $f'(x)$의 부호가 음 → 양이면 극소

0925

$f(x)=\int_0^x (3t^2+2at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 -9를 가지므로

$f'(3)=0,\ f(3)=-9$

$f'(3)=0$에서

$27+6a+b=0 \quad \therefore 6a+b=-27$ ····· ㉠

$f(3)=-9$에서

$\int_0^3 (3t^2+2at+b)dt=\left[t^3+at^2+bt\right]_0^3$

$=27+9a+3b=-9$

$9a+3b=-36 \quad \therefore 3a+b=-12$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=3$

$\therefore b-a=3-(-5)=8$ 답 8

0926

$f(x)=\int_{-3}^x (t^2+3t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···	-1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=-1$에서 극소이므로

$M=f(-2)=\int_{-3}^{-2}(t^2+3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t\right]_{-3}^{-2}=\frac{5}{6}$

$m=f(-1)=\int_{-3}^{-1}(t^2+3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t\right]_{-3}^{-1}=\frac{2}{3}$

$\therefore M+m=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0927

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=2x^3-24x+a$ ($F(x)$는 사차함수)

$f'(x)=6x^2-24=6(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···	2	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값에 대하여 (극댓값)×(극솟값)<0 ($f(-2)f(2)<0$)이어야 한다.

즉, $f(-2)=-16+48+a=a+32,\ f(2)=16-48+a=a-32$이므로

$(a+32)(a-32)<0 \quad \therefore -32<a<32$

따라서 구하는 정수 a의 개수는

$32-(-32)-1=63$ 답 ②

0928

$g(x)=\int_{-2}^x (t-1)f'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-1)f'(x)$ ····· ㉠

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서만 극값을 가지므로 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.

즉, $g'(x)$는 $x+1$과 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다. ($g'(x)=a(x+1)(x-1)^2$ (a는 상수)) ····· ㉡

이때 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$\therefore g(0)=\int_{-2}^0 3(t+1)(t-1)^2dt=\int_{-2}^0(3t^3-3t^2-3t+3)dt$ ($g(x)=\int_{-2}^x (t-1)f'(t)dt=\int_{-2}^x 3(t+1)(t-1)^2dt$에 $x=0$ 대입)

$=\left[\frac{3}{4}t^4-t^3-\frac{3}{2}t^2+3t\right]_{-2}^0=-8$ 답 ③

참고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

발전 유형 16 정적분으로 정의된 함수의 최대와 최소 개념 06

$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$, $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} g(t)dt=g(x+a)-g(x)$,
$\int_a^b g(t)dt$는 상수임을 이용하여 정적분으로 정의된 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0929

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^2-3t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2-3(x+1)\}-(x^2-3x)$

$=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{-1}^{0}=\frac{11}{6}$

$f(1)=\int_1^2(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^2=-\frac{13}{6}$

$f(2)=\int_2^3(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_2^3=-\frac{7}{6}$

따라서 $-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{11}{6}$, 최솟값은 $-\frac{13}{6}$이므로 구하는 합은

$\frac{11}{6}+\left(-\frac{13}{6}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0930

$f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(1)=\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_0^1(1-t)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 1

0931

$f(x)=3x^2+1+6\int_0^1 xf(t)dt$

$=3x^2+1+6x\int_0^1 f(t)dt$

이때 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+6kx+1$이므로

$\int_0^1(3t^2+6kt+1)dt=k$, $\left[t^3+3kt^2+t\right]_0^1=k$

$3k+2=k$ $\therefore k=-1$

$\therefore f(x)=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다. 답 ②

0932

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^3+x^2+5$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-2+1+5$ $\therefore f(1)=-4$

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^3+x^2+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x$ $\therefore f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C$

이때 $f(1)=-4$이므로

$3-2+C=-4$ $\therefore C=-5$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-5=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$이므로

$f(x)$의 최솟값은 $-\frac{16}{3}$이다. 답 ③

발전 유형 17 정적분으로 정의된 함수와 그래프 개념 06

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (a는 상수)에 대하여 함수 $y=F(x)$ 또는 $y=f(x)$의 그래프가 주어질 때

(i) 그래프로부터 $F(x)$ 또는 $f(x)$의 식을 구한다.

(ii) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

0933

주어진 그래프에서 $F(1)=F(2)=0$이므로

$F(x)=k(x-1)(x-2)=k(x^2-3x+2)$ ($k>0$)라 하자.

$\int_1^x f(t)dt=k(x^2-3x+2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=k(2x-3)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,-3)$을 지나므로

$-3=-k$ $\therefore k=3$

따라서 $f(x)=3(2x-3)$이므로

$f(3)=3\times 3=9$ 답 ③

0934

주어진 그래프에서 $f(0)=f(2)=0$이므로

$f(x)=x(x-2)=x^2-2x$ … ❶

$g(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+2)-f(x)$

$=\{(x+2)^2-2(x+2)\}-(x^2-2x)=4x$ … ❷

$g'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$g(0)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (t^2-2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^2=-\frac{4}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 그래프에서 $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $g'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 함수 $g(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0935

주어진 그래프에서 $f(0)=f(2)=f(4)=0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-4)=x^3-6x^2+8x$

$g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=x(x-2)(x-4)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$g(2)=\int_{-2}^{2} f(t)dt=\int_{-2}^{2} (t^3-6t^2+8t)dt$$
$$=2\int_0^2 (-6t^2)dt=2\left[-2t^3\right]_0^2$$
$$=2\times(-16)=-32$$

답 ②

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 극한 (1) 개념 06

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 할 때

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(a+x)-F(a)}{x}$
$=F'(a)=f(a)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+kx} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(a+kx)-F(a)}{kx}\times k$
$=kF'(a)=kf(a)$

0936

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}=F'(2)=f(2)$$
$$=4-6+5=3$$

답 ③

0937

$f(t)=3t^3-t^2+7$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-1}^{-1+4x}(3t^3-t^2+7)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-1}^{-1+4x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(-1+4x)-F(-1)}{4x}\times 4$$
$$=4F'(-1)=4f(-1)$$
$$=4\times(-3-1+7)=12$$

답 ①

0938

$f(t)=6t^2-4t+3$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+2x}(6t^2-4t+3)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+2x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{F(1+2x)-F(1)\}-\{F(1-x)-F(1)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1)}{2x}\times 2+\lim_{x\to 0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}$$
$$=2F'(1)+F'(1)=3F'(1)=3f(1)$$
$$=3\times(6-4+3)=15$$

답 ⑤

0939

$f'(x)=6x^2+2x-1$이므로

$f(x)=\int(6x^2+2x-1)dx=2x^3+x^2-x+C$

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$

즉, $f(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-x+4$이므로

$f(3)=54+9-3+4=64$

답 64

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한 (2) 개념 06

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 할 때

⇨ $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$
$=F'(a)=f(a)$

0940

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$$
$$=8-8+6+4=10$$

답 ②

0941

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)$$

즉, $f(1)=2$이므로

$1+1-4+a=2 \quad \therefore a=4$

답 ④

0942

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4}\int_{-2}^{x} f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{F(x)-F(-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{F(x)-F(-2)}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}F'(-2)=-\frac{1}{4}f(-2)$$

$$=-\frac{1}{4}\times(-8+16+10+2)=-5$$ 답 ②

0943

$g(x)=\int_0^{x-1}(t-2)f(t)dt$라 하면 $g(1)=0$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-3)f(x-1)$ …… ㉠

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_0^{x-1}(t-2)f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\ (\because g(1)=0)$$

$$=g'(1)=-2f(0)\ (\because ㉠)$$

$$=-2\times(-3)=6$$ 답 ③

STEP 3 내신 마스터

0944

유형 01 미적분의 기본정리 + 03 정적분의 계산 – 실수배, 합, 차의 정적분

|전략| $f(x)-g(x)=x(x-3)^2$임을 이용한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 원점에서 만나고, $x=3$일 때 접하므로 $h(x)$는 x와 $(x-3)^2$을 인수로 갖는다. 또, $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(x)=x(x-3)^2$

따라서

$$g(x)=f(x)-h(x)=f(x)-x(x-3)^2$$

$$=f(x)-(x^3-6x^2+9x)$$

이므로

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\{f(x)-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2(x^3-6x^2+9x)dx$$

$$=11-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^2=11-6=5$$ 답 ①

0945

유형 02 미적분의 기본정리의 활용

|전략| 조건 ㈎에 주어진 식을 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

조건 ㈎에서 $\int f(x)dx=\{f(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2f(x)f'(x)$

이때 조건 ㈏에 의하여 $f(x)\neq 0$이므로 $f'(x)=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+C\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+Cx\right]_0^2=1+2C$$

즉, 조건 ㈏에서 $1+2C=15$이므로 $C=7$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x+7$이므로

$f(4)=2+7=9$ 답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 상수, n은 자연수, $a\neq 0$)이라 하면 조건 ㈎의 $\int f(x)dx=\{f(x)\}^2$에서 좌변의 최고차항은

$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$이고 우변의 최고차항은 a^2x^{2n}이므로

$\frac{a}{n+1}=a^2$, $n+1=2n$ $\therefore n=1$, $a=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x+b$ (b는 상수)라 하면 조건 ㈏에서

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+b\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+bx\right]_0^2=1+2b$$

$1+2b=15$ $\therefore b=7$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x+7$이므로 $f(4)=2+7=9$

0946

유형 03 정적분의 계산 – 실수배, 합, 차의 정적분

|전략| $k\int_a^b f(x)dx=\int_a^b kf(x)dx$ (k는 실수),

$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

$$3\int_2^k(x+1)dx-\int_2^k(-x+5)dx$$

$$=\int_2^k\{3(x+1)-(-x+5)\}dx=\int_2^k(4x-2)dx$$

$$=\left[2x^2-2x\right]_2^k=2k^2-2k-4=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=\frac{1}{2}$일 때 최소이다. 답 ④

0947

유형 04 정적분의 계산 – 나누어진 구간에서의 정적분

|전략| $\int_{10}^{11} f(x)dx=\int_0^{11} f(x)dx-\int_0^{10} f(x)dx$임을 이용한다.

조건 ㈏에서

$$\int_n^{n+2} f(x)dx=\int_n^{n+1}2x\,dx=\left[x^2\right]_n^{n+1}$$

$$=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

이므로

$$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$$

$$+\int_6^8 f(x)dx+\int_8^{10} f(x)dx$$

$$=1+5+9+13+17=45$$

또, 조건 ㈎에서 $\int_0^1 f(x)dx=2$이므로

$$\int_0^{11} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx$$

$$+\int_5^7 f(x)dx+\int_7^9 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$$

$$=2+3+7+11+15+19=57$$

$$\therefore \int_{10}^{11} f(x)dx=\int_0^{11} f(x)dx-\int_0^{10} f(x)dx$$

$$=57-45=12$$ 답 ②

0948

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

|전략| $x=\frac{a}{2}$를 기준으로 구간을 나누고,

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$0\le a\le 8$일 때, $|2x-a|=\begin{cases} 2x-a & \left(\frac{a}{2}\le x\le 4\right) \\ -2x+a & \left(0\le x<\frac{a}{2}\right) \end{cases}$ 이므로

$$f(a)=\int_0^4|2x-a|dx=\int_0^{\frac{a}{2}}(-2x+a)dx+\int_{\frac{a}{2}}^4(2x-a)dx$$
$$=\left[-x^2+ax\right]_0^{\frac{a}{2}}+\left[x^2-ax\right]_{\frac{a}{2}}^4=\frac{1}{4}a^2+\left(\frac{1}{4}a^2-4a+16\right)$$
$$=\frac{1}{2}a^2-4a+16=\frac{1}{2}(a-4)^2+8$$

따라서 함수 $f(a)$의 최솟값은 $a=4$일 때 8이다. 답 ⑤

0949

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

|전략| α, β의 값의 범위를 찾고 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-12x+12$라 하면

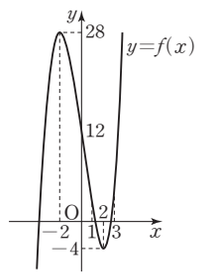
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(1)=1, f(2)=-4, f(3)=3$이므로

$1<\alpha<2<\beta<3$ ····· ㉠

또, α, β는 방정식 $x^3-12x+12=0$의 실근이므로

$\alpha^3-12\alpha=-12, \beta^3-12\beta=-12$ ····· ㉡

한편, $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+4 & (-2<x<2) \end{cases}$ 이므로

$$\int_\alpha^\beta|x^2-4|dx=\int_\alpha^2(-x^2+4)dx+\int_2^\beta(x^2-4)dx\ (\because ㉠)$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_\alpha^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^\beta$$
$$=\left(\frac{\alpha^3}{3}-4\alpha+\frac{16}{3}\right)+\left(\frac{\beta^3}{3}-4\beta+\frac{16}{3}\right)$$
$$=\frac{\alpha^3-12\alpha}{3}+\frac{\beta^3-12\beta}{3}+\frac{32}{3}$$
$$=-4+(-4)+\frac{32}{3}\ (\because ㉡)$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 ③

Lecture

사잇값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0950

유형 07 $\int_a^b f'(x)dx$를 포함한 식의 계산

|전략| 닫힌구간 $[a, b]$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$\int_a^b f'(x)dx=\left[f(x)\right]_a^b=f(b)-f(a)$임을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(2)=f(3)=6$을 만족시키므로

$f(x)-6=a(x-1)(x-2)(x-3)\ (a\ne 0)$이라 하면

$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+6$

이때 $f(0)=0$이므로

$-6a+6=0$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+6$이므로

$$\int_0^4 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^4=f(4)-f(0)$$
$$=3\times 2\times 1+6=12$$

답 ⑤

0951

유형 09 $\int_{-a}^a x^n dx$의 계산 – 피적분함수가 주어지지 않은 경우

|전략| $f(-x)=f(x)$이면 $f(x)$는 우함수이고, $f'(x)$는 기함수임을 이용한다.

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $f'(x)$는 기함수이고

$x^2f'(x)$는 기함수, $xf'(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^2\{(6x^2+x)f'(x)+f(x)\}dx$$
$$=6\int_{-2}^2 x^2f'(x)dx+\int_{-2}^2 xf'(x)dx+\int_{-2}^2 f(x)dx$$
$$=2\int_0^2 xf'(x)dx+2\int_0^2 f(x)dx$$
$$=2\int_0^2\{xf'(x)+f(x)\}dx$$

이때 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$$2\int_0^2\{xf'(x)+f(x)\}dx=2\int_0^2\{xf(x)\}'dx=2\left[xf(x)\right]_0^2$$
$$=2\times 2f(2)=2\times 2\times 4=16$$

답 ④

0952

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

+ 10 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수의 정적분

|전략| 함수 $g(x)$가 연속함수임을 이용해 a의 값을 찾고 $g(x+3)=g(x)$이면

$\int_p^q g(x)dx=\int_{p+3}^{q+3} g(x)dx$임을 이용한다.

함수 $g(x)$가 $x=0, x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$, $\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1-} g(x)=g(1)$

즉, $a=-f(1)+2, f(0)=a$ $\therefore a=0$

한편, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}$이고 조건 (가)에서

$-1\le x<0$일 때, $g(x)=-f(x+1)+2$이므로

$$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0\{-f(x+1)+2\}dx$$
$$=-\int_{-1}^0 f(x+1)dx+\int_{-1}^0 2\,dx$$
$$=-\int_0^1 f(x)dx+\left[2x\right]_{-1}^0=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$$

또, 조건 (가)에서 $1\le x<2$일 때, $g(x)=f(x-1)$이므로

$\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2 f(x-1)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}$

$0\le x\le 1$에서 $g(x)=0$이므로

$\int_0^1 g(x)dx=0$

따라서

$\int_{-1}^2 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$=\frac{2}{3}+0+\frac{4}{3}=2$

이고 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)=g(x)$이므로

$\int_{-4}^3 g(x)dx=\int_{-4}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx$

$=\int_{-1}^2 g(x)dx+\int_{-1}^2 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx$

$=2+2+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ 답 ③

0953

유형 11 정적분을 포함한 등식 - 적분 구간이 상수인 경우

|전략| 두 상수 p, q에 대하여 $\int_p^q f(t)dt$는 상수임을 이용한다.

$f(x)=x^2+\int_0^1 (x+t)f(t)dt$

$=x^2+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 tf(t)dt=b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+ax+b$

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (t^2+at+b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$

즉, $a=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$이므로

$6a=2+3a+6b$ $\therefore 3a-6b=2$ ····· ㉠

$\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 (t^3+at^2+bt)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$

즉, $b=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$이므로

$12b=3+4a+6b$ $\therefore 4a-6b=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5, b=-\frac{17}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-5x-\frac{17}{6}$이므로

$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6 \left(x^2-5x-\frac{17}{6}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{17}{6}x\right]_0^6$

$=-35$ 답 ①

0954

유형 11 정적분을 포함한 등식 - 적분 구간이 상수인 경우

|전략| 두 상수 p, q에 대하여 $\int_p^q f(t)dt$는 상수임을 이용한다.

조건 (가)에서 $\int_0^1 g(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+k$

이때 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=\int (3x^2+k)dx=x^3+kx+C$

즉, $g(2)=8+2k+C$이고

$\int_1^2 g(t)dt=\int_1^2 (t^3+kt+C)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{k}{2}t^2+Ct\right]_1^2$

$=\frac{15}{4}+\frac{3}{2}k+C$

조건 (나)에서 $(8+2k+C)-\left(\frac{15}{4}+\frac{3}{2}k+C\right)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{17}{4}+\frac{1}{2}k=\frac{1}{4}$ $\therefore k=-8$

$g(x)=x^3-8x+C$이므로

$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 (t^3-8t+C)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-4t^2+Ct\right]_0^1$

$=-\frac{15}{4}+C$

즉, $-8=-\frac{15}{4}+C$이므로 $C=-\frac{17}{4}$

따라서 $g(x)=x^3-8x-\frac{17}{4}$이므로

$g(-1)=-1+8-\frac{17}{4}=\frac{11}{4}$ 답 ④

0955

유형 12 정적분을 포함한 등식 - 적분 구간에 변수가 있는 경우

|전략| $f(x)=3x^2-x-2+\int_1^x g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)=6x-1+g(x)$임을 이용한다.

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=0$ ····· ㉠

$f(x)=3x^2-x-2+\int_1^x g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-1+g(x)$ $\therefore g(x)=f'(x)-6x+1$

따라서 다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)=f'(1)-6+1=-5$ ($\because$ ㉠) 답 ①

Lecture

나머지정리

① 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $P(a)$

② 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

0956

유형 14 정적분을 포함한 등식 - 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 경우

|전략| $\int_1^x (x+t)(x-t)f(t)dt = x^2\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt$로 변형한 다음 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_1^x (x+t)(x-t)f(t)dt = x^4-2x^2+a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-2+a \qquad \therefore a=1$

$$\int_1^x (x+t)(x-t)f(t)dt = \int_1^x (x^2-t^2)f(t)dt$$
$$= x^2\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt$$

이므로

$$x^2\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt = x^4-2x^2+1$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3-4x$$

$$2x\int_1^x f(t)dt = 4x^3-4x = 2x(2x^2-2)$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 2x^2-2$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x$

$\therefore f(a)=f(1)=4$

답 ②

0957

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분
+15 정적분으로 정의된 함수의 극대와 극소

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가지므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$임을 이용한다.

$g(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

함수 $g(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a+2=0 \qquad \therefore a=-4$

즉, $x\geq 1$일 때, $f(x)=2x^2-4x=2x(x-2)$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x\geq 1$)

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{1}{2}$	…	2	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$g(2)=\int_{-1}^2 f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^1 (-4t+2)dt + \int_1^2 (2t^2-4t)dt$$
$$=2\int_0^1 2\,dt + \int_1^2 (2t^2-4t)dt$$
$$=2\Big[2t\Big]_0^1 + \Big[\frac{2}{3}t^3-2t^2\Big]_1^2$$
$$=4+\Big(-\frac{4}{3}\Big)=\frac{8}{3}$$

답 ④

0958

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

|전략| $x\geq n$일 때와 $x<n$일 때로 나누어 $f(n)$을 구한다.

자연수 n에 대하여 $|n-x|=\begin{cases} -n+x & (x\geq n) \\ n-x & (x<n) \end{cases}$이므로

$$f(n)=\int_0^{2n}|n-x|dx=\int_0^n (n-x)dx+\int_n^{2n}(-n+x)dx$$
$$=\Big[nx-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^n+\Big[-nx+\frac{1}{2}x^2\Big]_n^{2n}$$
$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^2=n^2 \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)}{2}$$
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}k^2$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{15\times16\times31}{6}=620 \qquad \cdots ❷$$

답 620

채점 기준	배점
❶ $f(n)$을 n에 대한 식으로 정리할 수 있다.	4점
❷ $\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)}{2}$의 값을 구할 수 있다.	3점

Lecture

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^n k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0959

유형 12 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간에 변수가 있는 경우

|전략| 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 양변에 $x=0$을 대입하여 $\int_0^0 tf'(t)dt=0$임을 이용한다.

$$f(x)+\int_0^x tf'(t)dt=3x^4+12x-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+xf'(x)=12x^3+12$$
$$(x+1)f'(x)=12(x+1)(x^2-x+1)$$
$$\therefore f'(x)=12(x^2-x+1)=12x^2-12x+12 \qquad \cdots ❶$$

$$f(x)=\int(12x^2-12x+12)dx=4x^3-6x^2+12x+C \qquad \cdots ❷$$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$ $\cdots ❸$

따라서 $f(x)=4x^3-6x^2+12x-2$이므로

$f(1)=4-6+12-2=8$ $\cdots ❹$

답 8

채점 기준	배점
❶ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	2점
❸ 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하여 적분상수 C를 구할 수 있다.	1점
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0960

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 극한 (1) + 19 정적분으로 정의된 함수의 극한 (2)

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(0)$임을 이용한다.

$f(x)=3x^2+ax+b$에 대하여 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 조건 (가), (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)=-2$$

$\therefore b=-2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)=1$$

즉, $f(2)=4$이므로

$12+2a-2=4 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-3x-2$이므로 … ❶

$$\int_{-1}^{2}f(-x)dx=\int_{-1}^{2}(3x^2+3x-2)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}=\frac{15}{2}$$ … ❷

답 $\frac{15}{2}$

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $\int_{-1}^{2}f(-x)dx$의 값을 구할 수 있다.	2점

0961

유형 04 정적분의 계산 – 나누어진 구간에서의 정적분 + 08 $\int_{-a}^{a}x^n dx$의 계산 – 피적분함수가 주어진 경우

|전략| 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$이고

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=0$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(0)=-1$에서 $c=-1$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx-1)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2-1)dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3-x\right]_0^1=2\left(\frac{a}{3}-1\right)=\frac{2}{3}a-2$$

즉, $\frac{2}{3}a-2=0$이므로 $a=3$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2+bx-1)dx=\left[x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1=\frac{b}{2}$$

즉, $\frac{b}{2}=0$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로 $f(2)=12-1=11$

답 (1) 0 (2) 11

채점 기준	배점
(1) $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $f(x)$를 찾고 $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	6점

0962

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분 + 16 정적분으로 정의된 함수의 최대와 최소

|전략| $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$임을 이용한다.

(1) $g(a)=\int_{-a}^{a}f(x)dx$

$$=\int_{-a}^{0}(-4x-2)dx+\int_{0}^{a}(x^2-4x-2)dx$$
$$=\left[-2x^2-2x\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2-2x\right]_0^a$$
$$=(2a^2-2a)+\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2-2a\right)=\frac{1}{3}a^3-4a$$

(2) $g'(a)=a^2-4=(a+2)(a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

(3) $a>0$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	2	…
$g'(a)$		−	0	+
$g(a)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 $g(2)=\frac{8}{3}-8=-\frac{16}{3}$

답 (1) $g(a)=\frac{1}{3}a^3-4a$ (2) 2 (3) $-\frac{16}{3}$

채점 기준	배점
(1) $g(a)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	5점
(2) $g'(a)=0$인 a의 값을 구할 수 있다.	2점
(3) $g(a)$의 최솟값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

0963

|전략| $f(x)$의 값의 범위에 따른 함수 $(f\circ f)(x)=f(f(x))$를 구한다.

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}3-x & (1\le x\le 2)\\ x+1 & (0\le x\le 1)\end{cases}$

$0\le x\le 1$에서 $f(x)=x+1$이고 $1\le f(x)\le 2$이므로

$(f\circ f)(x)=f(x+1)=3-(x+1)=2-x$

$1\le x\le 2$에서 $f(x)=3-x$이고 $1\le f(x)\le 2$이므로

$(f\circ f)(x)=f(3-x)=3-(3-x)=x$

$\therefore (f\circ f)(x)=\begin{cases}x & (1\le x\le 2)\\ 2-x & (0\le x\le 1)\end{cases}$

$$\therefore \int_0^2(f\circ f)(x)dx=\int_0^1(2-x)dx+\int_1^2 x\,dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

답 ③

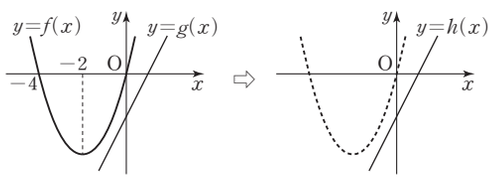
0964

|전략| 함수 $h(x)$가 극댓값을 가짐을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계를 파악한다.

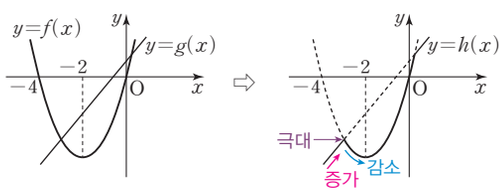
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+g(x)-\{f(x)-g(x)\}}{2} & (f(x)\geq g(x))\\ \dfrac{f(x)+g(x)+\{f(x)-g(x)\}}{2} & (f(x)<g(x))\end{cases}$$
$$=\begin{cases}g(x) & (f(x)\geq g(x))\\ f(x) & (f(x)<g(x))\end{cases}$$

이제 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형을 이용해 함수 $h(x)$를 찾아보자.

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서 만나는 경우



(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만나는 경우



(i), (ii)에서 함수 $h(x)$가 극댓값을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만나야 하고, 두 교점의 x좌표 중 작은 값이 -2보다 작아야 한다.

함수 $h(x)$가 극댓값 -3을 가지므로 $x^2+4x=-3$에서

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$ $\therefore x=-3$ ($\because x<-2$)

즉, 점 $(-3, -3)$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나야 하므로 $g(-3)=-3$에서

$-6+a=-3$ $\therefore a=3$

이때 $x^2+4x\geq 2x+3$에서 $x^2+2x-3\geq 0$

$(x+3)(x-1)\geq 0$ $\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$

따라서 $h(x)=\begin{cases}2x+3 & (x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ x^2+4x & (-3<x<1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{2}h(x)dx=\int_{-2}^{1}(x^2+4x)dx+\int_{1}^{2}(2x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{1}+\left[x^2+3x\right]_{1}^{2}$$
$$=-3+6=3$$

답 3

참고 함수 $g(x)=2x+a$는 모든 실수 x에서 증가하고, 함수 $f(x)=x^2+4x$는 $x\leq -2$에서 감소, $x\geq -2$에서 증가하므로 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지려면 (ii)의 그림과 같이 $a<-2$이어야 한다.

0965

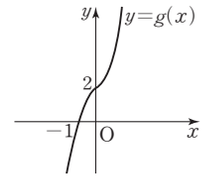
|전략| $x=0$을 기준으로 구간을 나누어 함수 $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$를 구하고 함수 $y=g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸다.

ㄱ. $g(0)=\int_{-1}^{0}f(t)dt=\int_{-1}^{0}(-2t+1)dt=\left[-t^2+t\right]_{-1}^{0}=2$ (참)

ㄴ. $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{0}(-2t+1)dt+\int_{0}^{x}(3t^2+1)dt & (x\geq 0)\\ \displaystyle\int_{-1}^{x}(-2t+1)dt & (x<0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x^3+x+2 & (x\geq 0)\\ -x^2+x+2 & (x<0)\end{cases}$$

즉, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)



ㄷ. $g(x)=4$에서 $x^3+x+2=4$

$x^3+x-2=0$, $(x-1)(x^2+x+2)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x$는 실수)

즉, $g(x)=4$를 만족시키는 실수 x의 값은 1뿐이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 ㄴ. $x<0$에서 $g'(x)=-2x+1$, $x>0$에서 $g'(x)=3x^2+1$

즉, 모든 실수 x에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다.

0966

|전략| $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(f(x))$, $\int_0^x f(t)dt$의 차수는 각각 n^2, $n+1$임을 이용한다.

$$f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

다항식 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(f(x))$, $\int_0^x f(t)dt$의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다.

이때 $n\geq 2$이면 ㉠의 좌변과 우변의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다. 그런데 $n^2=n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없으므로 $n<2$이다.

$\therefore n=1$

즉, $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하고 ㉠에 대입하면

$$a(ax+b)+b=\int_0^x(at+b)dt-x^2+3x+3$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a^2=ax+b-2x+3$ $\therefore (a-2)x-a^2+b+3=0$

$a-2=0$, $-a^2+b+3=0$ $\therefore a=2, b=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$f(1)=2+1=3$ 답 ①

0967

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능함을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

$$0\leq x<6\text{에서 } g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\leq x<1)\\ f(x-1)+1 & (1\leq x<2)\\ f(x-2)+2 & (2\leq x<3)\\ f(x-3)+3 & (3\leq x<4)\\ f(x-4)+4 & (4\leq x<5)\\ f(x-5)+5 & (5\leq x<6)\end{cases}$$

이때 함수 $g(x)$가 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1-}g(x)=g(1)$에서

$\lim_{x\to 1+}\{f(x-1)+1\}=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(0)+1$

$f(0)+1=f(1)$ $\therefore f(1)=1$ ($\because f(0)=0$) $\cdots\cdots ㉡$

또, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)+1-1}{x-1}\ (\because g(1)=1)$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=1\ (\because \text{조건 (나)})$$

$\therefore f'(0)=1$ ……㉡

한편, 조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 사차함수이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=-x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면 $f'(x)=-4x^3+3ax^2+2bx+c$

㉡에 의하여 $c=1$

㉠에 의하여 $-1+a+b+1=1$ $\therefore a+b=1$ ……㉢

$f'(1)=1$이므로 $-4+3a+2b+1=1$ $\therefore 3a+2b=4$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

따라서 $f(x)=-x^4+2x^3-x^2+x$이므로

$$\int_1^5 g(x)dx$$

$$=\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx+\int_4^5 g(x)dx$$

$$=\int_1^2\{f(x-1)+1\}dx+\int_2^3\{f(x-2)+2\}dx$$

$$+\int_3^4\{f(x-3)+3\}dx+\int_4^5\{f(x-4)+4\}dx$$

$$=\int_0^1\{f(x)+1\}dx+\int_0^1\{f(x)+2\}dx+\int_0^1\{f(x)+3\}dx$$

$$+\int_0^1\{f(x)+4\}dx$$

$$=\int_0^1\{4f(x)+10\}dx=\int_0^1(-4x^4+8x^3-4x^2+4x+10)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{5}x^5+2x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2+10x\right]_0^1=\frac{178}{15}$$ 답 $\frac{178}{15}$

0968

|전략| 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

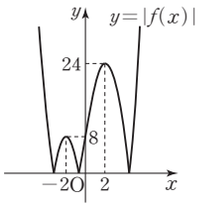
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗

즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-2\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $g(t)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}-f(t) & (0\le t\le2)\\ 8 & (-2\le t<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-t^3+12t+8 & (0\le t\le2)\\ 8 & (-2\le t<0)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^2 g(t)dt=\int_{-2}^0 8\,dt+\int_0^2(-t^3+12t+8)dt$$

$$=\left[8t\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}t^4+6t^2+8t\right]_0^2=16+36=52$$ 답 ⑤

9 정적분의 활용

본책 148~162쪽

STEP 개념 마스터

0969

곡선 $y=-x^2+4x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x-3=0$에서

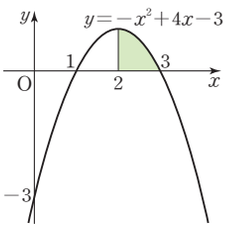
$-(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_2^3(-x^2+4x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_2^3=\frac{2}{3}$$ 답 $\frac{2}{3}$



0970

곡선 $y=x^3-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-6x=0$에서

$x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$

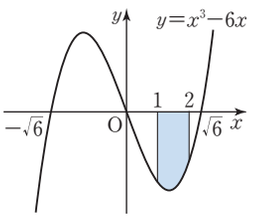
$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{6}$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2\{-(x^3-6x)\}dx$$

$$=\int_1^2(-x^3+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^2\right]_1^2=\frac{21}{4}$$ 답 $\frac{21}{4}$



0971

곡선 $y=x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=0$에서

$x(x+2)=0$

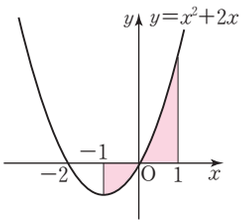
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0\{-(x^2+2x)\}dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2-2x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$ 답 2



0972

곡선 $y=x^3-3x+2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x+2=0$에서

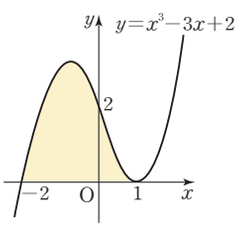
$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$ 답 $\frac{27}{4}$



0973

곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=0$에서

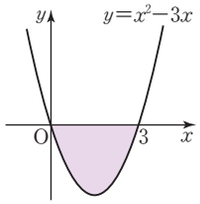
$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3\{-(x^2-3x)\}dx$

$=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$



답 $\frac{9}{2}$

0974

곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x=0$에서

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

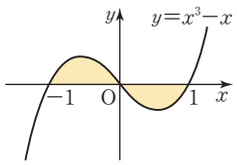
따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1\{-(x^3-x)\}dx$

$=\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1(-x^3+x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

0975

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+2=x-1$에서

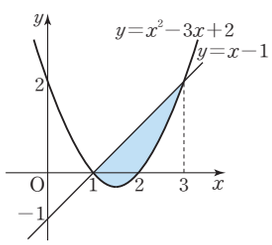
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3\{(x-1)-(x^2-3x+2)\}dx$

$=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$



답 $\frac{4}{3}$

0976

곡선 $y=x^3+2x^2-x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-x=-x$에서

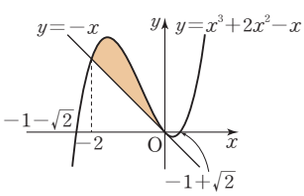
$x^3+2x^2=0$, $x^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^0\{(x^3+2x^2-x)-(-x)\}dx$

$=\int_{-2}^0(x^3+2x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^0=\frac{4}{3}$



답 $\frac{4}{3}$

0977

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

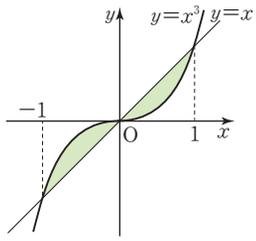
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1(x-x^3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

0978

두 곡선 $y=x^2-5x+4$, $y=-x^2+3x-2$의 교점의 x좌표는

$x^2-5x+4=-x^2+3x-2$에서

$2x^2-8x+6=0$, $2(x-1)(x-3)=0$

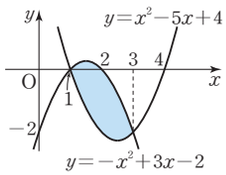
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3\{(-x^2+3x-2)-(x^2-5x+4)\}dx$

$=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3=\frac{8}{3}$



답 $\frac{8}{3}$

0979

두 곡선 $y=x^2+1$, $y=2x^2-x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2+1=2x^2-x+1$에서

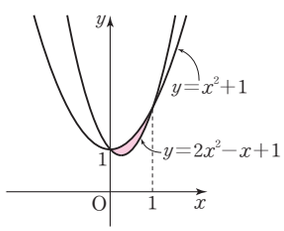
$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^1\{(x^2+1)-(2x^2-x+1)\}dx$

$=\int_0^1(-x^2+x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$



답 $\frac{1}{6}$

0980

두 곡선 $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-2=-x^2+2$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

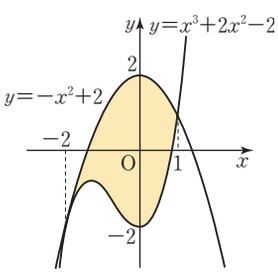
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^1\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$

$=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$



답 $\frac{27}{4}$

0981

함수 $f(x)=x^2\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^2=x$에서

$x^2-x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1(x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0982

함수 $f(x)=2x^2+1\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=1, f(1)=3$이므로 $g(1)=0, g(3)=1$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 S_1, S_2가 서로 같으므로

$$\int_1^3 g(x)dx=S_1=S_2$$

$$=1\times 3-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=3-\int_0^1(2x^2+1)dx$$

$$=3-\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0983

(1) $0+\int_0^3(4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=\frac{15}{2}$

(2) $\int_0^5(4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^5=\frac{15}{2}$

(3) $\int_0^5|4-t|dt=\int_0^4(4-t)dt+\int_4^5(-4+t)dt$

$$=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^4+\left[-4t+\frac{1}{2}t^2\right]_4^5$$

$$=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$$

답 (1) $\frac{15}{2}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) $\frac{17}{2}$

다른 풀이 (3) 넓이를 이용하여 구하면

$$\frac{1}{2}\times 4\times 4+\frac{1}{2}\times 1\times 1=8+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{17}{2}$$

0984

(1) $3+\int_0^2(-2t+4)dt=3+\left[-t^2+4t\right]_0^2=3+4=7$

(2) $\int_0^4(-2t+4)dt=\left[-t^2+4t\right]_0^4=0$

(3) $\int_0^4|-2t+4|dt=\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^4(2t-4)dt$

$$=\left[-t^2+4t\right]_0^2+\left[t^2-4t\right]_2^4$$

$$=4+4=8$$

답 (1) 7 (2) 0 (3) 8

다른 풀이 (3) 넓이를 이용하여 구하면

$$\frac{1}{2}\times 2\times 4+\frac{1}{2}\times 2\times 4=4+4$$

$$=8$$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1) 개념 01

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

(1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$이다. ⇨ $\int_a^b f(x)dx$

(2) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$이다. ⇨ $\int_a^b\{-f(x)\}dx$

0985

곡선 $y=2x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $2x^2-ax=0$에서

$x(2x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{a}{2}$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{a}{2}}(-2x^2+ax)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{24}a^3$$

즉, $\frac{1}{24}a^3=\frac{9}{8}$이므로

$a^3=27$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

0986

곡선 $y=|x^2-4|$와 x축의 교점의 x좌표는 $|x^2-4|=0$에서

$x^2-4=0,\ (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2|x^2-4|dx=\int_{-2}^2(-x^2+4)dx$$

$$=2\int_0^2(-x^2+4)dx$$

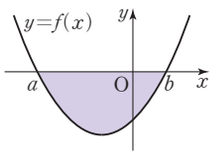
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$

$$=2\times\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

답 ③

0987

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$
$$=-\int_a^0 f(x)dx-\int_0^b f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx-\int_0^b f(x)dx$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0988

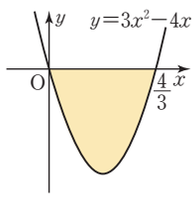
$\int_2^x f(t)dt=x^3-kx^2$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-4k \quad \therefore k=2$

$\int_2^x f(t)dt=x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $3x^2-4x=0$에서



$x(3x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{4}{3}}(-3x^2+4x)dx=\left[-x^3+2x^2\right]_0^{\frac{4}{3}}=\frac{32}{27}$$

답 $\frac{32}{27}$

다른 풀이 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{|3|}{6}\times\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{32}{27}$

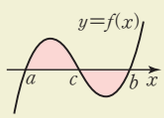
참고 포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq0, \alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이 (2) 개념 01

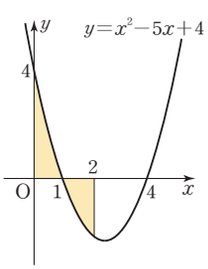
오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

⇨ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$



0989

곡선 $y=x^2-5x+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+4=0$에서



$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

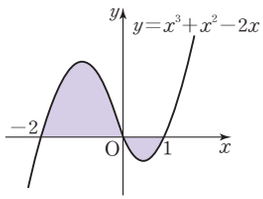
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1(x^2-5x+4)dx+\int_1^2(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$$

답 3

0990

곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3+x^2-2x=0$에서



$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

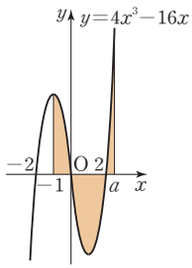
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)dx+\int_0^1(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

답 ②

0991

곡선 $y=4x^3-16x$와 x축의 교점의 x좌표는



$4x^3-16x=0$에서

$4x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0(4x^3-16x)dx+\int_0^2(-4x^3+16x)dx$$
$$+\int_2^a(4x^3-16x)dx$$
$$=\left[x^4-8x^2\right]_{-1}^0+\left[-x^4+8x^2\right]_0^2+\left[x^4-8x^2\right]_2^a$$
$$=7+16+(a^4-8a^2+16)=a^4-8a^2+39$$

즉, $a^4-8a^2+39=24$이므로

$a^4-8a^2+15=0$, $(a^2-3)(a^2-5)=0$

$\therefore a=\sqrt{5}$ ($\because a>2$)

답 $\sqrt{5}$

0992

두 도형 A, B의 넓이가 각각 9, 5이므로

$$\int_{-3}^3 f'(x)dx=\int_{-3}^1 f'(x)dx+\int_1^3 f'(x)dx$$
$$=A-B=9-5=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 함수 $f'(x)$가 함수 $f(x)$의 도함수이므로

$$\int_{-3}^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-3}^3$$
$$=f(3)-f(-3) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $f(3)-f(-3)=4$

따라서 $f(-3)=3$이므로

$f(3)=4+3=7$

답 7

다른 풀이 도형 A의 넓이가 9이므로

$$\int_{-3}^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-3}^1=f(1)-f(-3)$$
$$=f(1)-3=9$$

$\therefore f(1)=12$

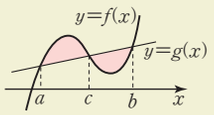
도형 B의 넓이가 5이므로

$$-\int_1^3 f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_1^3=-\{f(3)-f(1)\}$$
$$=-f(3)+12=5$$

$\therefore f(3)=7$

유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이 개념 02

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이



$\Rightarrow \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$

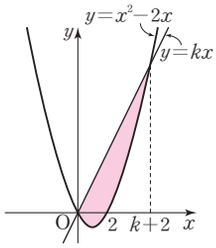
0993

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=kx$에서

$x^2-(k+2)x=0,\ x\{x-(k+2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k+2$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$\int_0^{k+2}\{kx-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}=\frac{1}{6}(k+2)^3$

즉, $\frac{1}{6}(k+2)^3=\frac{125}{6}$이므로

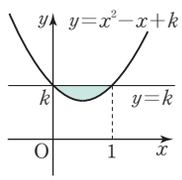
$(k+2)^3=125,\ k+2=5\ (\because k>0)$ $\therefore k=3$ 답 3

0994

곡선 $y=x^2-x+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $x^2-x+k=k$에서 $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$\int_0^1\{k-(x^2-x+k)\}dx=\int_0^1(-x^2+x)dx$

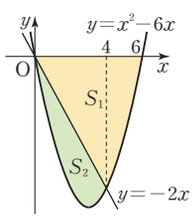
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$ 답 ②

0995

곡선 $y=x^2-6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S_1+S_2이고, 곡선 $y=x^2-6x$와 직선 $y=-2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S_2이다.

곡선 $y=x^2-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-6x=0$에서

$x(x-6)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$



$\therefore S_1+S_2=\int_0^6(-x^2+6x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36$

곡선 $y=x^2-6x$와 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌표는 $x^2-6x=-2x$에서

$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore S_2=\int_0^4\{-2x-(x^2-6x)\}dx=\int_0^4(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

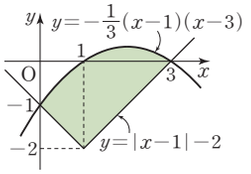
따라서 $S_1=36-\frac{32}{3}=\frac{76}{3}$이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{76}{3}}{\frac{32}{3}}=\frac{19}{8}$ 답 $\frac{19}{8}$

0996

$|x-1|-2=\begin{cases} x-3 & (x\geq 1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$

두 함수 $y=-\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$, $y=|x-1|-2$의 그래프의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq 1$일 때



$-\frac{1}{3}(x-1)(x-3)=x-3$에서

$x^2-4x+3=-3x+9$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\geq 1)$

(ii) $x<1$일 때

$-\frac{1}{3}(x-1)(x-3)=-x-1$에서

$x^2-4x+3=3x+3,\ x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$ $\therefore x=0\ (\because x<1)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^1\left\{-\frac{1}{3}(x-1)(x-3)-(-x-1)\right\}dx$

$+\int_1^3\left\{-\frac{1}{3}(x-1)(x-3)-(x-3)\right\}dx$

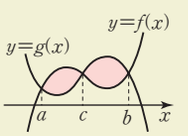
$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$

$=\frac{19}{18}+\frac{22}{9}=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

유형 04 두 곡선 사이의 넓이 개념 02

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이



$\Rightarrow \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$

0997

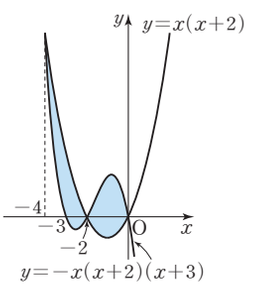
두 곡선 $y=x(x+2)$, $y=-x(x+2)(x+3)$의 교점의 x좌표는

$x(x+2)=-x(x+2)(x+3)$

에서 $x(x+2)(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-4}^{-2}[x(x+2)-\{-x(x+2)(x+3)\}]dx$

$+\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)(x+3)-x(x+2)\}dx$

$=\int_{-4}^{-2}(x^3+6x^2+8x)dx+\int_{-2}^{0}(-x^3-6x^2-8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3+4x^2\right]_{-4}^{-2}+\left[-\frac{1}{4}x^4-2x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}$

$=4+4=8$ 답 ④

0998

두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=x^2-4$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=x^2-4$에서

$2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

답 9

0999

두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2=-x^2+2x$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x^2)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^3-2x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ④

1000

곡선 $y=-x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-x^2$ $\therefore y=x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y=(x-2)^2-4$ $\therefore f(x)=x^2-4x$ … ❶

두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $-x^2=x^2-4x$에서

$2x^2-4x=0$, $2x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ … ❷

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{-x^2-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$ … ❸

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1001

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 1, -1이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 a, 3이므로

$g(x)-f(x)=-2(x-a)(x-3)$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{a}^{3}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{a}^{3}\{-2(x-a)(x-3)\}dx$$

$$=\int_{a}^{3}\{-2x^2+2(a+3)x-6a\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+(a+3)x^2-6ax\right]_{a}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}a^3+3a^2-9a+9$$

즉, $-\frac{1}{3}a^3+3a^2-9a+9=\frac{8}{3}$이므로

$-a^3+9a^2-27a+27=8$, $a^3-9a^2+27a-19=0$

$(a-1)(a^2-8a+19)=0$ $\therefore a=1$ ($\because 0<a<3$)

이때 $g(x)=-x(x-3)$이므로

$f(x)=g(x)+2(x-1)(x-3)$

$=-x(x-3)+2(x-1)(x-3)$

$=(x-2)(x-3)$

$\therefore f(6)=4\times3=12$

답 12

1002

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=1$인 점에서 접하므로

$f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$이다.

$f(1)=g(1)$에서

$0=1+a+b$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=g'(1)$에서

$2=2+a$ $\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1003

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 -3, 0, 2이므로
$f(x)-g(x)=ax(x+3)(x-2)$ ($a\neq0$인 상수)라 하자.
이때 $A=63$이므로

$$\int_{-3}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-3}^{0}ax(x+3)(x-2)dx$$
$$=a\int_{-3}^{0}(x^3+x^2-6x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-3}^{0}=\frac{63}{4}a$$

즉, $\frac{63}{4}a=63$이므로 $a=4$

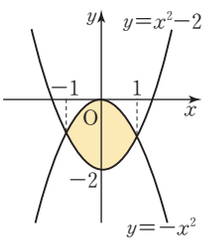
따라서 $f(x)-g(x)=4x(x+3)(x-2)=4x^3+4x^2-24x$이므로

$$B=\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^2\{-(4x^3+4x^2-24x)\}dx$$
$$=\int_0^2(-4x^3-4x^2+24x)dx$$
$$=\left[-x^4-\frac{4}{3}x^3+12x^2\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

1004

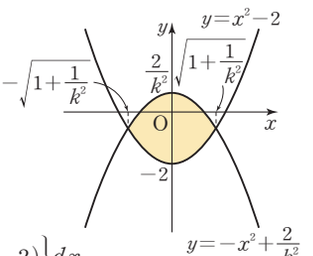
$\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k^2}=0$이므로 $\lim_{k\to\infty}S_k$는 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2=-x^2$에서
$2x^2-2=0$, $2(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_k=\int_{-1}^{1}\{-x^2-(x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\int_0^1(-2x^2+2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ③

다른 풀이 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2+\frac{2}{k^2}$의 교점의 x좌표는



$x^2-2=-x^2+\frac{2}{k^2}$에서 $x^2=1+\frac{1}{k^2}$
$\therefore x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$$\therefore S_k=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\left\{\left(-x^2+\frac{2}{k^2}\right)-(x^2-2)\right\}dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\left(-2x^2+2+\frac{2}{k^2}\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)x\right]_0^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$$
$$=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$

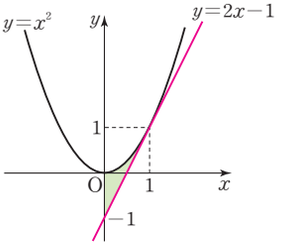
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{8}{3}$$

유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 개념 02

(i) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 구한다.
⇨ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
(ii) 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구하여 도형의 넓이를 구한다.

1005

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$
이므로 $f'(1)=2$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$
$\therefore y=2x-1$



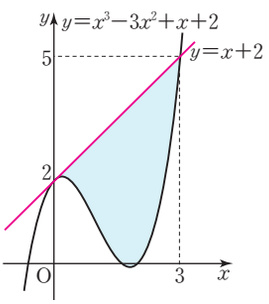
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{x^2-(2x-1)\}dx=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

1006

$f(x)=x^3-3x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$이므로
$f'(0)=1$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 방정식은
$y-2=x$ $\therefore y=x+2$
곡선 $y=x^3-3x^2+x+2$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는
$x^3-3x^2+x+2=x+2$에서
$x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



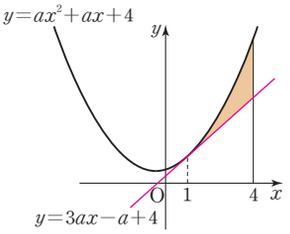
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^3\{(x+2)-(x^3-3x^2+x+2)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

답 ③

1007

$f(x)=ax^2+ax+4$라 하면
$f'(x)=2ax+a$이므로 $f'(1)=3a$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2a+4)$에서의 접선의 방정식은
$y-(2a+4)=3a(x-1)$
$\therefore y=3ax-a+4$



이때 $a>0$이므로 곡선 $y=ax^2+ax+4$와 직선 $y=3ax-a+4$ 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4\{(ax^2+ax+4)-(3ax-a+4)\}dx$$
$$=\int_1^4(ax^2-2ax+a)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+ax\right]_1^4=9a$$

따라서 $9a=6$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

1008

$f(x)=x^2-3x+4$라 하면

$f'(x)=2x-3$이므로

$f'(t)=2t-3$

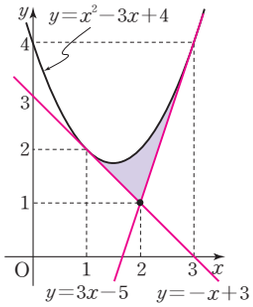
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점

(t, t^2-3t+4)에서의 접선의

방정식은

$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$

$\therefore y=(2t-3)x-t^2+4$ ····· ㉠



이 접선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=2(2t-3)-t^2+4$에서

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

㉠에 $t=1$, $t=3$을 각각 대입하면 접선의 방정식은

$t=1$일 때, $y=-x+3$

$t=3$일 때, $y=3x-5$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2\{(x^2-3x+4)-(-x+3)\}dx+\int_2^3\{(x^2-3x+4)-(3x-5)\}dx$$

$$=\int_1^2(x^2-2x+1)dx+\int_2^3(x^2-6x+9)dx$$

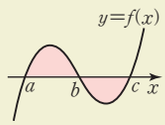
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ②

유형 06 두 도형의 넓이가 같은 경우 개념 01, 02

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 때



⇨ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^c f(x)dx$

⇨ $\int_a^c f(x)dx=0$

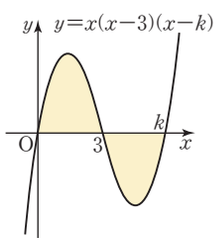
1009

곡선 $y=x(x-3)(x-k)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-3)(x-k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=k$

이때 $k>3$이므로

곡선 $y=x(x-3)(x-k)$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같다.



즉, $\int_0^k x(x-3)(x-k)dx=0$이므로

$\int_0^k\{x^3-(3+k)x^2+3kx\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3+k}{3}x^3+\frac{3k}{2}x^2\right]_0^k=0$

$\frac{k^4}{4}-\frac{3k^3+k^4}{3}+\frac{3k^3}{2}=0$

$k^4-6k^3=0$, $k^3(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>3$)

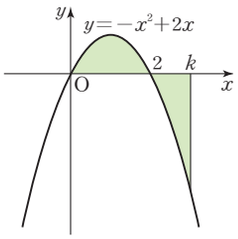
답 6

1010

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때 $k>2$이므로 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $x=k$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같다.



즉, $\int_0^k(-x^2+2x)dx=0$이므로

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^k=0$, $-\frac{1}{3}k^3+k^2=0$

$k^3-3k^2=0$, $k^2(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>2$)

답 3

1011

색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^2\{x(x-2)^2-ax(x-2)\}dx=0$

$\int_0^2\{x^3-(a+4)x^2+2(a+2)x\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+4}{3}x^3+(a+2)x^2\right]_0^2=0$

$4-\frac{8}{3}(a+4)+4(a+2)=0$

$\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}=0$ $\therefore a=-1$

답 ③

1012

곡선 $y=x^2(a+2-x)$와 직선 $y=2ax$의 교점의 x좌표는

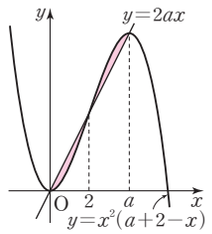
$x^2(a+2-x)=2ax$에서

$(a+2)x^2-x^3=2ax$, $x^3-(a+2)x^2+2ax=0$

$x(x-2)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$ ··· ❶

이때 $a>2$이므로 곡선 $y=x^2(a+2-x)$와 직선 $y=2ax$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같다.



즉, $\int_0^a\{x^2(a+2-x)-2ax\}dx=0$

이므로

$\int_0^a\{-x^3+(a+2)x^2-2ax\}dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3-ax^2\right]_0^a=0$

$-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4+2a^3}{3}-a^3=0$

$a^4-4a^3=0$, $a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$) ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^2(a+2-x)$와 직선 $y=2ax$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 도형의 넓이가 서로 같음을 이용하여 조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	60 %

Plus **1013~1015** 곡선 $y=f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선과 x축 사이의 넓이를 S_1, 닫힌구간 $[b, c]$에서 곡선과 x축 사이의 넓이를 S_2라 하면

$S_1 : S_2 = \int_a^b |f(x)|dx : \int_b^c |f(x)|dx$

1013

곡선

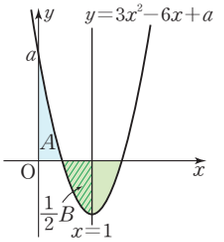
$y=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$

은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고

$A : B=1 : 2$에서 $A=\frac{1}{2}B$이므로

빗금친 도형의 넓이는 A와 같다.

즉, $\int_0^1 (3x^2-6x+a)dx=0$이므로



$\left[x^3-3x^2+ax\right]_0^1=0,\ a-2=0 \quad \therefore a=2$ 답 ④

1014

$S_1 : S_2=5 : 11$이고 $S_1+S_2=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$이므로

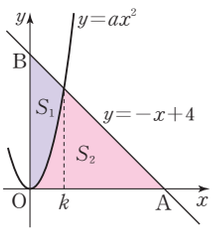
$S_1=8\times\frac{5}{16}=\frac{5}{2}$

한편, 직선 AB는 두 점 $(4, 0)$, $(0, 4)$를 지나므로 그 방정식은

$y=-x+4$

이때 직선 AB와 곡선 $y=ax^2$의 교점의 x좌표를 k $(0<k<4)$라 하면

$-k+4=ak^2$ ····· ㉠



$S_1=\int_0^k \{(-x+4)-ax^2\}dx=\int_0^k (-ax^2-x+4)dx$

$=\left[-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^k=-\frac{a}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+4k$

$=-\frac{1}{3}k(-k+4)-\frac{1}{2}k^2+4k$ ($\because$ ㉠)

$=-\frac{1}{6}k^2+\frac{8}{3}k$

즉, $-\frac{1}{6}k^2+\frac{8}{3}k=\frac{5}{2}$이므로 $k^2-16k+15=0$

$(k-1)(k-15)=0 \quad \therefore k=1$ ($\because 0<k<4$)

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1+4=3$ 답 3

1015

곡선 $y=f(x)$는 x축과 $x=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나고 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$

또, 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=h(x)$와 $x=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나고 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로

$g(x)-h(x)=4x(x-\alpha)(x-\beta)$

$S_1=\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx$,

$S_2=\int_0^\alpha \{g(x)-h(x)\}dx=4\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

이므로 $S_2=4S_1$

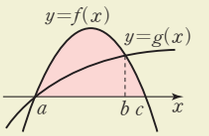
그런데 $S_1+S_2=120$이므로 $5S_1=120 \quad \therefore S_1=24$

$\therefore S_2-2S_1=4S_1-2S_1=2S_1=2\times 24=48$ 답 48

유형 07 넓이를 이등분하는 경우 개념 01, 02

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=g(x)$가 이등분할 때

⇨ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\frac{1}{2}\int_a^c f(x)dx$



1016

곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=ax$에서

$x^2+(a-4)x=0,\ x\{x+(a-4)\}=0$

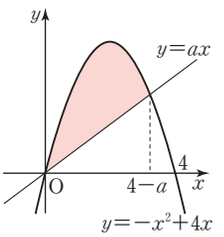
$\therefore x=0$ 또는 $x=4-a$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$\int_0^{4-a} \{(-x^2+4x)-ax\}dx$

$=\int_0^{4-a} \{-x^2+(4-a)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-a}{2}x^2\right]_0^{4-a}=\frac{1}{6}(4-a)^3$



곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^4 (-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

따라서 $\frac{1}{6}(4-a)^3=\frac{1}{2}\times\frac{32}{3}$이므로 $(4-a)^3=32$ 답 32

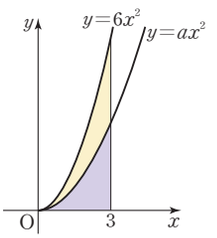
1017

곡선 $y=6x^2$ $(x\geq 0)$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^3 6x^2dx=\left[2x^3\right]_0^3=54$

곡선 $y=ax^2$ $(x\geq 0)$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^3 ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3=9a$



따라서 $9a=\frac{1}{2}\times 54$이므로 $a=3$ 답 ③

1018

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=ax$에서

$x^2-(a+2)x=0,\ x\{x-(a+2)\}=0$

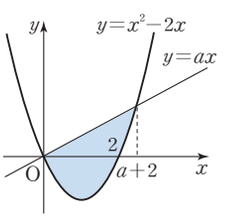
$\therefore x=0$ 또는 $x=a+2$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$\int_0^{a+2} \{ax-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_0^{a+2} \{-x^2+(a+2)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+2}{2}x^2\right]_0^{a+2}=\frac{1}{6}(a+2)^3$



곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2 (-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

따라서 $\frac{1}{6}(a+2)^3=2\times\frac{4}{3}$이므로 $(a+2)^3=16$ 답 16

1019

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2k^2$의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq 0$일 때

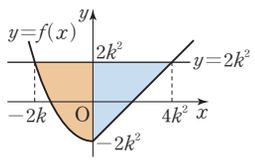
$x-2k^2=2k^2$에서 $x=4k^2$

(ii) $x<0$일 때

$x^2-2k^2=2k^2$에서 $x^2-4k^2=0$

$(x+2k)(x-2k)=0$ $\therefore x=-2k\ (\because k>0)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 y축에 의하여 이등분되므로 오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.



즉, $\int_{-2k}^{0}\{2k^2-(x^2-2k^2)\}dx=\int_{0}^{4k^2}\{2k^2-(x-2k^2)\}dx$이므로

$\int_{-2k}^{0}(-x^2+4k^2)dx=\int_{0}^{4k^2}(-x+4k^2)dx$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+4k^2x\right]_{-2k}^{0}=\left[-\frac{1}{2}x^2+4k^2x\right]_{0}^{4k^2}$

$\frac{16}{3}k^3=8k^4$, $\frac{8}{3}k^3(3k-2)=0$

$\therefore k=\frac{2}{3}\ (\because k>0)$ 답 $\frac{2}{3}$

유형 08 도형의 넓이의 최솟값 개념 01, 02

(i) 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 식으로 나타낸다.

(ii) 함수의 증가와 감소, 이차방정식의 근과 계수의 관계 등을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.

1020

곡선 $y=x^2-ax$와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하자.

$S(a)=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)dx+\int_{a}^{6}(x^2-ax)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{a}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{a}^{6}$

$=\frac{1}{6}a^3+\left(\frac{1}{6}a^3-18a+72\right)=\frac{1}{3}a^3-18a+72$

$\therefore S'(a)=a^2-18=(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})$

$S'(a)=0$에서 $a=3\sqrt{2}\ (\because 0<a<6)$

$0<a<6$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

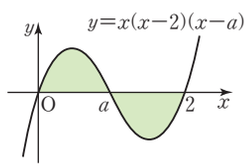
a	0	…	$3\sqrt{2}$	…	6
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=3\sqrt{2}$일 때 극소이면서 최소이다. 답 $3\sqrt{2}$

1021

$0<a<2$이므로

곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같고, 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하자.



$S(a)=\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)dx+\int_{a}^{2}\{-x(x-2)(x-a)\}dx$

$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$+\int_{a}^{2}\{-x^3+(a+2)x^2-2ax\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_{0}^{a}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+2)x^3-ax^2\right]_{a}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)+\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\right)$

$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$

$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$

$=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$

$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=1\ (\because 0<a<2)$

$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	1	…	2
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다. 답 1

참고 $a^2-2a-2=0$에서 $a=1\pm\sqrt{3}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $1-\sqrt{3}<0$이고 $1+\sqrt{3}>2$이다.

1022

$f(x)=-x^2+4$라 하면 $f'(x)=-2x$이므로

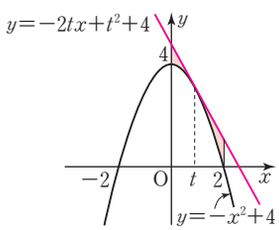
$f'(t)=-2t$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, -t^2+4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+4$ … ❶

이때 $0<t<2$이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$\int_{0}^{2}\{(-2tx+t^2+4)-(-x^2+4)\}dx$

$=\int_{0}^{2}(x^2-2tx+t^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_{0}^{2}$

$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$ … ❷

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. … ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점 $(t, -t^2+4)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 접선과 곡선 $y=-x^2+4$ 및 y축, 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1023

점 $(2, 1)$을 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$ $\quad\therefore y=mx-2m+1$

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 l의 교점의 x좌표는 방정식

$x^2-2x=mx-2m+1$, 즉 $x^2-(m+2)x+2m-1=0$의 두 근이다.

이때 이 방정식의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx-2m+1)-(x^2-2x)\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

한편, 이차방정식 $x^2-(m+2)x+2m-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+2$, $\alpha\beta=2m-1$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}$ $(\because \alpha<\beta)$

$=\sqrt{(m+2)^2-4(2m-1)}$

$=\sqrt{m^2-4m+8}$

$\therefore \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{m^2-4m+8})^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2+4}\}^3$

따라서 $m=2$일 때 넓이가 최소이므로

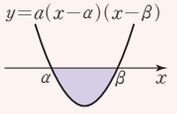
$a=\frac{1}{6}\times(\sqrt{4})^3=\frac{4}{3}$, $b=2$

$\therefore a+b=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$ 답 ④

Lecture

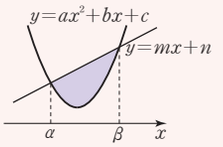
(1) 포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq0,\ \alpha<\beta)$와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



(2) 포물선 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$와 직선 $y=mx+n$의 서로 다른 두 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

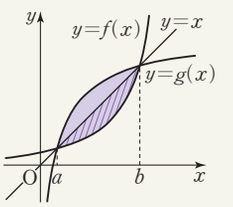


발전 유형 09 역함수의 그래프와 넓이 개념 03

함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

⇨ $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

$=2\int_a^b|f(x)-x|dx$



1024

$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2+x=x$에서

$x^3-x^2=0$, $x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

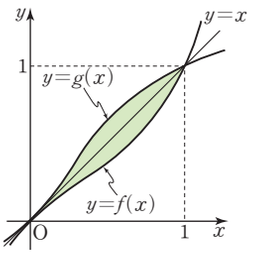
따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^1\{x-(x^3-x^2+x)\}dx$

$=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx$

$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$



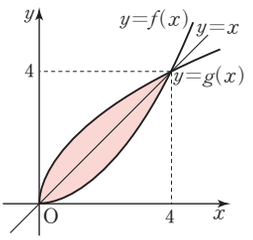
1025

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$2\left\{\frac{1}{2}\times4\times4-\int_0^4f(x)dx\right\}$

$=2\times(8-5)$

$=2\times3=6$ 답 6



1026

함수 $y=\sqrt{2x-1}$의 역함수는

$2x-1=y^2$에서 $x=\frac{1}{2}(y^2+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$ $(x\geq0)$ … ❶

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}(x^2+1)=x$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ … ❷

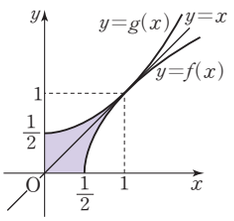
따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(x^2+1)-x\right\}dx=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^1$

$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ … ❸

답 $\frac{1}{3}$



채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1027

함수 $y=\sqrt{ax}$의 역함수는 $ax=y^2$에서 $x=\frac{1}{a}y^2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x^2$

$\therefore g(x)=\frac{1}{a}x^2\ (x\geq 0)$

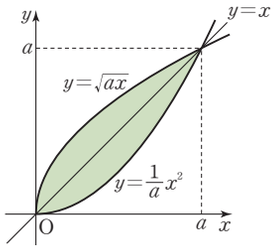
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

곡선 $y=\frac{1}{a}x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{a}x^2=x$에서

$x^2-ax=0$, $x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$2\int_0^a\left(x-\frac{1}{a}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3a}x^3\right]_0^a=2\times\frac{1}{6}a^2=\frac{1}{3}a^2$

따라서 $\frac{1}{3}a^2=\frac{16}{3}$이므로

$a^2=16$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

발전 유형 10 함수와 그 역함수의 정적분 개념 03

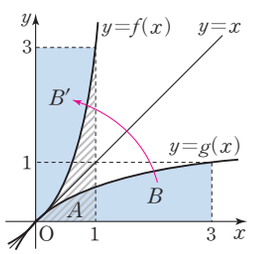
함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
⇨ 대칭이동했을 때 넓이가 같은 도형을 찾는다.

1028

$f(x)=2x^3+x$에서 $f'(x)=6x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)=2x^3+x$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(1)=3$이므로 $g(0)=0$, $g(3)=1$이다.

오른쪽 그림에서 $B=B'$이므로



$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=A+B$

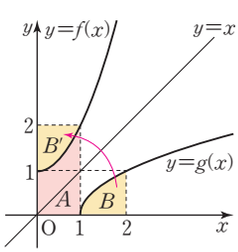
$=A+B'$

$=1\times 3=3$ 답 ③

1029

함수 $f(x)=x^2+1\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로 $g(1)=0$, $g(2)=1$이다.

오른쪽 그림에서 $B=B'$이므로



$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=A+B$

$=A+B'$

$=1\times 2=2$ 답 2

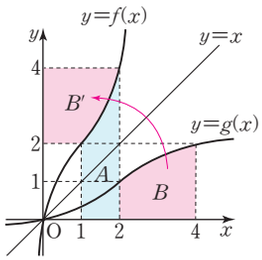
1030

$f(x)=x^3-3x^2+4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(1)=2$, $f(2)=4$이므로 $g(2)=1$, $g(4)=2$이다.



오른쪽 그림에서 $B=B'$이므로

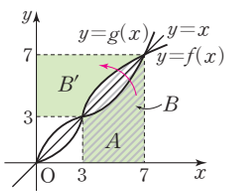
$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 g(x)dx=A+B$

$=A+B'$

$=2\times 4-1\times 2=6$ 답 6

1031

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(3)=3$, $f(7)=7$이므로 $g(3)=3$, $g(7)=7$이다.



오른쪽 그림에서 $B=B'$이므로

$\int_3^7\{f(x)+g(x)\}dx=\int_3^7 f(x)dx+\int_3^7 g(x)dx$

$=A+B$

$=A+B'$

$=7\times 7-3\times 3=40$ 답 40

유형 11 수직선 위를 움직이는 점의 위치 개념 04

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 할 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치 x ⇨ $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량 ⇨ $\int_a^b v(t)dt$

1032

$v(t)=0$에서 $t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3\ (\because t>0)$

즉, 점 P는 출발한 지 3초 후에 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^3(t^2+2t-15)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-15t\right]_0^3=-27$ 답 −27

1033

점 P의 시각 $t=2$에서의 위치가 6이므로

$0+\int_0^2(3t^2-6t+a)dt=6$, $\left[t^3-3t^2+at\right]_0^2=6$

$2a-4=6$ $\quad\therefore a=5$ 답 ⑤

1034

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치를 x_0이라 하면 점 P의 시각 $t=5$에서의 위치가 3이므로

$x_0+\int_0^5(6-2t)dt=3,\ x_0+\left[6t-t^2\right]_0^5=3$

$x_0+5=3 \quad \therefore x_0=-2$

따라서 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$-2+\int_0^3(6-2t)dt=-2+\left[6t-t^2\right]_0^3$

$=-2+9=7$ 답 7

다른 풀이 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치를 a라 하면 점 P의 시각 $t=5$에서의 위치가 3이므로

$a+\int_3^5(6-2t)dt=3,\ a+\left[6t-t^2\right]_3^5=3$

$a+(-4)=3 \quad \therefore a=7$

1035

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 30 m이므로 구하는 높이는

$30+\int_0^6(40-10t)dt=30+\left[40t-5t^2\right]_0^6$

$=30+60=90\ (\mathrm{m})$ 답 ④

1036

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 100 m이므로 구하는 높이는

$100+\int_0^{20}t\,dt+\int_{20}^{35}(60-2t)dt$

$=100+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$

$=100+200+75=375\ (\mathrm{m})$ 답 375 m

1037

$t=a\ (a>0)$일 때 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a(-3t^2-2t+12)dt=0,\ \left[-t^3-t^2+12t\right]_0^a=0$

$-a^3-a^2+12a=0,\ a(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아올 때의 시각은 $t=3$이다.

답 3

1038

공이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$25-10t=0 \quad \therefore t=\frac{5}{2}$

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 50 m이므로 구하는 높이는

$50+\int_0^{\frac{5}{2}}(25-10t)dt=50+\left[25t-5t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}$

$=50+\frac{125}{4}=\frac{325}{4}\ (\mathrm{m})$ 답 ④

1039

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가 0이므로 $x(0)=0$

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt=\int_0^t 3(t-1)(t-a)dt$

$=\int_0^t\{3t^2-3(1+a)t+3a\}dt=\left[t^3-\frac{3}{2}(1+a)t^2+3at\right]_0^t$

$=t^3-\frac{3}{2}(1+a)t^2+3at$ … ❶

$v(t)=0$에서 $3(t-1)(t-a)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=a$

이때 $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$, $1\le t\le a$에서 $v(t)\le 0$이고

$t\ge a$에서 $v(t)\ge 0$이므로

$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번뿐이려면

$x(a)=0$ … ❷

즉, $a^3-\frac{3}{2}(1+a)a^2+3a^2=0$에서 $-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2=0$

$a^2(a-3)=0 \quad \therefore a=3\ (\because a>1)$ … ❸

따라서 $v(t)=3(t-1)(t-3)$이므로

$v(6)=3\times5\times3=45$ … ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x(a)=0$임을 알아낼 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $v(6)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 12 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리 개념 04

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때,

시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s ⇨ $s=\int_a^b|v(t)|dt$

1040

열차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$30-5t=0 \quad \therefore t=6$

따라서 열차는 제동을 건 후 6초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$\int_0^6|30-5t|dt=\int_0^6(30-5t)dt$

$=\left[30t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6=90\ (\mathrm{m})$ 답 ⑤

1041

$v(t)=0$에서 $2t^2-6t=0$

$2t(t-3)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=3$

이때 $0\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$, $t\ge 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로

구하는 거리는

$\int_0^6|2t^2-6t|dt=\int_0^3(-2t^2+6t)dt+\int_3^6(2t^2-6t)dt$

$=\left[-\frac{2}{3}t^3+3t^2\right]_0^3+\left[\frac{2}{3}t^3-3t^2\right]_3^6$

$=9+45=54$ 답 ⑤

1042

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$50-10t=0 \quad \therefore t=5$

따라서 물체가 최고 높이에 도달한 후 3초 동안 움직인 거리는

$$\int_5^8 |50-10t|\,dt=\int_5^8 (-50+10t)\,dt$$

$$=\left[-50t+5t^2\right]_5^8=45\ (\mathrm{m})$$

답 ②

1043

$t=0$에서 $t=a\ (a>0)$까지 자동차가 달린 거리가 4 km라 하면

$\int_0^a \left|\frac{3}{4}t^2+t\right|dt=4$에서

$\int_0^a \left(\frac{3}{4}t^2+t\right)dt=4,\ \left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=4$

($t>0$일 때 $\frac{3}{4}t^2+t>0$)

$\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{2}a^2=4,\ a^3+2a^2-16=0$

$(a-2)(a^2+4a+8)=0 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

자동차가 출발한 후 2분이 지났을 때의 속도는

$v(2)=\frac{3}{4}\times 4+2=5\ (\mathrm{km/min})$

따라서 자동차가 출발한 후 6분 동안 달린 거리는

$4+\int_2^6 5\,dt=4+\left[5t\right]_2^6=4+20=24\ (\mathrm{km})$

답 24 km

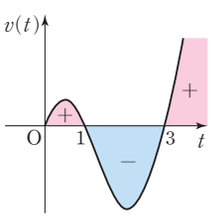
1044

$v(t)=0$에서 $t^3-4t^2+3t=0$

$t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

오른쪽 그림에서 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대인 방향으로 움직인 구간은 $1<t<3$이다.



따라서 구하는 거리는

$$\int_1^3 |t^3-4t^2+3t|\,dt=\int_1^3 (-t^3+4t^2-3t)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

답 ③

1045

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=t^2-6t+8$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$t^2-6t+8=0,\ (t-2)(t-4)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

점 P는 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸고,

$0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로

구하는 거리는

$$\int_0^4 |t^2-6t+8|\,dt=\int_0^2 (t^2-6t+8)\,dt+\int_2^4 (-t^2+6t-8)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4$$

$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}=8$$

답 ③

1046

A가 30초 동안 달린 거리를 l_A라 하면

$$l_A=\int_0^{30}\left|\frac{1}{4}t+5\right|dt=\int_0^{30}\left(\frac{1}{4}t+5\right)dt=\left[\frac{1}{8}t^2+5t\right]_0^{30}=262.5\ (\mathrm{m})$$

B가 30초 동안 달린 거리를 l_B라 하면

$$l_B=\int_0^{30}\left|\frac{1}{3}t+1\right|dt=\int_0^{30}\left(\frac{1}{3}t+1\right)dt=\left[\frac{1}{6}t^2+t\right]_0^{30}=180\ (\mathrm{m})$$

두 사람 A, B가 서로 반대 방향으로 동시에 출발하였으므로 두 사람 A, B가 30초 동안 움직인 거리의 합은 $l_A+l_B=442.5\ (\mathrm{m})$

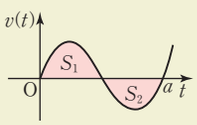
이때 호수 한 바퀴의 길이가 80 m이므로 $5\times 80<442.5<6\times 80$

따라서 두 사람 A, B는 30초 동안 5번 만난다.

답 ④

유형 13 그래프에서의 위치와 움직인 거리 개념 04

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때



(1) 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량 ⇨ $\int_0^a v(t)\,dt=S_1-S_2$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 ⇨ $\int_0^a |v(t)|\,dt=S_1+S_2$

1047

ㄱ. $v(1)=1>0$이므로 점 P는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄴ. $0<t<2$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 원점에서 양의 방향으로 계속 멀어져 가고, $2<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 $t=2$에서 운동 방향을 바꿔 음의 방향으로 움직인다.

즉, $t=2$일 때 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

ㄷ. $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^4 |v(t)|\,dt$이고

$2<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 $\int_0^4 |v(t)|\,dt\ne\int_0^4 v(t)\,dt$이다. (거짓)

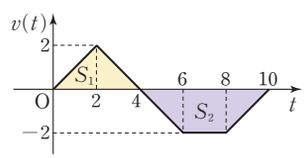
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

참고 ㄴ. $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 원점에서 양의 방향으로 움직인 거리는 $\int_0^2 v(t)\,dt$이고, $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 음의 방향으로 움직인 거리는 $\int_2^4 |v(t)|\,dt$이다. 이때 $\int_0^2 v(t)\,dt>\int_2^4 |v(t)|\,dt$이므로 $t=2$일 때 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있음을 알 수 있다.

1048

오른쪽 그림과 같이 속도 $v(t)$의 그래프와 t축이 이루는 각 부분의 넓이를 S_1, S_2라 하면



$S_1=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

$S_2=\frac{1}{2}\times(2+6)\times 2=8$

$a=\int_0^{10} v(t)\,dt=S_1-S_2=4-8=-4$

$b=\int_0^{10} |v(t)|\,dt=S_1+S_2=4+8=12$

$\therefore a+b=-4+12=8$

답 8

1049

점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)$이므로 $f'(t)$는 시각 t에서의 속도이다.

그래프에서 $f'(2)=f'(4)=0$이므로

$f'(t)=a(t-2)(t-4)$ (a는 0이 아닌 상수)

이때 $f'(0)=4$이므로

$8a=4 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f'(t)=\frac{1}{2}(t-2)(t-4)$

또, 점 P의 $t=2$에서의 위치가 6이므로

$$f(2)=f(0)+\int_0^2 \frac{1}{2}(t-2)(t-4)dt$$

$$=f(0)+\int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2-3t+4\right)dt$$

$$=f(0)+\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t\right]_0^2$$

$$=f(0)+\frac{10}{3}$$

$f(0)+\frac{10}{3}=6 \quad \therefore f(0)=\frac{8}{3}$

따라서 점 P의 $t=4$에서의 위치는

$$f(4)=f(0)+\int_0^4 \left(\frac{1}{2}t^2-3t+4\right)dt$$

$$=\frac{8}{3}+\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t\right]_0^4$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

다른 풀이 점 P의 $t=2$에서의 위치가 6이므로

$$f(4)=f(2)+\int_2^4 f'(t)dt$$

$$=6+\int_2^4 \left(\frac{1}{2}t^2-3t+4\right)dt$$

$$=6+\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t\right]_2^4$$

$$=6+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

1050

ㄱ. $f(t)=\int_0^t v(t)dt$는 점 P의 시각 t에서의 위치이므로

$f(4)=\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times2\times1=0$이다. (거짓)

ㄴ. $f(10)=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^{10} v(t)dt$

$$=\int_0^2 v(t)dt$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1\right)$$
$$=\int_0^2 v(t)dt+0=f(2)$$ (참)

ㄷ. 점 P가 출발한 후 원점을 지나는 것은 $f(t)=0$일 때, 즉 $t=4$ 또는 $t=8$일 때이므로 출발한 후 원점을 2번 지난다. (거짓)

ㄹ. 점 P가 10초 동안 움직인 거리는

$\int_0^{10} |v(t)|dt=5\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=5\times1=5$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

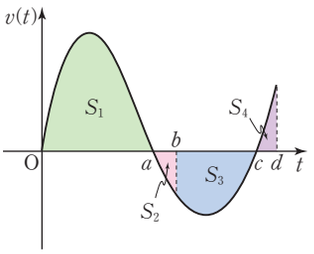
1051

오른쪽 그림과 같이 속도 $v(t)$의 그래프와 t축이 이루는 각 부분의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4라 하면

$\int_0^a |v(t)|dt=\int_a^d |v(t)|dt$

이므로

$S_1=S_2+S_3+S_4$ ……㉠



ㄱ. $S_1>S_2+S_3$이므로 점 P는 출발한 후 원점을 다시 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^c v(t)dt=S_1-S_2-S_3$

$\int_c^d v(t)dt=S_4=S_1-S_2-S_3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \int_0^c v(t)dt=\int_c^d v(t)dt$ (참)

ㄷ. $\int_0^b v(t)dt=S_1-S_2$

$\int_b^d |v(t)|dt=S_3+S_4=S_1-S_2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \int_0^b v(t)dt=\int_b^d |v(t)|dt$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

1052

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1)

|전략| S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2S_2=S_1+S_3$이다.

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=2$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S_1+S_2+S_3$이므로

$$S_1+S_2+S_3=\int_{-4}^2 (-x^2-2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^2=36$$

이때 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

따라서 $3S_2=36$이므로 $S_2=12$ 답 ③

1053

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1)

|전략| 주어진 함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 찾고 적분 구간을 나누어 넓이를 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq1$일 때

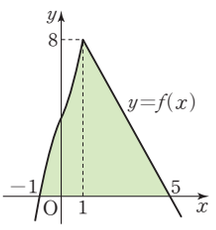
$-2x+10=0$에서 $x=5$

(ii) $x<1$일 때

$x^3+3x+4=0$에서

$(x+1)(x^2-x+4)=0$

$\therefore x=-1$ ($\because x<1$)



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{5}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}(x^3+3x+4)dx+\int_{1}^{5}(-2x+10)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}4dx+\int_{1}^{5}(-2x+10)dx$$
$$=2\Big[4x\Big]_0^1+\Big[-x^2+10x\Big]_1^5$$
$$=2\times4+16=24$$

답 ④

1054

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1)

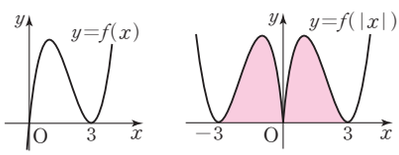
|전략| $x\geq0$일 때와 $x<0$일 때로 나누어 함수 $y=f(|x|)$의 그래프를 그린다.

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-6x^2+9x=0$에서

$x(x-3)^2=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\geq0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(|x|)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_{0}^{3}(x^3-6x^2+9x)dx=2\Big[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\Big]_0^3$$
$$=2\times\frac{27}{4}=\frac{27}{2}$$

답 ②

1055

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이 (2)

|전략| $S_2=16S_1$임을 이용하여 식을 세운다.

곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$$S_1=\int_{a}^{0}(-x^3)dx=\Big[-\frac{1}{4}x^4\Big]_a^0=\frac{1}{4}a^4$$

곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_{0}^{b}x^3dx=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_0^b=\frac{1}{4}b^4$$

$S_2=16S_1$이므로 $b^4=16a^4$

$|b|=2|a|$ $\therefore k=2$

답 ②

1056

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이 (2)

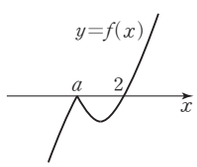
|전략| a의 값의 범위를 나누어 조건을 만족시키는 a의 값을 찾는다.

$f(x)=\begin{cases} (x-2)(x-a) & (x\geq a) \\ -(x-2)(x-a) & (x<a) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 따라 달라진다.

(i) $a<2$일 때

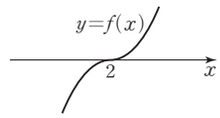
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이므로 극댓값은 $f(a)$이다.

그런데 $f(a)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a=2$일 때

극댓값이 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(iii) $a>2$일 때

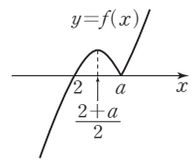
함수 $f(x)$는 $x=\frac{a+2}{2}$에서 극대이다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 1이므로

$-\Big(\frac{a+2}{2}-2\Big)\Big(\frac{a+2}{2}-a\Big)=1$에서

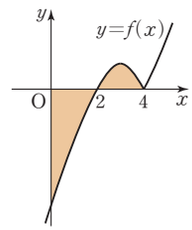
$-\Big(\frac{a}{2}-1\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)=1$, $\frac{1}{4}(a-2)^2=1$

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>2$)



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{2}(x-2)(x-4)dx$$
$$+\int_{2}^{4}\{-(x-2)(x-4)\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x^2-6x+8)dx$$
$$+\int_{2}^{4}(-x^2+6x-8)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\Big]_2^4$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}=8$$



답 ⑤

1057

유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이

|전략| 곡선 $y=3x^2-2x-4$와 두 직선 $y=x-4$, $y=-2x-1$의 교점의 x좌표를 구한다.

곡선 $y=3x^2-2x-4$와 직선 $y=x-4$의 교점의 x좌표는

$3x^2-2x-4=x-4$에서

$3x^2-3x=0$, $3x(x-1)=0$

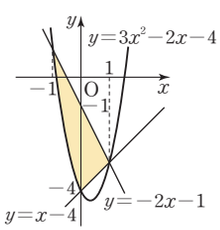
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

또, 곡선 $y=3x^2-2x-4$와 직선 $y=-2x-1$의 교점의 x좌표는

$3x^2-2x-4=-2x-1$에서

$3x^2-3=0$, $3(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=3x^2-2x-4$와 직선 $y=-2x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이에서 곡선 $y=3x^2-2x-4$와 직선 $y=x-4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\int_{-1}^{1}\{(-2x-1)-(3x^2-2x-4)\}dx$$
$$-\int_{0}^{1}\{(x-4)-(3x^2-2x-4)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx-\int_{0}^{1}(-3x^2+3x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx-\int_{0}^{1}(-3x^2+3x)dx$$
$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1-\Big[-x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$=2\times2-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

답 ①

1058

유형 04 두 곡선 사이의 넓이

|전략| 주어진 식을 미분하여 두 함수 $f(x), g(x)$를 찾고 정적분을 이용해 도형의 넓이를 구한다.

조건 (가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=5x^2-4x+1$ ····· ㉠

조건 (나)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-2g(x)=2x^2-16x+13$ ····· ㉡

㉠$\times 2+$㉡에서 $3f(x)=12x^2-24x+15$이므로

$f(x)=4x^2-8x+5$

㉠$-$㉡에서 $3g(x)=3x^2+12x-12$이므로

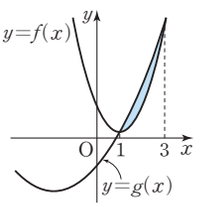
$g(x)=x^2+4x-4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $4x^2-8x+5=x^2+4x-4$에서

$3x^2-12x+9=0$

$3(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^3\{(x^2+4x-4)-(4x^2-8x+5)\}dx$$

$$=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$$

$$=\Big[-x^3+6x^2-9x\Big]_1^3=4$$

답 ④

1059

유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=g(x)$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

두 함수 $f(x)=2x^2+2$, $g(x)=a|x|$의 그래프가 두 점에서 접하므로 방정식 $2x^2+2=a|x|$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이므로 $x>0$에서 방정식 $2x^2+2=ax$, 즉 $2x^2-ax+2=0$이 하나의 실근만 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $2x^2-ax+2=0$이 $x>0$에서 중근을 가져야 하므로 $2x^2-ax+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16=0$

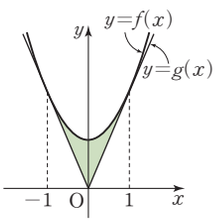
$(a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$x>0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $2x^2+2=4x$에서

$2x^2-4x+2=0$, $2(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^1\{(2x^2+2)-4|x|\}dx=2\int_0^1(2x^2-4x+2)dx$$

$$=2\Big[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\Big]_0^1$$

$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ③

참고 $a=4$이면 $2x^2-4x+2=0$에서 $2(x-1)^2=0$이므로 $x>0$에서 중근을 갖는다.

1060

유형 06 두 도형의 넓이가 같은 경우

|전략| $A+C=B$이면 $\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}f(x)dx=0$임을 이용한다.

곡선 $f(x)=(x^2-1)(x^2-k)$와 x축의 교점의 x좌표는

$(x^2-1)(x^2-k)=0$에서 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{k}$

$A+C=B$이고 $k>1$이므로

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}(x^2-1)(x^2-k)dx=0$$

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\{x^4-(1+k)x^2+k\}dx=0$$

$$2\int_0^{\sqrt{k}}\{x^4-(1+k)x^2+k\}dx=0$$

즉, $\int_0^{\sqrt{k}}\{x^4-(1+k)x^2+k\}dx=0$이므로

$$\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{1+k}{3}x^3+kx\Big]_0^{\sqrt{k}}=0$$

$$-\frac{2}{15}k^2\sqrt{k}+\frac{2}{3}k\sqrt{k}=0$$

$k\sqrt{k}(k-5)=0$

$\therefore k=5$ ($\because k>1$)

답 ②

1061

유형 09 역함수의 그래프와 넓이

|전략| 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(i) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$2x^3-6x^2+8x-3=x$에서

$2x^3-6x^2+7x-3=0$, $(x-1)(2x^2-4x+3)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x$는 실수)

(ii) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+7$의 교점의 x좌표는

$2x^3-6x^2+8x-3=-x+7$에서

$2x^3-6x^2+9x-10=0$, $(x-2)(2x^2-2x+5)=0$

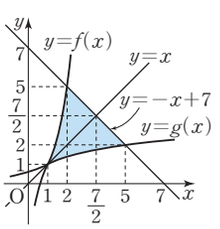
$\therefore x=2$ ($\because x$는 실수)

(iii) 두 직선 $y=x$, $y=-x+7$의 교점의 x좌표는

$x=-x+7$에서

$2x=7$ $\quad\therefore x=\frac{7}{2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+7$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=-x+7$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 도형의 넓이는



$$2\Big[\int_1^2\{(2x^3-6x^2+8x-3)-x\}dx+\int_2^{\frac{7}{2}}\{(-x+7)-x\}dx\Big]$$

$$=2\int_1^2(2x^3-6x^2+7x-3)dx+2\int_2^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=2\Big[\frac{1}{2}x^4-2x^3+\frac{7}{2}x^2-3x\Big]_1^2+2\Big[-x^2+7x\Big]_2^{\frac{7}{2}}$$

$$=2\times1+2\times\frac{9}{4}=\frac{13}{2}$$

답 ②

1062

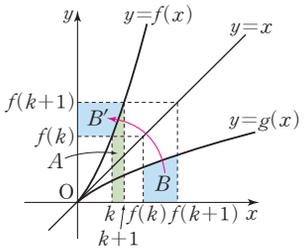
유형 10 함수와 그 역함수의 정적분

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x)=x^2+x$에서 $f'(x)=2x+1$

$x\geq 0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 증가한다.

함수 $f(x)=x^2+x\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서 $B=B'$이므로

$\int_k^{k+1} f(x)dx+\int_{f(k)}^{f(k+1)} g(x)dx$

$=A+B=A+B'=44$

즉, $(k+1)f(k+1)-kf(k)=44$에서

$(k+1)\{(k+1)^2+(k+1)\}-k(k^2+k)=44$

$(k+1)^3+(k+1)^2-k^3-k^2=44$

$3k^2+5k-42=0, (k-3)(3k+14)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$ 답 ②

1063

유형 12 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리

|전략| 두 점 P, Q가 서로 다른 방향으로 움직이면 속도의 부호가 달라야 함을 이용한다.

두 점 P, Q가 서로 다른 방향으로 움직이면 속도의 부호가 달라야 하므로 $v_P(t)v_Q(t)<0$에서

$(t^2-5t)(t^2+2t-3)<0, t(t+3)(t-1)(t-5)<0$

$(t-1)(t-5)<0\ (\because t>0)$ $\therefore 1<t<5$

$v_P(t)=0$에서

$t(t-5)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=5$

이때 $0\leq t\leq 5$에서 $v_P(t)\leq 0, t\geq 5$에서 $v_P(t)\geq 0$이다.

또, $v_Q(t)=0$에서

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=1\ (\because t\geq 0)$

이때 $0\leq t\leq 1$에서 $v_Q(t)\leq 0, t\geq 1$에서 $v_Q(t)\geq 0$이다.

따라서 두 점 P, Q가 서로 다른 방향으로 움직이는 동안 두 점이 움직인 거리의 합은

$\int_1^5(-t^2+5t)dt+\int_1^5(t^2+2t-3)dt$

$=\int_1^5(7t-3)dt=\left[\frac{7}{2}t^2-3t\right]_1^5=72$ 답 ⑤

1064

유형 11 수직선 위를 움직이는 점의 위치

+ 12 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리

|전략| 원점을 출발한 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량은 0임을 이용한다.

$t=a\ (a>0)$일 때 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉, $\int_0^a(-t^2+2t)dt=0$에서

$\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^a=0, -\frac{1}{3}a^3+a^2=0$

$-\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

$v(t)=0$에서 $-t^2+2t=0$

$-t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

이때 $0\leq t\leq 2$에서 $v(t)\geq 0, t\geq 2$에서 $v(t)\leq 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^3|-t^2+2t|dt=\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt$

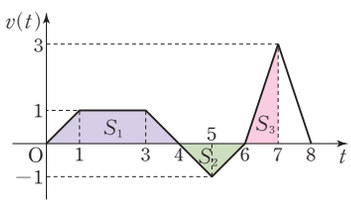
$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 답 ④

1065

유형 13 그래프에서의 위치와 움직인 거리

|전략| 원점을 출발한 점 P의 $t=7$에서의 위치는 $\int_0^7 v(t)dt$, $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^7|v(t)|dt$임을 이용한다.



위의 그림과 같이 속도 $v(t)$의 그래프와 t축이 이루는 각 부분의 넓이를 S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(2+4)\times 1=3, S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1, S_3=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$

$a=\int_0^7 v(t)dt$

$=S_1-S_2+S_3$

$=3-1+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

$b=\int_0^7|v(t)|dt$

$=S_1+S_2+S_3$

$=3+1+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

$\therefore a+b=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}=9$ 답 ③

1066

유형 13 그래프에서의 위치와 움직인 거리

|전략| 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 원점을 출발한 점 P가 원점으로 다시 돌아오면 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

ㄱ. $v(t)=0$인 구간의 길이가 1이 되는 t의 구간이 존재하지 않으므로 점 P는 1초 동안 멈춘 적이 없다. (거짓)

ㄴ. $v(t)$의 값이 양에서 음으로 바뀐 t의 값은 $t=2$이고, 음에서 양으로 바뀐 t의 값은 $t=4$이므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

ㄷ. $\int_0^2 v(t)dt=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt+\int_4^6 v(t)dt$

$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times(1+2)\times2=3$

즉, $t=2$일 때와 $t=6$일 때의 점 P의 위치는 서로 다르다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

1067

유형 06 두 도형의 넓이가 같은 경우

|전략| 정적분과 삼각형, 사각형의 넓이를 이용하여 S_1, S_2, S_3을 구한다.

$S_1=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times1\times\underline{a}=\frac{1}{2}a$이므로 ($y=ax$에서 $x=1$일 때 $y=a$)

$S_2=\frac{1}{2}a-S_1=\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}$

또, $S_1+S_2+S_3=1\times2=2$이므로

$S_3=2-(S_1+S_2)=2-\frac{1}{2}a$ … ❶

이때 $2S_2=S_1+S_3$이므로

$2\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}+\left(2-\frac{1}{2}a\right)$, $a-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}-\frac{1}{2}a$

$\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}$ $\therefore a=\frac{5}{3}$ … ❷

답 $\frac{5}{3}$

채점 기준	배점
❶ S_1의 값을 구하고, S_2, S_3을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $2S_2=S_1+S_3$임을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	3점

다른 풀이 $S_1+S_2+S_3=2$, $2S_2=S_1+S_3$이므로 $3S_2=2$에서 $S_2=\frac{2}{3}$

즉, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$이므로 $a=\frac{5}{3}$

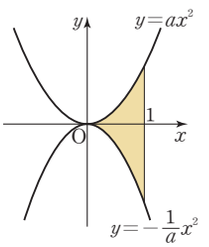
1068

유형 08 도형의 넓이의 최솟값

|전략| 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$의 교점의 x좌표는 $ax^2=-\frac{1}{a}x^2$에서

$\left(a+\frac{1}{a}\right)x^2=0$ $\therefore x=0$



두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\int_0^1\left\{ax^2-\left(-\frac{1}{a}x^2\right)\right\}dx=\int_0^1\left(a+\frac{1}{a}\right)x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ … ❶

이때 a는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S(a)=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{1}{3}\times2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=\frac{2}{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{a}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=1$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 가지므로 … ❷

$k=1$, $m=\frac{2}{3}$ $\therefore k-m=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ … ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	배점
❶ 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 구하는 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	3점
❸ $k-m$의 값을 구할 수 있다.	1점

1069

유형 11 수직선 위를 움직이는 점의 위치

|전략| 두 점 P, Q의 위치를 t에 대한 식으로 나타낸다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(t)=0+\int_0^t(-2t+4)dt=-t^2+4t$

$x_Q(t)=0+\int_0^t(2t-4)dt=t^2-4t$ … ❶

출발한 후 다시 두 점 P, Q가 만날 때 $x_P(t)=x_Q(t)$이므로

$-t^2+4t=t^2-4t$, $2t(t-4)=0$ $\therefore t=4$ ($\because t>0$)

즉, 출발한 후 다시 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t=4$이다. … ❷

이때 두 점 사이의 거리는

$|x_P(t)-x_Q(t)|=2|-t^2+4t|=2|-(t-2)^2+4|$

따라서 $0<t\leq4$에서 $t=2$일 때 최댓값 8을 가지므로 구하는 거리의 최댓값은 8이다. … ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구할 수 있다.	2점
❷ 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 다시 만나는 시각을 구할 수 있다.	2점
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

1070

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1)

|전략| 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

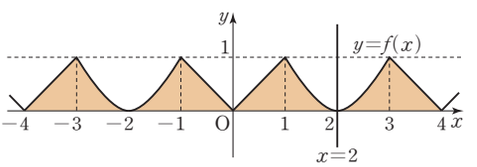
(1) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

(2) $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f(2-x)=f(2+x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-4$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-4}^{4}|f(x)|dx=4\int_{0}^{2}f(x)dx=4\times\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{10}{3}$

채점 기준	배점
(1) $\int_{0}^{2}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	3점
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-4$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	6점

1071

유형 12 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리

|전략| 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s임을 이용한다.

(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서

$30-10t=0$ $\therefore t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 시각은 $t=3$이다.

(2) $t=3$일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$\int_{0}^{3}|30-10t|dt=\int_{0}^{3}(30-10t)dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_{0}^{3}=45\ (\mathrm{m})$$

(3) 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리는

$45+(45+15)=105\ (\mathrm{m})$

답 (1) 3 (2) 45 m (3) 105 m

채점 기준	배점
(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 시각을 구할 수 있다.	2점
(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	4점
(3) 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	3점

창의·융합 실력 마스터

1072

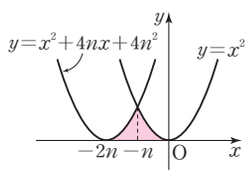
|전략| 곡선 $y=x^2+4nx+4n^2$은 곡선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 $-2n$만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

두 곡선 $y=x^2$, $y=x^2+4nx+4n^2$의 교점의 x좌표는

$x^2=x^2+4nx+4n^2$에서

$4nx+4n^2=0$, $4n(x+n)=0$

$\therefore x=-n$



이때 $y=x^2+4nx+4n^2=(x+2n)^2$이므로 곡선 $y=x^2+4nx+4n^2$은 곡선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 $-2n$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y=x^2$, $y=x^2+4nx+4n^2$과 x축으로 둘러싸인 도형은 직선 $x=-n$에 대하여 대칭이므로

$$S_n=2\int_{-n}^{0}x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-n}^{0}=2\times\frac{1}{3}n^3=\frac{2}{3}n^3$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{9}S_k=\sum_{k=1}^{9}\frac{2}{3}k^3=\frac{2}{3}\times\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2=1350$$

답 1350

1073

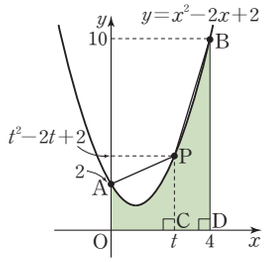
|전략| 먼저 점 P의 x좌표를 t로 놓고, 두 사다리꼴 OCPA, CDBP의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 x좌표를 t라 하면

$\mathrm{P}(t,\ t^2-2t+2)$ $(0<t<4)$

사다리꼴 OCPA의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}t\{(t^2-2t+2)+2\}$$
$$=\frac{1}{2}(t^3-2t^2+4t)$$



사다리꼴 CDBP의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\frac{1}{2}(4-t)\{(t^2-2t+2)+10\}$$
$$=\frac{1}{2}(-t^3+6t^2-20t+48)$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{2}(t^3-2t^2+4t)+\frac{1}{2}(-t^3+6t^2-20t+48)$$
$$=\frac{1}{2}(4t^2-16t+48)=2t^2-8t+24$$

위의 그림의 색칠한 도형의 넓이를 S_3이라 하면

$$S_3=\int_{0}^{4}(x^2-2x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_{0}^{4}=\frac{40}{3}$$

이때 $f(t)=|S_1+S_2-S_3|$이라 하면 $f(t)$가 최소일 때 두 사다리꼴 OCPA와 CDBP의 넓이의 합이 색칠한 도형의 넓이에 가장 가까워진다.

$$f(t)=\left|(2t^2-8t+24)-\frac{40}{3}\right|=\left|2t^2-8t+\frac{32}{3}\right|$$
$$=\left|2(t-2)^2+\frac{8}{3}\right|$$

이므로 $f(t)$는 $t=2$일 때 최솟값 $\frac{8}{3}$을 갖는다.

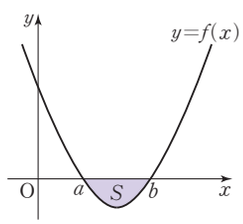
따라서 구하는 점 P의 x좌표는 2이다. 답 2

1074

|전략| 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구하고, $f'(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 $\int_{0}^{b}|f'(x)|dx$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_{a}^{b}f(x)dx$$



이때 조건 (가)에서

$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\frac{4}{3}$이므로 $S=\frac{4}{3}$

한편,

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\int_{a}^{b}|(x-a)(x-b)|dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3\ (\because b-a>0)$$

즉, $\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{4}{3}$이므로

$(b-a)^3=8$ $\therefore b-a=2$ ····· ㉠

또, 조건 (나)에서 $\int_{-a}^{b-a} f(x+a)dx=\int_0^b f(x)dx=0$이므로

$\int_0^b (x-a)(x-b)dx=0$

$\int_0^b \{x^2-(a+b)x+ab\}dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+b)x^2+abx\right]_0^b=0$

$\frac{1}{3}b^3-\frac{b^2(a+b)}{2}+ab^2=0,\ \frac{-b^3+3ab^2}{6}=0$

$-b^2(b-3a)=0 \qquad \therefore\ b=3a\ (\because b>0)$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

따라서 $f'(x)=2x-4$이므로

$\int_0^b |f'(x)|dx=\int_0^3 |2x-4|dx$

$=\int_0^2 (-2x+4)dx+\int_2^3 (2x-4)dx$

$=\left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3$

$=4+1=5$ 답 5

다른 풀이 $f(x)=(x-1)(x-3)$이고 $f'(x)=2x-4$이므로

$\int_0^3 |f'(x)|dx=-\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx$

$=-\{f(2)-f(0)\}+f(3)-f(2)$

$=-(-1-3)+0-(-1)=4+1=5$

1075

|전략| 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다는 것을 이용한다.

$f(x)=-x^3+4x^2-2x-2$에서 $f'(x)=-3x^2+8x-2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-k^3+4k^2-2k-2)=(-3k^2+8k-2)(x-k)$ ····· ㉠

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ -2)$를 지나므로

$-2-(-k^3+4k^2-2k-2)=-k(-3k^2+8k-2)$

$k^3-4k^2+2k=3k^3-8k^2+2k$

$2k^3-4k^2=0,\ 2k^2(k-2)=0 \qquad \therefore\ k=2\ (\because k>0)$

즉, 직선 AB의 방정식은 ㉠에 $k=2$를 대입하면

$y=2x-2$

이때

$S_1=\int_0^2 \{(2x-2)-f(x)\}dx,\ S_2=\int_0^2 \{g(x)-(2x-2)\}dx$

이고, $3S_1=S_2$이므로

$3\int_0^2 \{(2x-2)-f(x)\}dx=\int_0^2 \{g(x)-(2x-2)\}dx$

$\therefore\ \int_0^k g(x)dx=\int_0^2 g(x)dx$

$=3\int_0^2 \{(2x-2)-f(x)\}dx+\int_0^2 (2x-2)dx$

$=\int_0^2 \{4(2x-2)-3f(x)\}dx$

$=\int_0^2 \{(8x-8)-(-3x^3+12x^2-6x-6)\}dx$

$=\int_0^2 (3x^3-12x^2+14x-2)dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+7x^2-2x\right]_0^2=4$ 답 4

1076

|전략| $x\geq 0$에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다.

$x\geq 0$에서 $f(x)$가 증가함수이고, $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다.

이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+a=x$, 즉 $x^2-4x+4a=0$의 두 근이 $b,\ 3b$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$b+3b=4,\ 4b=4 \qquad \therefore\ b=1$

$b\times 3b=4a,\ 4a=3 \qquad \therefore\ a=\frac{3}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$

$\int_b^{3b} |f(x)-g(x)|dx$, 즉 $\int_1^3 |f(x)-g(x)|dx$의 값은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$\therefore\ \int_1^3 |f(x)-g(x)|dx=2\int_1^3 \{x-f(x)\}dx$

$=2\int_1^3 \left\{x-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}\right)\right\}dx$

$=2\int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x^2+x-\frac{3}{4}\right)dx$

$=2\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x\right]_1^3$

$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

참고 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

1077

|전략| 먼저 자동차 B가 출발한 지 몇 초 후에 P 지점에 도달하는지 구한다.

자동차 B가 출발한 지 a $(a>0)$초 후에 P지점에 도달한다고 하자.

자동차 B가 출발한 후 2초 동안 움직인 거리는

$\int_0^2 |t(2-t)+4|dt=\int_0^2 \{t(2-t)+4\}dt$

$=\int_0^2 (-t^2+2t+4)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+4t\right]_0^2=\frac{28}{3}$ (m)

이때 $\frac{28}{3}<\frac{100}{3}$이므로 $a>2$이다.

자동차 B가 2초에서 a초까지 움직인 거리는

$\int_2^a 4\,dt=\left[4t\right]_2^a=4(a-2)$ (m)

이므로 $\frac{28}{3}+4(a-2)=\frac{100}{3}$에서

$28+12(a-2)=100,\ 12a=96$

$\therefore\ a=8$

이때 자동차 A가 8초 동안 움직인 거리는

$\int_0^8 5\,dt=\left[5t\right]_0^8=40$ (m)

이므로 자동차 A는 P지점으로부터 40 m 이내에 있어야 자동차 B보다 P지점을 먼저 지날 수 있다. 답 40 m

Memo

Memo

Memo

Memo