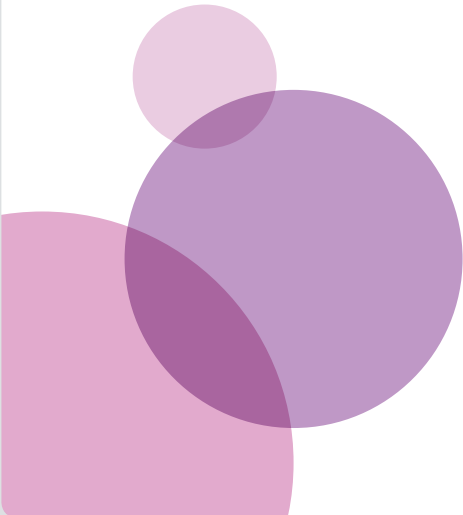


짧지만 개념에 강한 **짤강 대수**
정답과 해설

01	지수	02
02	로그	05
03	지수함수와 로그함수	09
04	지수함수와 로그함수의 활용	13
05	삼각함수	19
06	삼각함수의 그래프와 성질	25
07	사인법칙과 코사인법칙	33
08	등차수열	37
09	등비수열	42
10	수열의 합	47
11	수학적 귀납법	53



기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 009쪽

1-1 (1) -6 (2) 5, 7

1-2 (1) $9^2=81$, $(-9)^2=81$ 이므로

81의 제곱근은 9, -9이다.

(2) $12^2=144$, $(-12)^2=144$ 이므로

144의 제곱근은 12, -12이다.

(3) $\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$, $\left(-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$ 이므로 $\frac{9}{100}$ 의 제곱근은 $\frac{3}{10}$, $-\frac{3}{10}$ 이다.(4) $0.8^2=0.64$, $(-0.8)^2=0.64$ 이므로

0.64의 제곱근은 0.8, -0.8이다.

2-1 (1) 2, 3 (2) 50

2-2 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{10} \div \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 10} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
 $= \sqrt{4} = 2$ (2) $\sqrt{24} \div \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{6} = \sqrt{12} \times \sqrt{6}$
 $= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (3) $\frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
 $= \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{\frac{5}{2}} \div \sqrt{\frac{10}{3}} \times \sqrt{\frac{14}{3}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{\frac{14}{3}}$
 $= \sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{14}{3}}$
 $= \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

3-1 (1) 1, 3 (2) 9, b

3-2 (1) $a^2b^5 \times 3ab^3 = 3a^{2+1}b^{5+3} = 3a^3b^8$ (2) $(ab)^5 \times \left(\frac{a}{b}\right)^3 = a^5b^5 \times \frac{a^3}{b^3} = a^{5+3}b^{5-3} = a^8b^2$ (3) $4a^4b^3 \div 2a^2b^2 = 2a^{4-2}b^{3-2} = 2a^2b$ (4) $(a^2b)^5 \div (a^3b^3)^3 = a^{10}b^5 \div a^9b^9$

$$= \frac{a^{10-9}}{b^{9-5}} = \frac{a}{b^4}$$

본문 | 010~015쪽

1-1 (1) 2, -1, -1 (2) -2, 1, -2

1-2 (1) 1의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3=1, x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

따라서 1의 세제곱근은

$$1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

(2) -1의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3=-1, x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -1의 세제곱근은

$$-1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

(3) 27의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3=27, x^3-27=0, (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 27의 세제곱근은

$$3, \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$$

(4) -27의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3=-27, x^3+27=0, (x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -27의 세제곱근은

$$-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$$

2-1 $2i, 2i$ 2-2 (1) 1의 네제곱근을 x 라 하면

$$x^4=1, x^4-1=0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$$

$$\therefore x=\pm 1 \text{ 또는 } x=\pm i$$

따라서 1의 네제곱근은

$$1, -1, i, -i$$

(2) 4의 네제곱근을 x 라 하면

$$x^4=4, x^4-4=0$$

$$(x^2-2)(x^2+2)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}i$$

따라서 4의 네제곱근은

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$$

3-1 (1) 2 (2) -2 (3) 2, -2 (4) 없다

3-2 (1) 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은

$$\sqrt[3]{64}=4$$

(2) -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은

$$\sqrt[3]{-64}=-4$$

(3) 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은

$$\sqrt[4]{81}=3, -\sqrt[4]{81}=-3$$

(4) -81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

4-1 (1) 5 (2) -4

4-2 (1) -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

(2) 256의 네제곱근 중에서 양의 실수인 것은

$$\sqrt[4]{256} = 4$$

(3) 32의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

(4) 64의 여섯제곱근 중에서 음의 실수인 것은

$$-\sqrt[6]{64} = -2$$

5-1 (1) 3 (2) 4, 2 (3) 2, 9 (4) 6, 2

5-2 (1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2) $\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(3) $(\sqrt[4]{4})^6 = \sqrt[4]{4^6} = \sqrt[4]{(2^2)^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^{3 \times 4}} = 2^3 = 8$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7^{24}}} = \sqrt[4]{7^{24 \div 3}} = \sqrt[4]{7^{24 \div 3}} = \sqrt[4]{7^{24 \div 3}} = 7^2 = 49$

6-1 (1) 2, 4 (2) 4, 0

6-2 (1) $2^4 \sqrt{32} + 3^4 \sqrt{2} = 2^4 \sqrt{16 \times 2} + 3^4 \sqrt{2}$

$$= 2^4 \sqrt{2^4 \times 2} + 3^4 \sqrt{2}$$

$$= 2^4 \sqrt{2^4} \times \sqrt{2} + 3^4 \sqrt{2}$$

$$= 4^4 \sqrt{2} + 3^4 \sqrt{2} = 7^4 \sqrt{2}$$

(2) $3^4 \sqrt{243} - 2^4 \sqrt{48} = 3^4 \sqrt{81 \times 3} - 2^4 \sqrt{16 \times 3}$

$$= 3^4 \sqrt{3^4 \times 3} - 2^4 \sqrt{2^4 \times 3}$$

$$= 3^4 \sqrt{3^4} \times \sqrt{3} - 2^4 \sqrt{2^4} \times \sqrt{3}$$

$$= 9^4 \sqrt{3} - 4^4 \sqrt{3} = 5^4 \sqrt{3}$$

7-1 (1) 1 (2) 1 (3) 4, 16 (4) 3

7-2 (1) $3^0 = 1$

(2) $(\sqrt{7})^0 = 1$

(3) $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

(4) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

8-1 (1) -1, 3 (2) 2, 25 (3) 6 (4) 12

8-2 (1) $7^6 \times 7^{-4} = 7^{6+(-4)} = 7^2 = 49$

(2) $(3^2)^{-3} \div 3^{-3} = 3^{-6} \div 3^{-3} = 3^{-6-(-3)} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

(3) $(a^5 \div a^8)^{-5} = (a^{5-8})^{-5} = (a^{-3})^{-5} = a^{15}$

(4) $(a^2 b^{-4})^{-3} = a^{2 \times (-3)} b^{(-4) \times (-3)} = a^{-6} b^{12} = \frac{b^{12}}{a^6}$

9-1 (1) 2 (2) 6 (3) a (4) -4

9-2 (1) $\sqrt[5]{a^9} = a^{\frac{9}{5}}$ (2) $\sqrt[4]{a^{-5}} = a^{-\frac{5}{4}}$

(3) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ (4) $a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10-1 (1) 4 (2) 3, 2, 4 (3) 3, 8 (4) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

10-2 (1) $\sqrt[6]{25} \div \sqrt[3]{625} = \sqrt[6]{5^2} \div \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{2}{6}} \div 5^{\frac{4}{3}}$
 $= 5^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(2) $(16 \times 25)^{\frac{3}{4}} = (2^4 \times 5^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \times \frac{3}{4}} \times 5^{2 \times \frac{3}{4}}$
 $= 2^3 \times 5^{\frac{3}{2}} = 8 \times 5^{\frac{3}{2}}$

(3) $2^{3\sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{50}} = 2^{3\sqrt{2}} \times 2^{5\sqrt{2}}$
 $= 2^{3\sqrt{2}+5\sqrt{2}} = 2^{8\sqrt{2}}$

(4) $(6^{\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6^{\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 6^{\sqrt{2}}$

11-1 (1) 2 (2) 47 (3) 1, 3

11-2 (1) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$a + 2 + a^{-1} = 8 \quad \therefore a + a^{-1} = 6$$

(2) $(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 = a - 2 + a^{-1} = 4$

이때 $a > 1$ 이므로 $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} > 0$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2$$

(3) $a + a^{-1} = 6$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 36 \quad \therefore a^2 + a^{-2} = 34$$

(4) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ 의 양변을 세제곱하면

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) = 16\sqrt{2}$$

이때 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = 1$ 이므로

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 16\sqrt{2} - 3 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

12-1 1

12-2 (1) $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1}$
 $= \frac{3+1}{3-1} = 2$

(2) $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x} + a^{-3x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1}$
 $= \frac{(a^{2x})^2 + \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x} - 1} = \frac{3^2 + \frac{1}{3}}{3-1} = \frac{14}{3}$

집중 연습

본문 | 016, 017쪽

1 (1) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(2) $\sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(3) $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt{5^{12}}} = \sqrt[6]{5^{12}} = 5^2 = 25$$

$$(5) \sqrt[6]{9 \div \sqrt[3]{81}} = \sqrt[6]{3^2 \div \sqrt[3]{81}} = \sqrt[6]{3^2 \div \sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[6]{\frac{3}{3}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$(6) \sqrt[4]{16^2} \times (\sqrt[3]{3})^6 \div \sqrt[3]{64} = 4 \sqrt[4]{4^4} \times \sqrt[3]{3^6} \div \sqrt[3]{2^6} = 4 \times 3^2 \div 2 = 18$$

2 (1) $(2^{-3} \times 3^2)^{-2} = 2^{(-3) \times (-2)} \times 3^{2 \times (-2)} = 2^6 \times 3^{-4} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$

(2) $(a^{-2}b)^{-3} = a^{(-2) \times (-3)} b^{-3} = a^6 b^{-3} = \frac{a^6}{b^3}$

(3) $(a^{-1})^{-2} \times a^{-3} = a^2 \times a^{-3} = a^{2+(-3)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

(4) $a^3 \times a^{-4} \div a^{-5} = a^{3+(-4)-(-5)} = a^4$

(5) $(a^2b^{-3})^2 \div \left(\frac{a^5}{b^2}\right)^3 = a^4 b^{-6} \div \frac{a^{15}}{b^6} = a^{4-15} b^{-6-(-6)} = a^{-11} = \frac{1}{a^{11}}$

(6) $(a^2b^3)^4 \div (a^4b^3)^2 \times \left(\frac{a}{b^3}\right)^3 = a^8 b^{12} \div a^8 b^6 \times \frac{a^3}{b^9} = a^{8-8+3} b^{12-6+(-9)} = a^3 b^{-3} = \frac{a^3}{b^3}$

3 (1) $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

(2) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[5]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{5}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = \frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}$

(4) $\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}} = \frac{a^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}} = a^{-\frac{11}{24}}$

(5) $\sqrt[3]{a \sqrt{a^5}} = \sqrt[3]{a \times a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}} = (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$

(6) $\sqrt[3]{a^4 \sqrt{a}} = \sqrt[3]{a \times a^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{7}{3}}} = (a^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{9}}$

4 (1) $2^{-\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2$

(2) $3^{\sqrt{2}+2} \div 3^{\sqrt{2}-1} = 3^{\sqrt{2}+2-(\sqrt{2}-1)} = 3^3 = 27$

(3) $(\sqrt{8})^{-\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{2^3})^{-\frac{4}{3}} = (2^{\frac{3}{3}})^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{3} \times (-\frac{4}{3})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(4) $(2^{\frac{3}{2}} \times 3^{-0.5})^4 = (2^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}})^4 = 2^6 \times 3^{-2} = \frac{64}{9}$

(5) $9^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{-\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+(-\sqrt{2})} = 3^{\sqrt{2}}$

(6) $\sqrt[4]{a^8 b^3} \div \sqrt[4]{a^4 b^3} = (a^8 b^3)^{\frac{1}{4}} \div \{(a^4 b^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = a^2 b^{\frac{3}{4}} \div (a^2 b^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^2 b^{\frac{3}{4}} \div a b^{\frac{3}{4}} = a$

기초 개념 평가

본문 | 018, 019쪽

- | | |
|--------------------------|------------------|
| 01 n 제곱 | 02 제곱근, 세제곱근 |
| 03 거듭제곱근 | 04 실근 |
| 05 $a > 0, a = 0, a < 0$ | 06 $\sqrt[n]{a}$ |
| 07 ab | 08 $\frac{a}{b}$ |
| 09 m | 10 mn |
| 11 2 | 12 7 |
| 13 6 | 14 12, 6 |
| 15 2 | 16 2 |
| 17 4 | 18 $3, \sqrt{2}$ |
| 19 $a - a^{-1}$ | 20 $a + a^{-1}$ |

기초 문제 평가

본문 | 020, 021쪽

- 1** ⑤ 81의 음수인 네제곱근은 $-\sqrt[4]{81}$ 로 나타낸다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.
- 2** $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ 이므로 -2 의 세제곱근은 3개이고,
그 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$ 의 1개이다.
 $\therefore m=3, n=1$
- 3** ③ $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[6]{128^2} = \sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{128^2} = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^{17}} = 2^{\frac{17}{3}} = 2^5 \times 2^{\frac{2}{3}} = 32 \times \sqrt[3]{2} = 32\sqrt[3]{2}$
- ④ $\sqrt[3]{\sqrt{81}} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^4} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^2} = 3 \times \sqrt[3]{9} = 3\sqrt[3]{9}$
- ⑤ $\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[3]{2^6} \div \sqrt[5]{2^{10}} = 2 \div 2^2 = \frac{1}{2}$
- 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.
- 4** (1) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2^6} = -2 + 2 + 2 = 2$
- (2) $\sqrt[3]{21} \div \sqrt[3]{3^4} \times \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{\frac{21 \times 7^2}{3^4}} = \sqrt[3]{\frac{7^3}{3^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^3} = \frac{7}{3}$
- 5** ① $a^5 a^{-5} = a^{5+(-5)} = 1$
- ② $(a^{-2})^{-4} = a^{(-2) \times (-4)} = a^8$
- ③ $(a^{-1}b^2)^{-6} = a^6 b^{-12} = \frac{a^6}{b^{12}}$
- ④ $(a^{-4}b^2)^2 \times a^6 b^{-2} = a^{-8} b^4 \times a^6 b^{-2} = a^{-2} b^2 = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$
- ⑤ $(a^2b^{-3})^{-3} \div (ab^2)^2 = a^{-6} b^9 \div a^2 b^4 = a^{-8} b^5 = \frac{b^5}{a^8}$
- 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

6 $3^a \times 3^b = \frac{1}{81}$ 에서 $3^{a+b} = 3^{-4} \quad \therefore a+b = -4$

7 $a = \sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}} \quad \therefore 9^{\frac{3}{4}} = (3^2)^{\frac{3}{4}} = (3^{\frac{3}{4}})^2 = a^2$
따라서 $9^{\frac{3}{4}}$ 과 같은 것은 ㉔이다.

8 $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
 $\sqrt{a\sqrt{a^k}} = \sqrt{a \times a^{\frac{k}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{k+2}{2}}} = (a^{\frac{k+2}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{k+2}{4}}$
 $\frac{1}{3} = \frac{k+2}{4}$ 이므로 $3k+6=4 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$

9 $3^{\frac{1}{2}} \times 3^m \div 3^{\frac{1}{6}} = 1$ 에서 $3^{\frac{1}{2}+m-\frac{1}{6}} = 1$
즉, $3^{m+\frac{1}{3}} = 1$ 이므로 $m+\frac{1}{3}=0 \quad \therefore m = -\frac{1}{3}$

10 (1) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} \div a^{-\frac{7}{12}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-(-\frac{7}{12})} = a^{\frac{24}{12}} = a^2$
(2) $(a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}})^6 \div (a^{\frac{3}{4}})^{12} = a^{10}b^3 \div a^9 = a^{10-9}b^3 = ab^3$

11 (1) $5^{\sqrt{2}+2} \times 5^{\sqrt{2}-1} \div 25^{\sqrt{2}+1} = 5^{\sqrt{2}+2} \times 5^{\sqrt{2}-1} \div 5^{2(\sqrt{2}+1)}$
 $= 5^{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-1-(2\sqrt{2}+2)} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$
(2) $(2^{\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}} \div (2^{2+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}-2} \div 2^{2\sqrt{2}+2}$
 $= 2^{2\sqrt{2}-2-(2\sqrt{2}+2)} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

12 $2^{5a} \div 3^{3b} = (2^a)^5 \div (3^b)^3 = 5^5 \div 25^3 = 5^5 \div 5^6 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

13 $5^x = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{x}}$
 $9^y = k$ 에서 $9 = k^{\frac{1}{y}} \quad \therefore 3 = k^{\frac{1}{2y}}$
 $k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{2y}} = 5 \times 3 = 15, k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}} = 15$
이때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 1$ 이므로 $k = 15$

14 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면
 $x + 2 + x^{-1} = 16 \quad \therefore x + x^{-1} = 14$
 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 세제곱하면
 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 64$
 $\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 64 - 3 \times 4 = 52$
 $\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3}{x + x^{-1} + 1} = \frac{52+3}{14+1} = \frac{11}{3}$

15 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{3}$ 에서
 $\frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{1}{3}$
 $3a^{2x} - 3 = a^{2x} + 1 \quad \therefore a^{2x} = 2$
 $\therefore a^{6x} = (a^{2x})^3 = 2^3 = 8$

1-1 (1) 81 (2) 16

1-2 (1) $2^{-3} = \frac{1}{8} \iff -3 = \log_2 \frac{1}{8}$
(2) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \iff 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2-1 (1) 7, 7 (2) -3, -3

2-2 (1) $\log_2 16 = x$ 로 놓으면 $2^x = 16$
 $2^x = 2^4$ 에서 $x = 4$
따라서 $\log_2 16 = 4$ 이다.

(2) $\log_4 \frac{1}{64} = x$ 로 놓으면 $4^x = \frac{1}{64}$
 $4^x = 4^{-3}$ 에서 $x = -3$
따라서 $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ 이다.

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$ 로 놓으면 $(\frac{1}{3})^x = 9$
 $3^{-x} = 3^2$ 에서 $-x = 2 \quad \therefore x = -2$
따라서 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 이다.

(4) $\log_{0.1} \frac{1}{100} = x$ 로 놓으면 $0.1^x = \frac{1}{100}$
 $10^{-x} = 10^{-2}$ 에서 $-x = -2 \quad \therefore x = 2$
따라서 $\log_{0.1} \frac{1}{100} = 2$ 이다.

3-1 (1) 2, 4, 4 (2) 36, -1

3-2 (1) $\log_5 \sqrt{125} = \log_5 \sqrt{5^3} = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2}$

(2) $\log_2 3\sqrt{2} - \log_2 3 = \log_2 \frac{3\sqrt{2}}{3} = \log_2 \sqrt{2}$
 $= \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

(3) $\log_2 \frac{4}{3} + 2 \log_2 \sqrt{12} = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 (\sqrt{12})^2$
 $= \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12$
 $= \log_2 \left(\frac{4}{3} \times 12 \right)$
 $= \log_2 16 = \log_2 2^4$
 $= 4 \log_2 2 = 4$

(4) $4 \log_5 \sqrt{15} - \frac{2}{3} \log_5 27 = 4 \log_5 15^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \log_5 3^3$
 $= 2 \log_5 15 - 2 \log_5 3$
 $= 2(\log_5 15 - \log_5 3)$
 $= 2 \log_5 \frac{15}{3} = 2 \log_5 5 = 2$

4-1 (1) 3, 2 (2) 4, 2, 2

4-2 (1) $\log_{10} 30 = \log_{10} (3 \times 10) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10$
 $= b + 1$
 (2) $\log_{10} \frac{6}{5} = \log_{10} \frac{12}{10} = \log_{10} (2^2 \times 3) - \log_{10} 10$
 $= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 - 1 = 2a + b - 1$
 (3) $\log_{10} \frac{27}{50} = \log_{10} \frac{54}{100} = \log_{10} (2 \times 3^3) - \log_{10} 10^2$
 $= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^3 - 2 = a + 3b - 2$
 (4) $\log_{10} 0.036 = \log_{10} \frac{36}{1000} = \log_{10} (2^2 \times 3^2) - \log_{10} 10^3$
 $= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3^2 - 3$
 $= 2a + 2b - 3$

5-1 (1) 5 (2) 2, 2 (3) 8

5-2 (1) $\log_{27} \frac{1}{81} = \frac{\log_3 \frac{1}{81}}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 3^3} = -\frac{4}{3}$
 (2) $\log_3 5 \times \log_5 \sqrt{3} = \frac{1}{\log_5 3} \times \log_5 3^{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{1}{\log_5 3} \times \frac{1}{2} \log_5 3 = \frac{1}{2}$
 (3) $\log_{27} 4 \times \log_8 5 \times \log_5 3 = \frac{\log_3 4}{\log_3 27} \times \frac{\log_3 5}{\log_3 8} \times \frac{1}{\log_3 5}$
 $= \frac{\log_3 2^2}{\log_3 3^3 \times \log_3 2^3} \times \frac{1}{\log_3 5}$
 $= \frac{2 \log_3 2}{3 \times 3 \log_3 2} = \frac{2}{9}$
 (4) $3 \log_5 2 - 2 \log_5 \sqrt{5} + \log_5 4$
 $= \log_5 2^3 - \log_5 5 + \log_5 4$
 $= \log_5 \frac{8 \times 4}{5} = \log_5 \frac{32}{5}$
 $\therefore (\text{주어진 식}) = 5^{\log_5 \frac{32}{5}} = \frac{32}{5}$

6-1 (1) 2, 2b (2) 2, 10, a

6-2 (1) $\log_3 16 = \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3} = \frac{4 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{4a}{b}$
 (2) $\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} \frac{10}{2}}$
 $= \frac{\log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} = \frac{b}{1 - a}$
 (3) $\log_3 \sqrt{8} = \frac{\log_{10} \sqrt{8}}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 3}$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{3a}{2b}$
 (4) $\log_2 \sqrt{12} = \frac{\log_{10} \sqrt{12}}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 12^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} 2}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} (2^2 \times 3)}{2 \log_{10} 2}$
 $= \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{2 \log_{10} 2} = \frac{2a + b}{2a}$

7-1 (1) 2 (2) -1, -1

7-2 (1) $\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$
 (2) $\log \sqrt[3]{10^4} = \log 10^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \log 10 = \frac{4}{3}$
 (3) $\log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2}$
 (4) $\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$

8-1 (1) 2, 2.5092 (2) -1, -0.4908

8-2 (1) $\log 236 = \log (10^2 \times 2.36) = \log 10^2 + \log 2.36$
 $= 2 + 0.3729 = 2.3729$
 (2) $\log 23600 = \log (10^4 \times 2.36) = \log 10^4 + \log 2.36$
 $= 4 + 0.3729 = 4.3729$
 (3) $\log 0.236 = \log (10^{-1} \times 2.36) = \log 10^{-1} + \log 2.36$
 $= -1 + 0.3729 = -0.6271$
 (4) $\log 0.0236 = \log (10^{-2} \times 2.36) = \log 10^{-2} + \log 2.36$
 $= -2 + 0.3729 = -1.6271$

집중 연습

본문 | 026, 027쪽

1 (1) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{0.001}} = \log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10^{-3}}} = \log_{10} \frac{1}{10^{-1}}$
 $= \log_{10} 10 = 1$
 (2) $2 \log_{10} \frac{1}{10} + \log_{10} 100 = \log_{10} \left(\frac{1}{10^2} \times 100 \right) = \log_{10} 1 = 0$
 (3) $\log_3 12 + 2 \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 12 + \log_3 \left(\frac{9}{2} \right)^2$
 $= \log_3 \left(12 \times \frac{81}{4} \right) = \log_3 3^5 = 5$
 (4) $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt{27} + \log_3 \sqrt{3}$
 $= \log_3 (\sqrt{27} \times \sqrt{3})$
 $= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
 (5) $2 \log_2 12 - \log_2 18 = \log_2 12^2 - \log_2 18 = \log_2 \frac{144}{18}$
 $= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
 (6) $2 \log_5 \sqrt{5} + 3 \log_5 2 - 6 \log_5 \sqrt{2}$
 $= \log_5 (\sqrt{5})^2 + \log_5 2^3 - \log_5 (\sqrt{2})^6$
 $= \log_5 \frac{5 \times 8}{8} = \log_5 5 = 1$

2 (1) $\log_5 6 = \log_5 (2 \times 3) = \log_5 2 + \log_5 3 = a + b$
 (2) $\log_5 12 = \log_5 (2^2 \times 3) = \log_5 2^2 + \log_5 3 = 2a + b$
 (3) $\log_5 30 = \log_5 (2 \times 3 \times 5) = \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5$
 $= a + b + 1$

$$\begin{aligned}
 (4) \log_5 \frac{18}{5} &= \log_5 18 - \log_5 5 = \log_5 (2 \times 3^2) - \log_5 5 \\
 &= \log_5 2 + \log_5 3^2 - 1 = a + 2b - 1 \\
 (5) \log_5 \frac{27}{2} &= \log_5 27 - \log_5 2 = \log_5 3^3 - \log_5 2 = -a + 3b \\
 (6) \log_5 \frac{100}{9} &= \log_5 100 - \log_5 9 = \log_5 10^2 - \log_5 3^2 \\
 &= 2(\log_5 2 + \log_5 5) - 2\log_5 3 = 2a - 2b + 2
 \end{aligned}$$

3 (1) $\log_{100} \sqrt{10} = \log_{10^2} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{4}$

(2) $\log_3 7 \times \log_7 9 = \frac{1}{\log_7 3} \times \log_7 3^2 = 2$

(3) $\log_9 2 \times \log_8 9 = \log_9 2 \times \frac{1}{\log_9 8}$
 $= \log_9 2 \times \frac{1}{\log_9 2^3} = \frac{1}{3}$

(4) $\log_2 5 \times \log_5 7 \times \log_7 8 = \log_2 5 \times \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$
 $= \log_2 2^3 = 3$

(5) $\log_3 2 \times \log_8 0.2 \times \log_5 9 = \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 0.2}{\log_2 8} \times \frac{\log_2 9}{\log_2 5}$
 $= \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 \frac{1}{5}}{\log_2 2^3} \times \frac{\log_2 3^2}{\log_2 5}$
 $= \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{-\log_2 5}{3} \times \frac{2\log_2 3}{\log_2 5}$
 $= -\frac{2}{3}$

(6) $\log_4 48 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} = \log_{2^2} (2^4 \times 3) + \log_{2^{-1}} 3^{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{1}{2} \log_2 (2^4 \times 3) - \frac{1}{2} \log_2 3$
 $= \frac{1}{2} (4 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3 = 2$

4 (1) $\log_2 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{a+b}{a}$

(2) $\log_3 24 = \frac{\log_{10} 24}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 3}{\log_{10} 3} = \frac{3a+b}{b}$

(3) $\log_6 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6} = \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \frac{2b}{a+b}$

(4) $\log_4 \sqrt{3} = \frac{\log_{10} \sqrt{3}}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 3^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} 2^2} = \frac{\frac{1}{2}b}{2a} = \frac{b}{4a}$

(5) $\log_9 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 9} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3^2}{\log_{10} 3^2} = \frac{a+2b}{2b}$

(6) $\log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} \frac{100}{2}}{\log_{10} \frac{10}{2}}$
 $= \frac{2 - \log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2} = \frac{2-a}{1-a}$

기초 개념 평가

본문 | 028, 029쪽

- | | |
|---------------|---------------|
| 01 $a > 0$ | 02 밑, 로그, 진수 |
| 03 3 | 04 -5 |
| 05 4 | 06 $\sqrt{5}$ |
| 07 0, 1 | 08 + |
| 09 - | 10 k |
| 11 $\log_c b$ | 12 $\log_b a$ |
| 13 $\log_a b$ | 14 $\log_a b$ |
| 15 $\log_c a$ | 16 밑 |
| 17 0.01, 넷째 | 18 가로줄, 세로줄 |

기초 문제 평가

본문 | 030, 031쪽

- 1** ① $3^5 = 243 \iff 5 = \log_3 243$
 ② $5^0 = 1 \iff 0 = \log_5 1$
 ③ $(\sqrt{3})^2 = 3 \iff 2 = \log_{\sqrt{3}} 3$
 ④ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \iff \frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5}$
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.
- 2** $\log_a 16 = 2$ 에서 $a^2 = 16$
 이때 $a > 0, a \neq 1$ 이므로 $a = 4$
 $\log_5 b = 2$ 에서 $5^2 = b$ 이므로 $b = 25$
 $\therefore a = 4, b = 25$
- 3** $\log_{a-1} (5-a)$ 에서
 (i) (밑) > 0 , (밑) $\neq 1$ 이므로
 $a-1 > 0, a-1 \neq 1 \quad \therefore 1 < a < 2$ 또는 $a > 2$
 (ii) (진수) > 0 이므로 $5-a > 0 \quad \therefore a < 5$
 (i), (ii)에서 $1 < a < 2$ 또는 $2 < a < 5$
 따라서 정수 a 의 값은 3, 4이다.
- 4** $\log_2 (x+y) = 3$ 에서 $2^3 = x+y$
 $\log_2 x + \log_2 y = 3$ 에서 $\log_2 xy = 3$ 이므로 $2^3 = xy$
 $x+y=8, xy=8$ 이므로
 $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 8^2 - 2 \times 8 = 48$
- 5** $\log_2 12 - \log_2 9 + 2 \log_2 \sqrt{6}$
 $= \log_2 12 - \log_2 9 + \log_2 (\sqrt{6})^2$
 $= \log_2 \left(\frac{12}{9} \times 6 \right) = \log_2 8$
 $= \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$

6 이차방정식 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 a + \log_2 b = 5, \log_2 a \times \log_2 b = 2$
 $\therefore \log_a b + \log_b a$
 $= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$
 $= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{\log_2 a \times \log_2 b}$
 $= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b}$
 $= \frac{5^2 - 2 \times 2}{2} = \frac{21}{2}$

7 $\frac{\log_2 4}{8} = \frac{\log_2 2^2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 이므로
 $\frac{\log_8 a}{2} = \frac{1}{4}$ 에서
 $\log_8 a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$
 $\frac{\log_4 b}{4} = \frac{1}{4}$ 에서
 $\log_4 b = 1 \quad \therefore b = 4$
 $\therefore a^2 b = (2^{\frac{3}{2}})^2 \times 4 = 2^3 \times 4 = 32$

8 $3 \log_2 5 + 4 \log_4 5 + \log_{\sqrt{2}} 5 + \log_{\frac{1}{2}} 5$
 $= 3 \log_2 5 + 4 \log_{2^2} 5 + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 5 + \log_{2^{-1}} 5$
 $= 3 \log_2 5 + 2 \log_2 5 + 2 \log_2 5 - \log_2 5$
 $= 6 \log_2 5$
 $6 \log_2 5 = a \log_2 5$ 에서 $a = 6$

9 (1) $\log_4 27 \times \log_9 25 \times \log_5 16$
 $= \log_{2^2} 3^3 \times \log_{3^2} 5^2 \times \log_5 2^4$
 $= \frac{3}{2} \log_2 3 \times \log_3 5 \times 4 \log_5 2$
 $= \frac{3}{2} \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{4}{\log_2 5}$
 $= \frac{3}{2} \times 4 = 6$
 (2) $(\log_4 9 + \log_2 27)(\log_3 2 + \log_8 8)$
 $= (\log_{2^2} 3^2 + \log_2 3^3)(\log_3 2 + \log_{2^3} 2^3)$
 $= (\log_2 3 + 3 \log_2 3) \left(\log_3 2 + \frac{3}{2} \log_3 2 \right)$
 $= 4 \log_2 3 \times \frac{5}{2} \log_3 2$
 $= 4 \log_2 3 \times \frac{5}{2 \log_2 3}$
 $= 4 \times \frac{5}{2} = 10$

10 $\log_2 3 = a, \log_3 5 = b$ 에서 $\log_3 2 = \frac{1}{a}, \log_3 5 = b$
 $\therefore \log_{12} 60 = \frac{\log_3 60}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3 \times 5)}{\log_3 (2^2 \times 3)}$
 $= \frac{2 \log_3 2 + 1 + \log_3 5}{2 \log_3 2 + 1} = \frac{\frac{2}{a} + 1 + b}{\frac{2}{a} + 1}$
 $= \frac{2 + a + ab}{2 + a} = \frac{ab + a + 2}{a + 2}$

따라서 a, b 로 나타낸 것은 ②이다.

다른 풀이 $\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2^2 \times 3 \times 5)}{\log_2 (2^2 \times 3)}$
 $= \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3}$

$\log_2 3 = a, \log_3 5 = b$ 이므로

$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_2 3 \times \log_3 5 = ab$

$\therefore \log_{12} 60 = \frac{2 + a + ab}{2 + a} = \frac{ab + a + 2}{a + 2}$

11 $\log_c a : \log_c b = 2 : 3$ 에서 $3 \log_c a = 2 \log_c b$
 $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{3}{2} \quad \therefore \log_a b = \frac{3}{2}$
 $\therefore 2 \log_a b + 3 \log_b a = 2 \log_a b + \frac{3}{\log_a b}$
 $= 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{2}{3} = 5$

12 $\log_4 3 \times \log_8 x = \log_8 3$ 에서
 $\log_{2^2} 3 \times \log_{2^3} x = \log_{2^3} 3$
 $\frac{1}{2} \log_2 3 \times \frac{1}{3} \log_2 x = \frac{1}{3} \log_2 3$
 $\log_2 x = 2 \quad \therefore x = 4$

13 (1) $\log 2120 + \log 0.0212$
 $= \log (10^3 \times 2.12) + \log (10^{-2} \times 2.12)$
 $= 3 + \log 2.12 + (-2) + \log 2.12 = 1 + 2 \log 2.12$
 $= 1 + 2 \times 0.3263 = 1.6526$
 (2) $\log 212 - 2 \log 0.212$
 $= \log (10^2 \times 2.12) - 2 \log (10^{-1} \times 2.12)$
 $= 2 + \log 2.12 - 2(-1 + \log 2.12)$
 $= 4 - \log 2.12 = 4 - 0.3263 = 3.6737$

14 $\log (0.362 \times 341)$
 $= \log 0.362 + \log 341$
 $= \log (10^{-1} \times 3.62) + \log (10^2 \times 3.41)$
 $= -1 + \log 3.62 + 2 + \log 3.41$
 $= 1 + 0.5587 + 0.5328 = 2.0915$

본문 | 032~037쪽

1-1 2

1-2 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = -3^x, y = \frac{1}{5^x}, y = 0.2^x$ 은

 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 0$) 꼴이므로 지수함수이다.

따라서 지수함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

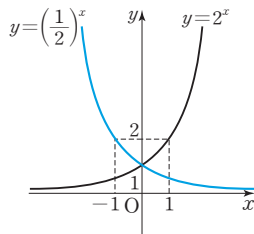
2-1

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

2-2 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 이므로 함수

 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.



3-1 1, -2

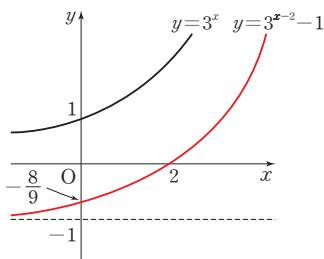
3-2 (1) 함수 $y = 3^{x-2} - 1$ 의

그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의방향으로 2만큼, y 축

의 방향으로 -1만큼

평행이동한 것이므로

오른쪽 그림과 같고,

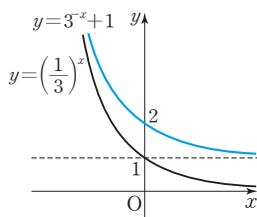
점근선은 직선 $y = -1$ 이다.

(2) 함수 $y = 3^{-x} + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축의 방

향으로 1만큼 평행이동한 것이

므로 오른쪽 그림과 같고,

점근선은 직선 $y = 1$ 이다.

4-1 (1) < (2) >

4-2 (1) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$

함수 $y = 2^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$ 이므로 $2^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{3}{7}} \therefore \sqrt{2} > \sqrt[7]{8}$

(2) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2, \sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2^{\frac{7}{4}}$

함수 $y = 2^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $2 > \frac{7}{4}$ 이므로 $2^2 > 2^{\frac{7}{4}} \therefore \sqrt[3]{64} > \sqrt[4]{128}$

(3) $\left(\frac{1}{27}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^6$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $4 < 6$ 이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 > \left(\frac{1}{3}\right)^6 \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^4 > \left(\frac{1}{27}\right)^2$

(4) $\sqrt[3]{0.25} = \sqrt[3]{0.5^2} = 0.5^{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{0.5} = 0.5^{\frac{1}{5}}$

함수 $y = 0.5^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ 이므로 $0.5^{\frac{2}{3}} < 0.5^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \sqrt[3]{0.25} < \sqrt[5]{0.5}$

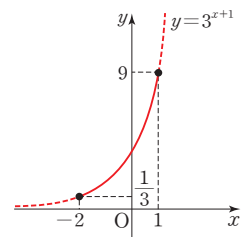
5-1 2, 1, -1, 27

5-2 (1) 함수 $y = 3^{x+1}$ 은 x 의 값이 증가

하면 y 의 값도 증가하므로 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $3^2 = 9$ $x = -2$ 일 때, 최솟값 $3^{-1} = \frac{1}{3}$

을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$



(2) 함수 $y = 2^{3x} \times 2^{-x} = 2^{2x} = 4^x$ 은

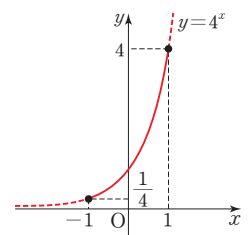
 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증

가하므로

 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $4^1 = 4$ $x = -1$ 일 때, 최솟값 $4^{-1} = \frac{1}{4}$

을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{4}$



(3) $f(x) = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ 라 하면 $y = 2^{f(x)}$

에서 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2) = 4$, $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0) = 0$ 함수 $y = 2^{-x^2+4x}$ 에서 $f(x)$ 가 최대, 즉 $f(2) = 4$ 일 때 최댓값 $2^4 = 16$ $f(x)$ 가 최소, 즉 $f(0) = 0$ 일 때 최솟값 $2^0 = 1$

을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 16, 최솟값: 1

6-1 3, 2, 4

6-2 (1) 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ 은 x 의 값이

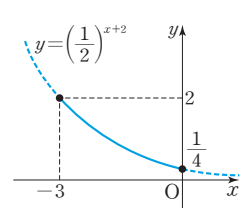
증가하면 y 의 값은 감소하므로 $x = -3$ 일 때, 최댓값

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

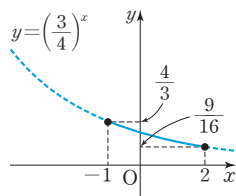
 $x = 0$ 일 때, 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{1}{4}$



- (2) 함수 $y=3^x \times 2^{-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ 은
 x 의 값이 증가하면 y 의 값은
 감소하므로
 $x=-1$ 일 때, 최댓값
 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$



$x=2$ 일 때, 최솟값 $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ 를 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: $\frac{4}{3}$, 최솟값: $\frac{9}{16}$

- (3) $f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$ 라 하면 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$

에서 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$f(x)$ 의 최댓값은 $f(-3) = 2$

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = -2$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-1}$ 에서

$f(x)$ 가 최소, 즉 $f(-1) = -2$ 일 때 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

$f(x)$ 가 최대, 즉 $f(-3) = 2$ 일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{9}$

7-1 $y+1, -1$

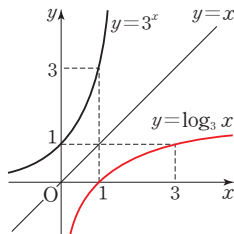
7-2 $x-1, 1$

8-1 역함수, $y=x$

8-2 (1) 함수 $y=\log_3 x$ 는 함수

$y=3^x$ 의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

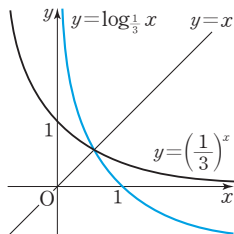
따라서 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 는 함수

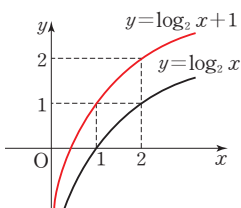
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

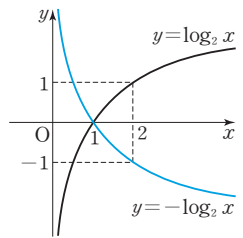


9-1 $-1, -1$

- 9-2 (1) 함수 $y=\log_2 x + 1$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=0$ 이다.



- (2) 함수 $y=-\log_2 x$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=0$ 이다.



10-1 (1) < (2) >

10-2 (1) $2 \log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_2 9$

함수 $y=\log_2 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $5 < 9$ 이므로 $\log_2 5 < \log_2 9$

$\therefore \log_2 5 < 2 \log_2 3$

(2) $\log_9 16 = \log_{3^2} 4^2 = \log_3 4$

함수 $y=\log_3 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $25 > 4$ 이므로 $\log_3 25 > \log_3 4$

$\therefore \log_3 25 > \log_9 16$

(3) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $4 > \sqrt{5}$ 이므로 $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 4 < \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 5$

(4) $\log_{0.04} 16 = \log_{0.2^2} 4^2 = \log_{0.2} 4$

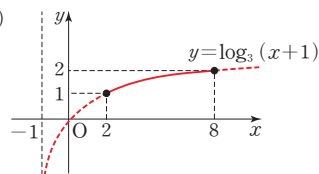
함수 $y=\log_{0.2} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $10 > 4$ 이므로 $\log_{0.2} 10 < \log_{0.2} 4$

$\therefore \log_{0.2} 10 < \log_{0.04} 16$

11-1 3, 5, 0

11-2 (1)

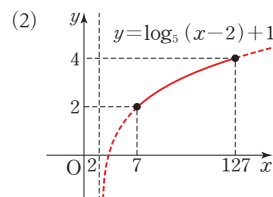


함수 $y=\log_3 (x+1)$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$x=8$ 일 때, 최댓값 $\log_3 9 = 2$

$x=2$ 일 때, 최솟값 $\log_3 3 = 1$ 을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 2, 최솟값: 1



함수 $y=\log_5 (x-2) + 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$x=127$ 일 때, 최댓값 $\log_5 125 + 1 = 4$

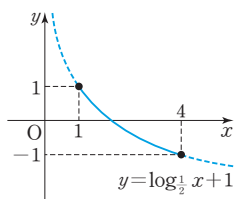
$x=7$ 일 때, 최솟값 $\log_5 5 + 1 = 2$ 를 갖는다.

$\therefore$ 최댓값: 4, 최솟값: 2

(3) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ 이라 하면
 $y = \log_2 f(x)$ 에서 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로
 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1) = f(3) = 2$
 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 1$
함수 $y = \log_2 (x^2 - 4x + 5)$ 에서
 $f(x)$ 가 최대, 즉 $f(1) = f(3) = 2$ 일 때 최댓값 $\log_2 2 = 1$
 $f(x)$ 가 최소, 즉 $f(2) = 1$ 일 때 최솟값 $\log_2 1 = 0$ 을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: 0

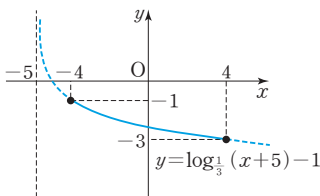
12-1 1, 7, -3

12-2 (1)



함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로
 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 1 + 1 = 1$
 $x = 4$ 일 때, 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 + 1 = -1$ 을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: -1

(2)



함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+5) - 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로
 $x = -4$ 일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 1 - 1 = -1$
 $x = 4$ 일 때, 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 9 - 1 = -3$ 을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값: -1, 최솟값: -3

(3) $f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$ 라 하면

$y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 에서 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로
 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(3) = 8$
 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = 4$
함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x + 5)$ 에서
 $f(x)$ 가 최소, 즉 $f(1) = 4$ 일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
 $f(x)$ 가 최대, 즉 $f(3) = 8$ 일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ 을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값: -2, 최솟값: -3

기초 개념 평가

본문 | 038, 039쪽

- | | |
|---------------------------------|-------------|
| 01 1 | 02 a, 지수함수 |
| 03 양 | 04 증가, 감소 |
| 05 x축 | 06 최댓값, 최솟값 |
| 07 최솟값, 최댓값 | 08 일대일 대응 |
| 09 $x = \log_a y, y = \log_a x$ | 10 양 |
| 11 증가, 감소 | 12 y축 |
| 13 최댓값, 최솟값 | 14 최솟값, 최댓값 |

기초 문제 평가

본문 | 040, 041쪽

- ㄴ. 그래프의 점근선은 직선 $y = 0$ 이다. (거짓)
 ㄷ. 그래프는 제1, 2사분면을 지난다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
- 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 0$ 이므로
 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 5$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 5$ 이다.
- 함수 $f(x) = a^{x+1} - 2$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $f(0) = a - 2 = 1 \quad \therefore a = 3$
 $\therefore f(x) = 3^{x+1} - 2$
 ① $f(-2) = 3^{-1} - 2 = -\frac{5}{3}$ 이므로 점 $(-2, -1)$ 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이 아니다.
 ② $f(-1) = 1 - 2 = -1$ 이므로 점 $(-1, 1)$ 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이 아니다.
 ③ $f(1) = 3^2 - 2 = 7$ 이므로 점 $(1, 7)$ 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이다.
 ④ $f(2) = 3^3 - 2 = 25$ 이므로 점 $(2, 1)$ 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이 아니다.
 ⑤ $f(3) = 3^4 - 2 = 79$ 이므로 점 $(3, 9)$ 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이 아니다.
 따라서 그래프 위의 점인 것은 ③이다.

4 $f(x)=2^{ax+b}$ 에 대하여

$$f(1)=4 \text{에서 } 2^{a+b}=4 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=8 \text{에서 } 2^{2a+b}=8 \quad \therefore 2a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

$$\therefore a^2+b^2=2$$

5 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{x-a} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 함수 $y=2^{x-2}+3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{x-2}+3+b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 의 그래프가 일치하므로

$$a=2, b+3=0 \quad \therefore a=2, b=-3$$

$$\therefore ab=-6$$

6 A, B, C 를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$A=2^{\frac{3}{2}}, B=2^{\frac{5}{3}}, C=(2^{-1})^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$$

지수함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\text{이때 } \frac{5}{3} > \frac{3}{2} > \frac{3}{4} \text{이므로 } 2^{\frac{5}{3}} > 2^{\frac{3}{2}} > 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore B > A > C$$

따라서 대소 관계를 바르게 나타낸 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

7 $f(x)=-x^2+8x+a=-(x-4)^2+a+16$ 이라 하면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \text{에서 } f(x) \text{의 값이 증가하면 } y \text{의 값은 감소하므로}$$

$$f(x) \text{의 최댓값은 } f(4)=a+16$$

$$\text{함수 } y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+8x+a} \text{의 최솟값이 2이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+16}=2, \left(\frac{1}{2}\right)^{a+16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$a+16=-1 \quad \therefore a=-17$$

8 $\neg$. 밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$x_1 < x_2 \text{이면 } f(x_1) > f(x_2) \text{이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 이다.

9 함수 $y=2^{x+a}+3$ 에서 $2^{x+a}=y-3$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } x+a=\log_2(y-3)$$

$$\therefore x=\log_2(y-3)-a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\log_2(x-3)-a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 이 $y=\log_2(x-b)+2$ 와 일치하므로

$$a=-2, b=3 \quad \therefore a+b=1$$

10 함수 $y=\log_2(x-a)+b$ 의 그래프에서 점근선이 직선

$$x=-1 \text{이므로 } a=-1$$

$$\therefore y=\log_2(x+1)+b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=\log_2 1+b \quad \therefore b=2$$

$$\therefore ab=-2$$

11 $f(x)=\log_{0.25} x$ 에 대하여

$$f(a)=-4 \text{에서 } \log_{0.25} a=-4$$

$$\therefore a=0.25^{-4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}=(2^{-2})^{-4}=2^8$$

$$f(b)=8 \text{에서 } \log_{0.25} b=8$$

$$\therefore b=0.25^8=\left(\frac{1}{4}\right)^8=(2^{-2})^8=2^{-16}$$

$$\text{이때 } 4\sqrt{ab}=2^2 \times \sqrt{2^8 \times 2^{-16}}=2^2 \times 2^{-4}=2^{-2}$$

$$\therefore f(4\sqrt{ab})=\log_{0.25} 2^{-2}=\log_{2^{-2}} 2^{-2}=1$$

12 $y=\log_2(2x-4)=\log_2 2(x-2)=\log_2(x-2)+1$

이므로 함수 $y=\log_2(2x-4)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$m=2, n=1 \quad \therefore m+n=3$$

13 $1 < x < 100$ 일 때, $0 < \log x < 2$ 이므로

$$A-B=\log x^2-(\log x)^2=2 \log x-(\log x)^2$$

$$=\log x(2-\log x) > 0$$

$$\therefore A > B \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$B-C=(\log x)^2-\log \frac{1}{x}=(\log x)^2-(-\log x)$$

$$=\log x(\log x+1) > 0$$

$$\therefore B > C \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의하여 $A > B > C$

14 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}}(x^2-ax+b)$ 가 $x=2$ 일 때 최댓값을 가지므로 이차함수 $y=x^2-ax+b$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$y=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4} \text{에서}$$

$$\frac{a}{2}=2 \quad \therefore a=4$$

또 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}}(x^2-4x+b)$ 에서 최댓값이 -1 이므로

$$\log_{\frac{1}{8}}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)=-1, \log_{\frac{1}{8}}(b-4)=-1$$

$$b-4=\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=8 \quad \therefore b=12$$

$$\therefore a+b=16$$

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 043쪽

1-1 9, 3

- 1-2 (1) $-x+3=3x-9$ 에서 $-x-3x=-9-3$ 이므로
 $-4x=-12 \quad \therefore x=3$
 (2) $6=9x-(2x+1)$ 에서 $6=7x-1$ 이므로
 $-7x=-7 \quad \therefore x=1$

2-1 2, 2

- 2-2 (1) $x^2=4x-4$ 에서 $x^2-4x+4=0$ 이므로
 $(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$ (중근)
 (2) $9x^2=4$ 에서 $9x^2-4=0$ 이므로
 $(3x+2)(3x-2)=0$
 $\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

3-1 -2, 1

- 3-2 (1) $-x-3<x+5$ 에서 $-x-x<5+3$ 이므로
 $-2x<8 \quad \therefore x>-4$
 (2) $2x+7\leq-4x-5$ 에서 $2x+4x\leq-5-7$ 이므로
 $6x\leq-12 \quad \therefore x\leq-2$

4-1 2, -2

- 4-2 (1) $x^2-20<x$ 에서 $x^2-x-20<0$ 이므로
 $(x+4)(x-5)<0 \quad \therefore -4<x<5$
 (2) $x^2\geq x+6$ 에서 $x^2-x-6\geq 0$ 이므로
 $(x+2)(x-3)\geq 0 \quad \therefore x\leq-2$ 또는 $x\geq 3$

본문 | 044~047쪽

1-1 (1) $x, -2$ (2) 1, 11-2 (1) $2^{-3x+2}=2$ 에서 $-3x+2=1$ 이므로

$$-3x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$$

$$(2) \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+10} \text{에서 } x=-x+10 \text{이므로}$$

$$2x=10 \quad \therefore x=5$$

$$(3) 3^{2x-3}=3^{-x^2+5} \text{에서 } 2x-3=-x^2+5 \text{이므로}$$

$$x^2+2x-8=0, (x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \text{에서 } x^2-x=4-x \text{이므로}$$

$$x^2-4=0, (x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

2-1 (1) 2, 5 (2) -5

2-2 (1) $\frac{1}{8}=2^{-3}$ 이므로 주어진 방정식은 $2^x=2^{-3}$

$$\text{양변의 밑이 2로 같으므로 } x=-3$$

$$(2) 2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}} \text{이므로 주어진 방정식은 } 2^x=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{양변의 밑이 2로 같으므로 } x=\frac{3}{2}$$

$$(3) 0.09=0.3^2 \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$0.3^{x+2}=0.3^2$$

$$\text{양변의 밑이 0.3으로 같으므로}$$

$$x+2=2 \quad \therefore x=0$$

$$(4) 27=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$\text{양변의 밑이 } \frac{1}{3} \text{로 같으므로}$$

$$-x+1=-3 \quad \therefore x=4$$

3-1 (1) 10, 2 (2) 3, -2

3-2 (1) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ 이므로 주어진 부등식은 $3^x\geq 3^{\frac{1}{2}}$

$$\text{양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로}$$

$$x\geq \frac{1}{2}$$

$$(2) 243=3^5 \text{이므로 주어진 부등식은 } 3^{2x-1}>3^5$$

$$\text{양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로}$$

$$2x-1>5 \quad \therefore x>3$$

$$(3) 4^{2x-3}=(2^2)^{2x-3}=2^{4x-6}$$

$$\text{이므로 주어진 부등식은 } 2^{3x}<2^{4x-6}$$

$$\text{양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로}$$

$$3x<4x-6 \quad \therefore x>6$$

$$(4) 25^{x^2+x}=(5^2)^{x^2+x}=5^{2x^2+2x}$$

$$\text{이므로 주어진 부등식은 } 5^{x+3}\leq 5^{2x^2+2x}$$

$$\text{양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로}$$

$$x+3\leq 2x^2+2x, 2x^2+x-3\geq 0$$

$$(2x+3)(x-1)\geq 0$$

$$\therefore x\leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x\geq 1$$

4-1 (1) 0, 1, 3 (2) $\leq, -1$ 4-2 (1) $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 이므로 주어진 부등식은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\text{양변의 밑이 } \frac{1}{2} \text{로 같고 1보다 작으므로}$$

$$x+2>6 \quad \therefore x>4$$

$$(2) 0.25=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{양변의 밑이 } \frac{1}{2} \text{로 같고 1보다 작으므로 } x<2$$

$$(3) \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2},$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x+1} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}$$

이므로 주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$4x-2 \geq 3x+3 \quad \therefore x \geq 5$$

$$(4) \left(\frac{1}{36}\right)^{x^2-2} = \left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}^{x^2-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2x^2-4}$$

$$\text{이므로 주어진 부등식은 } \left(\frac{1}{6}\right)^{2x} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{2x^2-4}$$

양변의 밑이 $\frac{1}{6}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$2x \leq 2x^2-4, x^2-x-2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2$$

5-1 2, 5, 5

5-2 (1) (진수) >0 에서 $x>0$ ㉠

로그의 정의에 의하여

$$x=4^{-2}=\frac{1}{16} \quad \text{.....㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 구하는 해는 } x=\frac{1}{16}$$

(2) (진수) >0 에서 $2x+1>0$

$$\therefore x > -\frac{1}{2} \quad \text{.....㉢}$$

로그의 정의에 의하여

$$2x+1=3^{-1}=\frac{1}{3} \quad \therefore x=-\frac{1}{3} \quad \text{.....㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 구하는 해는 } x=-\frac{1}{3}$$

(3) (진수) >0 에서 $-2x+1>0$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \quad \text{.....㉤}$$

로그의 정의에 의하여

$$-2x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27 \quad \therefore x=-13 \quad \text{.....㉥}$$

$$\text{㉤, ㉥에서 구하는 해는 } x=-13$$

6-1 3x, 2, 2

6-2 (1) (진수) >0 에서 $2x-3>0$

$$\therefore x > \frac{3}{2} \quad \text{.....㉦}$$

$$\log_5(2x-3)=\log_5 7 \text{에서}$$

로그함수의 성질에 의하여

$$2x-3=7 \quad \therefore x=5 \quad \text{.....㉧}$$

$$\text{㉦, ㉧에서 구하는 해는 } x=5$$

(2) (진수) >0 에서 $x+2>0, x>0$

$$\therefore x > 0 \quad \text{.....㉨}$$

$$\log_2(x+2)+\log_2 x=\log_2 x(x+2)$$

이므로 주어진 방정식은

$$\log_2 x(x+2)=3$$

로그의 정의에 의하여

$$x(x+2)=2^3, x^2+2x-8=0$$

$$(x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2 \quad \text{.....㉩}$$

$$\text{㉨, ㉩에서 구하는 해는 } x=2$$

(3) (진수) >0 에서 $x-1>0, 3-x>0$

$$\therefore 1 < x < 3 \quad \text{.....㉪}$$

$$\log_2(x-1)=2 \log_4(x-1)=\log_4(x-1)^2$$

이므로 주어진 방정식은

$$\log_4(x-1)^2=\log_4(3-x)$$

로그함수의 성질에 의하여

$$(x-1)^2=3-x, x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \quad \text{.....㉫}$$

$$\text{㉪, ㉫에서 구하는 해는 } x=2$$

7-1 3, 4, 13

7-2 (1) (진수) >0 에서 $2x-1>0, x+4>0$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \quad \text{.....㉬}$$

$$\log_3(2x-1)>\log_3(x+4) \text{에서}$$

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$$2x-1>x+4 \quad \therefore x>5 \quad \text{.....㉭}$$

$$\text{㉬, ㉭을 모두 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는 } x>5$$

(2) (진수) >0 에서 $4-x>0$

$$\therefore x < 4 \quad \text{.....㉮}$$

$$1=\log_2 2 \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$\log_2(4-x)<\log_2 2$$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$$4-x<2 \quad \therefore x>2 \quad \text{.....㉯}$$

$$\text{㉮, ㉯을 모두 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$2 < x < 4$$

(3) (진수) >0 에서 $x>0, x-2>0$

$$\therefore x > 2 \quad \text{.....㉺}$$

$$\log_2 x+\log_2(x-2)=\log_2 x(x-2)$$

이므로 주어진 부등식은

$$\log_2 x(x-2) \leq \log_2 3$$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$$x(x-2) \leq 3, x^2-2x-3 \leq 0$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \text{.....㉻}$$

$$\text{㉺, ㉻을 모두 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$2 < x \leq 3$$

8-1 2, 2, 11

8-2 (1) (진수) > 0에서 $3x-1 > 0, 2x+1 > 0$

$$\therefore x > \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) \text{에서}$$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$3x-1 \leq 2x+1 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < x \leq 2$$

(2) (진수) > 0에서 $x-1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$

$$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$x-1 > \frac{1}{2} \quad \therefore x > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

⑨, ⑩을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{3}{2}$$

(3) (진수) > 0에서 $x > 0, x-8 > 0$

$$\therefore x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(x-8) = \log_{\frac{1}{3}} x(x-8),$$

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 9$$

이므로 주어진 부등식은

$$\log_{\frac{1}{3}} x(x-8) \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$x(x-8) \geq 9, x^2 - 8x - 9 \geq 0$$

$$(x+1)(x-9) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 9 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

⑪, ⑫을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x \geq 9$

$$(3) \frac{1}{25} = 5^{-2} \text{이므로 주어진 방정식은 } 5^{-x+1} = 5^{-2}$$

양변의 밑이 5로 같으므로

$$-x+1 = -2 \quad \therefore x = 3$$

$$(4) \left(\frac{1}{9}\right)^x = (3^{-2})^x = 3^{-2x}, 81 = 3^4$$

이므로 주어진 방정식은 $3^{-2x} = 3^4$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$$-2x = 4 \quad \therefore x = -2$$

$$(5) 4\sqrt{2} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \text{이므로 주어진 방정식은 } 2^{2x} = 2^{\frac{5}{2}}$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$2x = \frac{5}{2} \quad \therefore x = \frac{5}{4}$$

$$(6) 9^{-2x+1} = 3^{-4x+2}, \sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$$

이므로 주어진 방정식은 $3^{-4x+2} = 3^{\frac{3}{2}}$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$$-4x+2 = \frac{3}{2}, -4x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{8}$$

2 (1) 양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$x+1 < 2x-1 \quad \therefore x > 2$$

$$(2) 4 = 2^2 \text{이므로 주어진 부등식은 } 2^{x+1} > 2^2$$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$$x+1 > 2 \quad \therefore x > 1$$

$$(3) \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

이므로 주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$2x \geq 3 \quad \therefore x \geq \frac{3}{2}$$

$$(4) 625 = 5^4 \text{이므로 주어진 부등식은 } 5^{2x} \leq 5^4$$

양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$$

$$(5) 0.04 = 0.2^2 \text{이므로 주어진 부등식은 } 0.2^x > 0.2^2$$

양변의 밑이 0.2로 같고 1보다 작으므로 $x < 2$

$$(6) 4^{-x+1} = 2^{-2x+2} \text{이므로 주어진 부등식은 } 2^{2x-1} < 2^{-2x+2}$$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$$2x-1 < -2x+2, 4x < 3 \quad \therefore x < \frac{3}{4}$$

3 (1) (진수) > 0에서 $2x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{13}$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } 2x = 5, x = \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

⑬, ⑭에서 구하는 해는

$$x = \frac{5}{2}$$

집중 연습

본문 | 048, 049쪽

1 (1) $512 = 2^9$ 이므로 주어진 방정식은 $2^x = 2^9$

양변의 밑이 2로 같으므로 $x = 9$

(2) $125 = 5^3$ 이므로 주어진 방정식은 $5^{2x+1} = 5^3$

양변의 밑이 5로 같으므로

$$2x+1 = 3 \quad \therefore x = 1$$

(2) (진수) >0 에서 $2+x>0 \quad \therefore x>-2$ ㉠
 로그의 정의에 의하여 $2+x=3^4 \quad \therefore x=79$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 해는 **$x=79$**

(3) (진수) >0 에서 $2-x>0 \quad \therefore x<2$ ㉠
 로그의 정의에 의하여 $2-x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$
 $\therefore x=-25$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 해는 **$x=-25$**

(4) (진수) >0 에서 $x-1>0, x+1>0, x+5>0$
 $\therefore x>1$ ㉠
 $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(x-1)(x+1)$
 이므로 주어진 방정식은
 $\log_2(x-1)(x+1)=\log_2(x+5)$
 로그함수의 성질에 의하여 $(x-1)(x+1)=x+5$
 $x^2-1=x+5, x^2-x-6=0$
 $(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 해는 **$x=3$**

(5) (진수) >0 에서 $x>0, x-4>0 \quad \therefore x>4$ ㉠
 $\log_5 x+\log_5(x-4)=\log_5 x(x-4)$
 이므로 주어진 방정식은
 $\log_5 x(x-4)=1$
 로그의 정의에 의하여 $x(x-4)=5, x^2-4x-5=0$
 $(x+1)(x-5)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=5$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 해는 **$x=5$**

(6) (진수) >0 에서 $x-2>0, 4-x>0$
 $\therefore 2<x<4$ ㉠
 $\log_3(x-2)=2\log_9(x-2)=\log_9(x-2)^2$
 이므로 주어진 방정식은
 $\log_9(x-2)^2=\log_9(4-x)$
 로그함수의 성질에 의하여 $(x-2)^2=4-x, x^2-3x=0$
 $x(x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 해는 **$x=3$**

4 (1) (진수) >0 에서 $x>0$ ㉠
 $3=\log_{10} 10^3=\log_{10} 1000$ 이므로 주어진 부등식은
 $\log_{10} x>\log_{10} 1000$
 양변의 밑이 10으로 같고 1보다 크므로
 $x>1000$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $x>1000$

(2) (진수) >0 에서 $x-1>0 \quad \therefore x>1$ ㉠
 $-1=\log_{0.1} 0.1^{-1}=\log_{0.1} 10$ 이므로 주어진 부등식은
 $\log_{0.1}(x-1)>\log_{0.1} 10$
 양변의 밑이 0.1로 같고 1보다 작으므로
 $x-1<10 \quad \therefore x<11$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $1<x<11$

(3) (진수) >0 에서 $x-5>0 \quad \therefore x>5$ ㉠
 $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ 이므로 주어진 부등식은
 $\log_3(x-5)<\log_3 9$
 양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로
 $x-5<9 \quad \therefore x<14$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $5<x<14$

(4) (진수) >0 에서 $x^2+3x>0, x(x+3)>0$
 $\therefore x<-3$ 또는 $x>0$ ㉠
 $\log_6(x^2+3x)<\log_6 4$ 에서
 양변의 밑이 6으로 같고 1보다 크므로
 $x^2+3x<4, x^2+3x-4<0$
 $(x+4)(x-1)<0 \quad \therefore -4<x<1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-4<x<-3$ 또는 $0<x<1$

(5) (진수) >0 에서 $x-1>0, x-3>0 \quad \therefore x>3$ ㉠
 $-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}} 3$ 이므로 주어진 부등식은
 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x-3)<\log_{\frac{1}{3}} 3$
 양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로
 $(x-1)(x-3)>3, x^2-4x>0$
 $x(x-4)>0 \quad \therefore x<0$ 또는 $x>4$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $x>4$

(6) (진수) >0 에서 $x-2>0, 2x+11>0$
 $\therefore x>2$ ㉠
 $\log_2(x-2)=2\log_4(x-2)=\log_4(x-2)^2$
 이므로 주어진 부등식은
 $\log_4(x-2)^2\leq\log_4(2x+11)$
 양변의 밑이 4로 같고 1보다 크므로
 $(x-2)^2\leq 2x+11, x^2-6x-7\leq 0$
 $(x+1)(x-7)\leq 0 \quad \therefore -1\leq x\leq 7$ ㉡
 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $2<x\leq 7$

기초 개념 평가

본문 | 050, 051쪽

- | | |
|----------|------------|
| 01 x_1 | 02 1 |
| 03 $<$ | 04 $>$ |
| 05 $a>1$ | 06 $0<a<1$ |
| 07 a^b | 08 x_2 |
| 09 0, 1 | 10 $<$ |
| 11 $>$ | 12 0 |
| 13 $<$ | |

1 (1) $4^{x+2}=2^{2x+4}$, $8^x=2^{3x}$

이므로 주어진 방정식은 $2^{2x+4}=2^{3x}$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$2x+4=3x \quad \therefore x=4$$

(2) $0.75^x=\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $\frac{256}{81}=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

이므로 주어진 방정식은 $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

양변의 밑이 $\frac{3}{4}$ 로 같으므로 $x=-4$

2 (1) $\left(\frac{1}{25}\right)^x=5^{-2x}$ 이므로 주어진 방정식은 $5^{-2x}=5^{1-x^2}$

양변의 밑이 5로 같으므로

$$-2x=1-x^2 \quad \therefore x^2-2x-1=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은 2이다.

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-2x}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^{3-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{9-3x}$

이므로 주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{9-3x}$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같으므로

$$2x^2-2x=9-3x \quad \therefore 2x^2+x-9=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의

모든 근의 합은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

3 $4^x=2^{2x}$ 이므로 주어진 방정식은 $2^{2x}=2^{x^2+a}$

양변의 밑이 2로 같으므로 $2x=x^2+a$

즉, 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 한 근이 -1 이므로

$$x=-1 \text{을 대입하면 } 1+2+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 에 대입하면

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 다른 한 근은 3이다.

4 (1) $36^{2x-3}=6^{4x-6}$ 이므로 주어진 부등식은 $6^{3x} \geq 6^{4x-6}$

양변의 밑이 6으로 같고 1보다 크므로

$$3x \geq 4x-6 \quad \therefore x \leq 6$$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-4}$

이므로 주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-4}$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$-2x < 2x^2-4, x^2+x-2 > 0$$

$$(x+2)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 1$$

5 $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6x-2}$

이므로 주어진 부등식은 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{6x-2}$

양변의 밑이 $\frac{2}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$2x > 6x-2 \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $x < a$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

6 $125^x=5^{3x}$ 이므로 주어진 부등식은 $5^{-4+x^2} \leq 5^{3x}$

양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로

$$-4+x^2 \leq 3x, x^2-3x-4 \leq 0$$

$$(x+1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 4$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수는 1, 2, 3, 4의 4이다.

7 $81=3^4$ 이므로 주어진 부등식은 $3^{x^2-6} < 3^{3x+4}$

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$$x^2-6 < 3x+4, x^2-3x-10 < 0$$

$$(x+2)(x-5) < 0 \quad \therefore -2 < x < 5$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이고 그 합은 9이다.

8 (1) (진수) >0 에서 $x-2>0, x>0$

$$\therefore x>2$$

.....㉠

$$\log_{\frac{1}{5}} x + 1 = \log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{5}$$

이므로 주어진 방정식은

$$\log_{\frac{1}{5}} (x-2) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{5}$$

로그함수의 성질에 의하여 $x-2=\frac{x}{5}$

$$\therefore x=\frac{5}{2}$$

.....㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x=\frac{5}{2}$

(2) (진수) >0 에서 $x-5>0, x-2>0$

$$\therefore x>5$$

.....㉢

$$\log_2 (x-5) = 2 \log_4 (x-5) = \log_4 (x-5)^2,$$

$$\log_4 (x-2) + 1 = \log_4 (x-2) + \log_4 4$$

$$= \log_4 4(x-2)$$

이므로 주어진 방정식은

$$\log_4 (x-5)^2 = \log_4 4(x-2)$$

로그함수의 성질에 의하여 $(x-5)^2=4(x-2)$

$$x^2-14x+33=0, (x-3)(x-11)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=11$$

.....㉣

㉢, ㉣에서 구하는 해는 $x=11$

9 (진수) >0 에서 $x^2+x+2>0, x>0$

$$\text{이때 } x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \text{ 이므로 } x>0 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$2\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2x^2, 1=\log_22$ 이므로 주어진 방정식은

$$\log_2(x^2+x+2)-\log_2x^2=\log_22$$

$$\log_2(x^2+x+2)=\log_2x^2+\log_22$$

$$\log_2(x^2+x+2)=\log_22x^2$$

로그함수의 성질에 의하여

$$x^2+x+2=2x^2, x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 구하는 해는 $x=2$

10 $\log x+\log(x+a)=\log x(x+a),$

$$1+\log(a+1)=\log 10(a+1)$$

이므로 주어진 방정식은

$$\log x(x+a)=\log 10(a+1)$$

로그함수의 성질에 의하여 $x(x+a)=10(a+1)$

즉, 이차방정식 $x(x+a)=10(a+1)$ 의 한 근이 4이므로

$x=4$ 를 대입하면

$$4(4+a)=10(a+1)$$

$$16+4a=10a+10 \quad \therefore a=1$$

11 주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, 2\alpha (\alpha>0)$ 라 하면

$$\log_2\alpha=4\alpha+k \text{에서 } k=\log_2\alpha-4\alpha \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$$\log_22\alpha=8\alpha+k \text{에서}$$

$$k=\log_22\alpha-8\alpha=1+\log_2\alpha-8\alpha \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \log_2\alpha-4\alpha=1+\log_2\alpha-8\alpha$$

$$4\alpha=1 \quad \therefore \alpha=\frac{1}{4}$$

$$\alpha=\frac{1}{4} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } k=\log_2\frac{1}{4}-1=-3$$

12 (1) (진수) >0 에서 $x+4>0 \quad \therefore x>-4 \quad \dots\dots\textcircled{7}$

$$-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$$

이므로 주어진 부등식은

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)>\log_{\frac{1}{2}}4$$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같고 1보다 작으므로

$$x+4<4 \quad \therefore x<0 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-4<x<0$$

(2) (진수) >0 에서 $x-5>0, 7-x>0$

$$\therefore 5<x<7 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$$\log_3(x-5)=2\log_9(x-5)=\log_9(x-5)^2$$

이므로 주어진 부등식은

$$\log_9(x-5)^2>\log_9(7-x)$$

양변의 밑이 9로 같고 1보다 크므로

$$(x-5)^2>7-x, x^2-9x+18>0$$

$$(x-3)(x-6)>0 \quad \therefore x<3 \text{ 또는 } x>6 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$6<x<7$$

13 (진수) >0 에서 $x-1>0, \frac{1}{2}x+k>0$

$$\text{즉, } x>1, x>-2k$$

$$k \text{는 자연수이므로 } x>1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로

$$x-1\leq\frac{1}{2}x+k \quad \therefore x\leq2k+2 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 5이므로

$$6\leq2k+2<7 \quad \therefore 2\leq k<\frac{5}{2}$$

따라서 구하는 자연수는 k 의 값은 2이다.

14 (진수) >0 에서 $x-3>0, x+1>0$

$$\therefore x>3 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$1=\log_33$ 이므로 주어진 부등식은

$$\log_3(x-3)(x+1)<\log_312$$

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$$(x-3)(x+1)<12, x^2-2x-15<0$$

$$(x+3)(x-5)<0 \quad \therefore -3<x<5 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$3<x<5$$

이 부등식의 해가 $a<x<b$ 이므로

$$a=3, b=5 \quad \therefore a+b=8$$

15 (진수) >0 에서 $x+3>0, 1-x>0$

$$\therefore -3<x<1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$$\log_a(x+3)>\log_a(1-x)+1 \text{에서}$$

$$\log_a(x+3)>\log_aa(1-x)$$

양변의 밑이 a 로 같고 1보다 크므로

$$x+3>a(1-x), (a+1)x>a-3$$

$$\text{이때 } a>1 \text{이므로 } x>\frac{a-3}{a+1} \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{a-3}{a+1}<x<1$$

이 부등식의 해가 $-\frac{1}{3}<x<1$ 이므로

$$\frac{a-3}{a+1}=-\frac{1}{3}, 3(a-3)=-(a+1)$$

$$4a=8 \quad \therefore a=2$$

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 057쪽

1-1 (1) $\overline{AC}$, 5 (2) $\overline{BC}$, 12 (3) $\overline{BC}$, 12

1-2 (1) $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

(2) $\cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$

(3) $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

(4) $\sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$

(5) $\cos B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

(6) $\tan B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2-1 (1) 1, 1 (2) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ 2-2 (1) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(2) $\tan 45^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\tan 45^\circ - \sin 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

(4) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \div \tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3-1 (1) π , 4π (2) 12π , 3π 3-2 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 중심각의 크기에 정비례하므로 호 AB의 길이를 l , 부채꼴 AOB의 넓이를 S 라 하면

(1) $2\pi : l = 60^\circ : 90^\circ = 2 : 3$

$$2l = 6\pi \quad \therefore l = 3\pi$$

(2) $6\pi : S = 60^\circ : 90^\circ = 2 : 3$

$$2S = 18\pi \quad \therefore S = 9\pi$$

본문 | 058~065쪽

1-1 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 30° 1-2 (1) $45^\circ = 360^\circ \times 0 + 45^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 45^\circ$ (2) $135^\circ = 360^\circ \times 0 + 135^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 135^\circ$ (3) $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 330^\circ$ (4) $-160^\circ = 360^\circ \times (-1) + 200^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 200^\circ$

2-1 (1) 1 (2) 3 (3) 4 (4) 3

2-2 (1) $400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$ 이므로 400° 는 제1사분면의 각이다.(2) $1000^\circ = 360^\circ \times 2 + 280^\circ$ 이므로 1000° 는 제4사분면의 각이다.(3) $-210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ$ 이므로 -210° 는 제2사분면의 각이다.(4) $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$ 이므로 -1000° 는 제1사분면의 각이다.3-1 1, 120° , 33-2 각 θ 가 제3사분면의 각이므로 $360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (단, n 은 정수)

$$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

 $\therefore$ 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

 $\therefore$ 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

 $\therefore$ 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은

제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면이다.

3-3 각 2θ 가 제4사분면의 각이므로 $360^\circ \times n + 270^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$ (단, n 은 정수)

$$\therefore 180^\circ \times n + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 180^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 135^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

 $\therefore$ 각 θ 는 제2사분면의 각(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 315^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

 $\therefore$ 각 θ 는 제4사분면의 각따라서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은

제2사분면 또는 제4사분면이다.

4-1 4, 180°

4-2 각 θ 와 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$4\theta - \theta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 120^\circ \times n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 120^\circ \times n < 360^\circ \quad \therefore 0 < n < 3$$

n 은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

$n=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $\theta=120^\circ$

$n=2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $\theta=240^\circ$

따라서 구하는 각 θ 의 크기는

120°, 240°

5-1 1, 2, 300°

5-2 각 θ 와 각 5θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ \quad \therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=1$

$n=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $\theta=135^\circ$

5-3 각 θ 와 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 72^\circ \times n < 90^\circ \quad \therefore 0 < n < \frac{5}{4}$$

n 은 정수이므로 $n=1$

$n=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $\theta=72^\circ$

6-1 (1) 1° (2) 150 (3) -135 (4) 11

6-2 (1) $30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

(2) $180^\circ = 180 \times 1^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180} = \pi$

(3) $-90^\circ = -90 \times 1^\circ = -90 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{2}$

(4) $-240^\circ = -240 \times 1^\circ = -240 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{3}\pi$

7-1 (1) 36° (2) 225° (3) 360° (4) -120°

7-2 (1) $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$

(2) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \times 1 = \frac{\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ$

(3) $\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \times 1 = \frac{3}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$

(4) $-\frac{5}{3}\pi = -\frac{5}{3}\pi \times 1 = -\frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -300^\circ$

8-1 3, 2, 3, 3

8-2 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = 10 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{25}{2}\pi$$

$$\therefore \text{호의 길이: } \frac{5}{2}\pi, \text{ 넓이: } \frac{25}{2}\pi$$

9-1 $2\pi, 3$

9-2 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서 } \frac{5}{4}\pi = \frac{1}{2} \times r \times \pi \quad \therefore r = \frac{5}{2}$$

$$l = r\theta \text{에서 } \pi = \frac{5}{2} \times \theta \quad \therefore \theta = \frac{2}{5}\pi$$

$$\therefore \text{반지름의 길이: } \frac{5}{2}, \text{ 중심각의 크기: } \frac{2}{5}\pi$$

다른 풀이 호의 길이가 π 이므로 $r\theta = \pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\text{넓이가 } \frac{5}{4}\pi \text{이므로 } \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{5}{4}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}r \times \pi = \frac{5}{4}\pi \quad \therefore r = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{5}{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{5}{2}\theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{2}{5}\pi$$

9-3 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 넓이를 S 라 하면

$$\text{호의 길이가 } \frac{9}{4}\pi \text{이므로 } 4\theta = \frac{9}{4}\pi \quad \therefore \theta = \frac{9}{16}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{9}{16}\pi = \frac{9}{2}\pi$$

$$\therefore \text{중심각의 크기: } \frac{9}{16}\pi, \text{ 넓이: } \frac{9}{2}\pi$$

다른 풀이 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{9}{4}\pi = \frac{9}{2}\pi$$

10-1 5, 4, 3

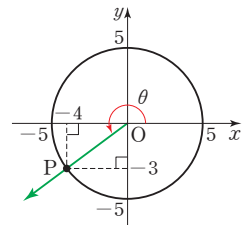
10-2 (1) 오른쪽 그림에서

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$



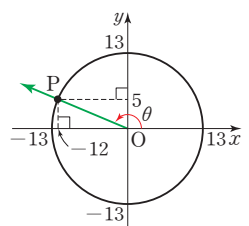
(2) 오른쪽 그림에서

$$\overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = -\frac{12}{13},$$

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$

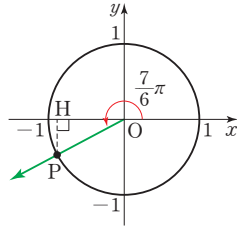


11-1 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

11-2 (1) 오른쪽 그림과 같이 각

$\frac{7}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,
점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=\frac{\pi}{6}$$

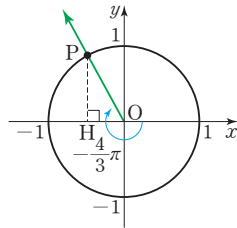
이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각

$-\frac{4}{3}\pi$ 를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,
점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=\frac{\pi}{3}$$

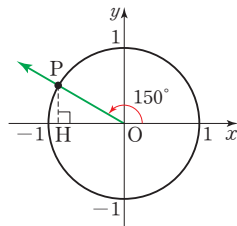
이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

(3) 오른쪽 그림과 같이 각

150° 를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,
점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=30^\circ$$

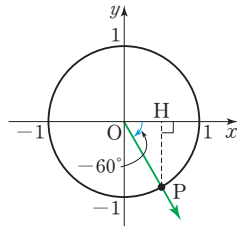
이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(4) 오른쪽 그림과 같이 각

-60° 를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,
점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=60^\circ$$

이므로 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

12-1 (1) 4, > (2) 2, <

12-2 (1) $\frac{13}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}$ 는 제1사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$$

(2) $-\frac{2}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{4}{3}\pi$ 는 제3사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

(3) $700^\circ = 360^\circ \times 1 + 340^\circ$ 는 제4사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

(4) $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$ 는 제1사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$$

13-1 1, 2, 2

13-2 (1) (i) $\cos \theta < 0 \Rightarrow$ 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각

(ii) $\tan \theta > 0 \Rightarrow$ 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 각 θ 는 제3사분면의 각이다.

(2) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이다.

(i) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 일 때

$\sin \theta > 0 \Rightarrow$ 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각

$\cos \theta > 0 \Rightarrow$ 제1사분면의 각 또는 제4사분면의 각

따라서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 을 만족시키는 각 θ 는 제1사분면의 각

(ii) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 일 때

$\sin \theta < 0 \Rightarrow$ 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\cos \theta < 0 \Rightarrow$ 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 을 만족시키는 각 θ 는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 각 θ 는 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각이다.

14-1 <, 4

14-2 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

이때 각 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

15-1 4, 1, 3

15-2 (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{27}$$

- 1 (1) 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 6 \times \frac{2}{3} \pi = 4\pi$$

- (2) 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3} \pi = 12\pi$$

- 2 (1) 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$10 = 5\theta \quad \therefore \theta = 2$$

- (2) 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5^2 \times 2 = 25$$

- 3 (1) $60^\circ = 60 \times 1^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

- (2) 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

- 4 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$(1) S = \frac{1}{2} r^2 \theta \text{에서 } 30\pi = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{5}{3}\pi$$

$$r^2 = 36 \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore l = r\theta = 6 \times \frac{5}{3}\pi = 10\pi$$

$$(2) l = r\theta \text{에서 } 2\pi = r \times \frac{4}{3}\pi \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$(3) S = \frac{1}{2} r l \text{에서 } 24\pi = \frac{1}{2} \times r \times 6\pi \quad \therefore r = 8$$

$$l = r\theta \text{에서 } 6\pi = 8\theta \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

- 5 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$(1) l + 2r = 52 \text{에서 } l = 52 - 2r$$

$$S = \frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} r (52 - 2r) = -r^2 + 26r$$

$$= -(r - 13)^2 + 169$$

따라서 $r = 13$ 일 때 S 는 최댓값 169를 갖는다.

$$(2) l + 2r = 10 \text{에서 } l = 10 - 2r$$

$$S = \frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} r (10 - 2r) = -r^2 + 5r$$

$$= -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

따라서 $r = \frac{5}{2}$ 일 때 S 는 최댓값 $\frac{25}{4}$ 를 갖는다.

$$\text{이때 } l = 10 - 2 \times \frac{5}{2} = 5 \text{이므로}$$

$$l = r\theta \text{에서 } 5 = \frac{5}{2}\theta \quad \therefore \theta = 2$$

- 6 (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

이때 각 θ 가 제4사분면의 각이면 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

- (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

이때 각 θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = -\frac{12}{5}$$

- (3) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$ 에서 $\cos \theta = 2 \sin \theta$ ㉠

㉠을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 1, \sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

이때 각 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{㉠에 대입하면 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- (4) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

이때 각 θ 가 제4사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{24}{49}} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{7}, \tan \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

- 7 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

이때 각 θ 가 제2사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore 6 \cos \theta + 5 \tan \theta = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + 5 \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -4\sqrt{5}$$

8 (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$$

(3) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}$$

9 (1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

기초 개념 평가

본문 | 068, 069쪽

01 시초선, 동경

03 90°

05 $\beta - \alpha$

07 $\frac{180^\circ}{\pi}$

09 $r\theta$

11 y

13 $\tan \theta$

15 $\sin \theta$

17 1

02 360° , 일반각

04 180°

06 $\alpha + \beta$

08 $\frac{\pi}{180}$

10 $\frac{1}{2}r^2\theta$

12 x

14 양수

16 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

기초 문제 평가

본문 | 070, 071쪽

1 ① 120° 는 제2사분면의 각이다.

② $510^\circ = 360^\circ \times 1 + 150^\circ$ 는 제2사분면의 각이다.

③ $930^\circ = 360^\circ \times 2 + 210^\circ$ 는 제3사분면의 각이다.

④ $-250^\circ = 360^\circ \times (-1) + 110^\circ$ 는 제2사분면의 각이다.

⑤ $-585^\circ = 360^\circ \times (-2) + 135^\circ$ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

2 각 θ 가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 45^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 45^\circ$$

$\therefore$ 각 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 225^\circ$$

$\therefore$ 각 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은

제1사분면 또는 제3사분면이다.

3 각 θ 와 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ \quad \therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

n 은 정수이므로 $n = 1$, $\textcircled{1}$ 에서 $\theta = 135^\circ$

$$4 \quad \neg, 105^\circ = 105 \times 1^\circ = 105 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{12}\pi$$

$$\neg, \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} \times 1 = \frac{\pi}{10} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 18^\circ$$

$$\sqsubset, 210^\circ = 210 \times 1^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$$

$$\sqsupset, \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi \times 1 = \frac{7}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \sqsupset$ 이다.

$$5 \quad 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\textcircled{1} -\frac{5}{2}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{3}{2}\pi \quad \textcircled{2} -\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{4}\pi$$

$$\textcircled{3} -\frac{4}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi \quad \textcircled{4} \frac{11}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{5}$$

$$\textcircled{5} \frac{10}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{4}{3}\pi$$

따라서 120° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

- 6 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$l = r\theta \text{에서 } \frac{\pi}{2} = r \times \frac{\pi}{6} \quad \therefore r = 3$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

다른 풀이 $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$

- 7 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는 $2r + l$ 이다.

$$8 + l = 16 \text{이므로 } l = 8$$

$$l = r\theta \text{에서 } 8 = 4\theta \quad \therefore \theta = 2$$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 ② 2이다.

8 $\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{3 \sin \theta \tan \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{3 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{3}} = \frac{3}{16}$$

- 9 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이다.

(i) $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때

$\sin \theta > 0 \Rightarrow$ 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각

$\tan \theta < 0 \Rightarrow$ 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각

따라서 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 을 만족시키는 각 θ 는 제2사분면의 각

(ii) $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때

$\sin \theta < 0 \Rightarrow$ 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\tan \theta > 0 \Rightarrow$ 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 을 만족시키는 각 θ 는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 각 θ 는 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각이다.

- 10 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta < 0$$

$$\therefore |\sin \theta - \cos \theta| = \sqrt{\sin^2 \theta}$$

$$= |\sin \theta - \cos \theta| - |\sin \theta|$$

$$= -(\sin \theta - \cos \theta) - (-\sin \theta) = \cos \theta$$

따라서 주어진 식을 간단히 한 것은 ②이다.

$$\begin{aligned} 11 \quad & \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta} \\ &= \frac{1-\sin \theta + 1+\sin \theta}{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

따라서 주어진 식을 간단히 한 것은 ④이다.

- 12 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

이때 각 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} &= -\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

- 13 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

- 14 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a^2 - 2}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = a^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = a^2$$

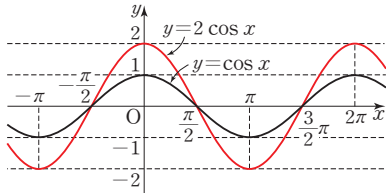
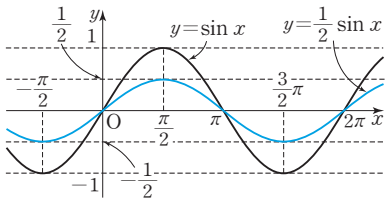
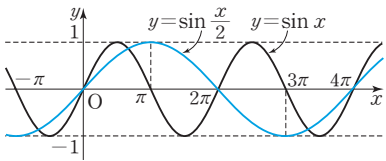
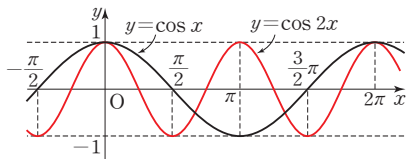
②을 위의 식에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{a^2 - 2}{4} = a^2 \quad \therefore a = 0$$

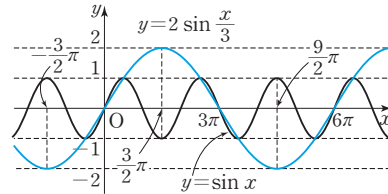
즉, $\sin \theta + \cos \theta = 0$ 에서 $\cos \theta = -\sin \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

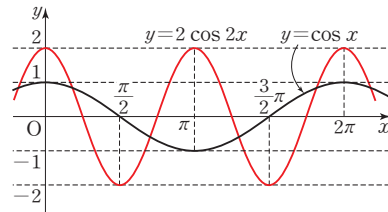
본문 | 072~077쪽

1-1 $-2, -2, 2\pi$ 1-2 (1) $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$ $2 \cos x = 2 \cos(x + 2\pi)$ 이므로 주기는 2π 이다.따라서 함수 $y = 2 \cos x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.(2) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}$ 이므로 치역은 $\{y | -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ $\frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin(x + 2\pi)$ 이므로 주기는 2π 이다.따라서 함수 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.2-1 $-1, -1, 4\pi$ 2-2 (1) $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$ 이므로 치역은 $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ $\sin \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi)\right)$ 이므로 주기는 4π 이다.따라서 함수 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.(2) $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 치역은 $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ $\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi)$ 이므로 주기는 π 이다.따라서 함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

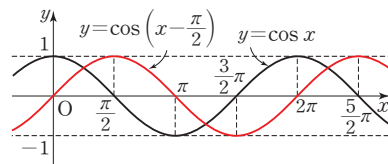
참고 두 함수 $y = \sin ax, y = \cos ax$ 의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이다. (단, $a \neq 0$)

3-1 3, 3, 4π 3-2 (1) $-2 \leq 2 \sin \frac{x}{3} \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$ $2 \sin \frac{x}{3} = 2 \sin\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = 2 \sin \frac{1}{3}(x + 6\pi)$ 이므로 주기는 6π 이다.따라서 함수 $y = 2 \sin \frac{x}{3}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

참고 $y = a \sin bx$ 꼴의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$ 배, y 축의 방향으로 $|a|$ 배 한 그래프이다. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

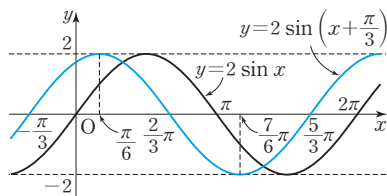
① 최댓값: $|a|$, 최솟값: $-|a|$ ② 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$ (2) $-2 \leq 2 \cos 2x \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$ $2 \cos 2x = 2 \cos(2x + 2\pi) = 2 \cos 2(x + \pi)$ 이므로 주기는 π 이다.따라서 함수 $y = 2 \cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

참고 $y = a \cos bx$ 꼴의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$ 배, y 축의 방향으로 $|a|$ 배 한 그래프이다. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

① 최댓값: $|a|$, 최솟값: $-|a|$ ② 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$ 4-1 $-1, -1, 2\pi$ 4-2 (1) $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ 이므로 치역은 $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π 이다.따라서 함수 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

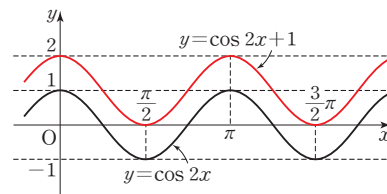
(2) $-2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$
 $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 의 그래프는 $y = 2 \sin x$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 주기는
 2π 이다.

따라서 함수 $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 에서 $0 \leq \cos 2x + 1 \leq 2$ 이므로
치역은 $\{y | 0 \leq y \leq 2\}$

$y = \cos 2x + 1$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 y 축
의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주기는 π 이다.
따라서 함수 $y = \cos 2x + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 $y = a \sin(bx + c) + d$, $y = a \cos(bx + c) + d$
꼴의 그래프는 각각 $y = a \sin bx$, $y = a \cos bx$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동
한 그래프이다. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

① 최댓값: $|a| + d$, 최솟값: $-|a| + d$

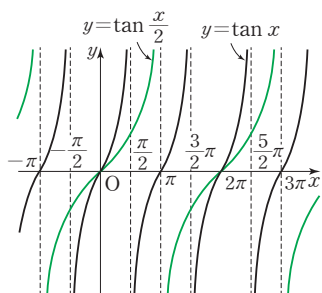
② 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$

5-1 4

5-2 (1) $\tan \frac{x}{2} = \tan \left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \tan \frac{1}{2}(x + 2\pi)$

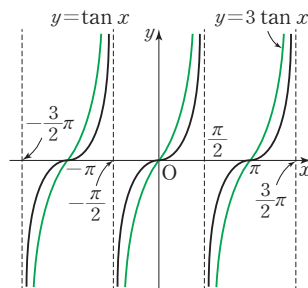
이므로 주기는 2π , 점근선은 직선 $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉
 $x = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이다.

따라서 함수 $y = \tan \frac{x}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $3 \tan x = 3 \tan(x + \pi)$ 이므로 주기는 π , 점근선은 직
선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

따라서 함수 $y = 3 \tan x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 $y = a \tan bx$ 꼴의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$ 배, y 축의 방향으로 $|a|$ 배 한 그래
프이다. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

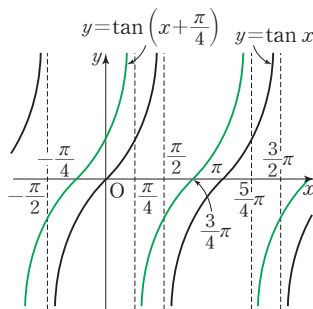
① 최댓값, 최솟값은 없다.

② 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

6-1 π

6-2 (1) $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 주기는 π , 점
근선은 직선 $x + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (n 은 정
수)이다.

따라서 함수 $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과
같다.

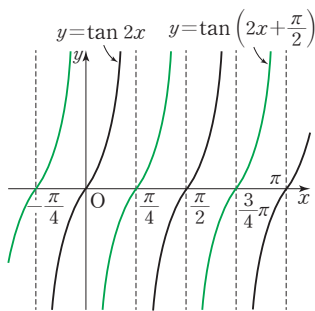


(2) $y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는

$y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행
이동한 것이므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선은 직선

$2x + \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \frac{n}{2}\pi$ (n 은 정수)이다.

따라서 함수 $y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과
같다.



참고 $y = a \tan (bx+c)+d$ 꼴의 그래프는

$y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 그래프이다. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

① 최댓값, 최솟값은 없다.

② 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

7-1 (1) 6, 6 (2) 3, 3, 1 (3) 4, 4, 1

7-2 (1) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos \frac{7}{6}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan \frac{4}{3}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

8-1 (1) 6, 6, 2 (2) 4, 4 (3) 3, 3, $-\sqrt{3}$

8-2 (1) $\sin \frac{2}{3}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \frac{5}{6}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan \frac{3}{4}\pi = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

9-1 (1) 6, 6, $\sqrt{3}$ (2) 3, 3 (3) 4, -1

9-2 (1) $\sin \frac{3}{4}\pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos \frac{2}{3}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

(3) $\tan \frac{5}{6}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

10-1 $\cos x, -\sin x, \cos x, 2 \cos x$

10-2 (1) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$
 $\sin (x - \pi) = -\sin (\pi - x) = -\sin x$ 이므로
 (주어진 식) $= \cos x + \sin x - \sin x = \cos x$

(2) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ 이므로
 (주어진 식) $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

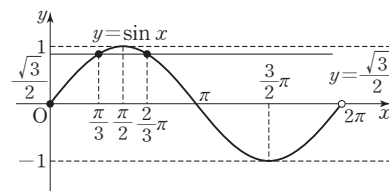
(3) $\sin (-x) = -\sin x, \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$

$\tan \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ 이므로

(주어진 식) $= \frac{-\sin x}{\sin x} + \tan x \times \frac{1}{\tan x}$
 $= -1 + 1 = 0$

11-1 6

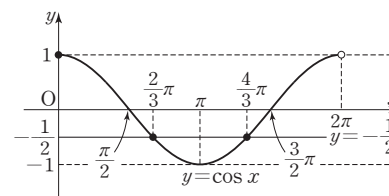
11-2 (1) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



주어진 방정식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2\pi}{3}$

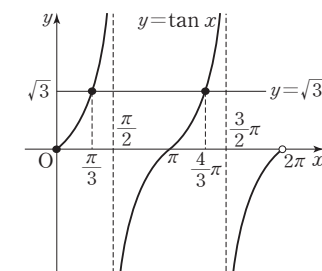
(2) $2 \cos x + 1 = 0$ 에서 $\cos x = -\frac{1}{2}$



주어진 방정식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$x = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4\pi}{3}$

(3) $\tan x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan x = \sqrt{3}$

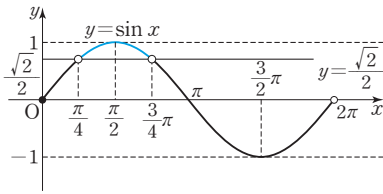


주어진 방정식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4\pi}{3}$

12-1 π

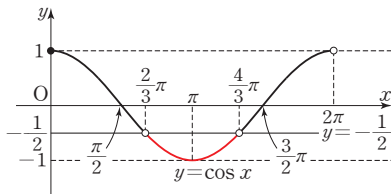
12-2 (1) $2 \sin x > \sqrt{2}$ 에서 $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

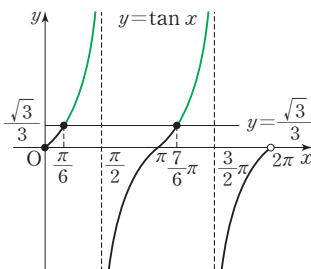
(2) $2 \cos x + 1 < 0$ 에서 $\cos x < -\frac{1}{2}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$$

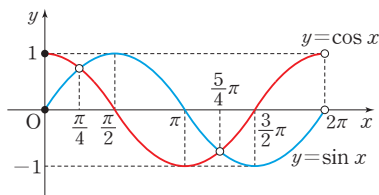
(3) $3 \tan x \geq \sqrt{3}$ 에서 $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2}$$

참고



$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 부등식 $\sin x < \cos x$ 의 해는 $y = \cos x$ 의 그래프가 $y = \sin x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$$

집중 연습

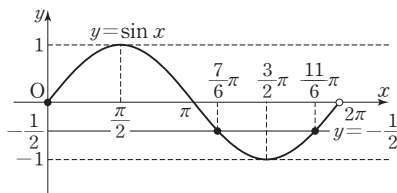
본문 | 078, 079쪽

- 1 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- (2) $\sin\frac{13}{3}\pi = \sin\left(2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (4) $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\frac{3}{4}\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (5) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (6) $\cos\frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (7) $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ)$
 $= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- (8) $\cos\left(-\frac{11}{6}\pi\right) = \cos\frac{11}{6}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (9) $\tan\frac{7}{3}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- (10) $\tan\frac{15}{4}\pi = \tan\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\tan\frac{\pi}{4} = -1$
- (11) $\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\tan\frac{5}{6}\pi = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
 $= -\left(-\tan\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- (12) $\tan(-210^\circ) = -\tan 210^\circ = -\tan(180^\circ + 30^\circ)$
 $= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이 (10) 함수 $y = \tan x$ 의 주기가 π 이므로

$$\begin{aligned} \tan\frac{15}{4}\pi &= \tan\left(\pi \times 3 + \frac{3}{4}\pi\right) \\ &= \tan\frac{3}{4}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = -1 \end{aligned}$$

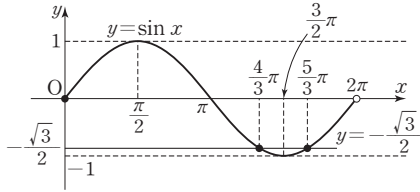
2 (1) $2 \sin x + 1 = 0$ 에서 $\sin x = -\frac{1}{2}$



주어진 방정식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

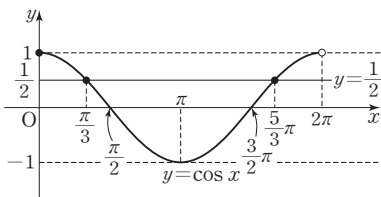
$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11\pi}{6}$$

(2) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ 에서 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



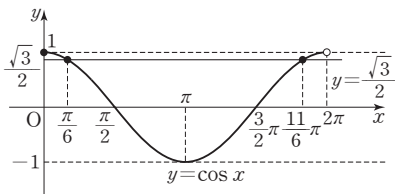
주어진 방정식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와
직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(3) $2 \cos x - 1 = 0$ 에서 $\cos x = \frac{1}{2}$



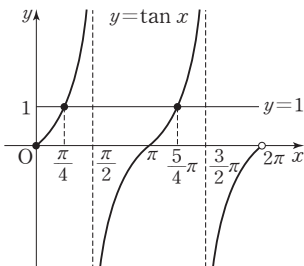
주어진 방정식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(4) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



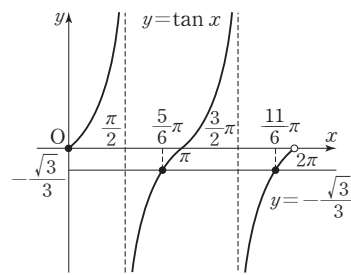
주어진 방정식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(5) $\tan x - 1 = 0$ 에서 $\tan x = 1$



주어진 방정식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와
직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

(6) $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$ 에서 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

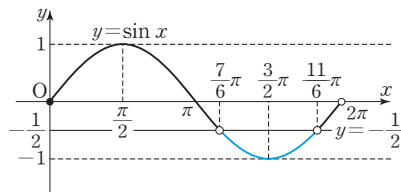


주어진 방정식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와
직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

참고 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프
와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

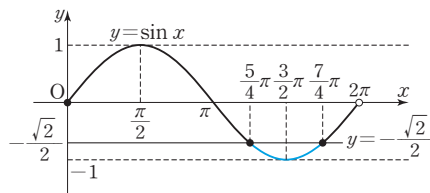
3 (1) $2 \sin x + 1 < 0$ 에서 $\sin x < -\frac{1}{2}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가
직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으
므로

$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

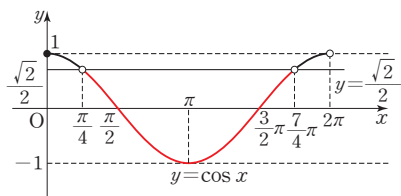
(2) $\sqrt{2} \sin x + 1 \leq 0$ 에서 $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가
직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위
와 같으므로

$\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$

(3) $\sqrt{2} \cos x - 1 < 0$ 에서 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

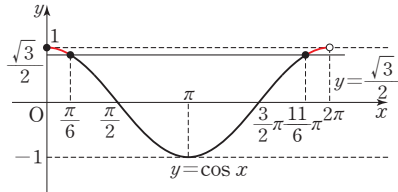


주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가

직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$$

(4) $2 \cos x - \sqrt{3} \geq 0$ 에서 $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

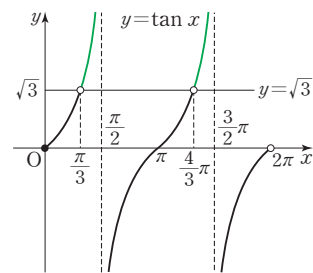


주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같
으므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$$

(5) $\tan x - \sqrt{3} > 0$ 에서 $\tan x > \sqrt{3}$

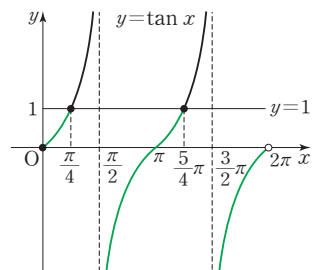


주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가

직선 $y = \sqrt{3}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

(6) $\tan x - 1 \leq 0$ 에서 $\tan x \leq 1$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가

직선 $y = 1$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같
으므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

참고 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가
함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이다.

기초 개념 평가

본문 | 080, 081쪽

01 실수

02 원점, y 축

03 2π

04 $n\pi + \frac{\pi}{2}$, 실수

05 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$

06 원점

07 π

08 $-\sin x$

09 $-\cos x$

10 $\tan x$

11 $\cos x$

12 $-\sin x$

13 $-\frac{1}{\tan x}$

14 $\sin x = k, y = k, x$ 좌표

15 위쪽

16 아래쪽

기초 문제 평가

본문 | 082, 083쪽

1 ① $y = \cos(x - 30^\circ)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 30° 만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π 이다.

② $y = \sin(2x - \pi) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는

$y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동
한 것이므로 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

③ $y = \cos \frac{x}{2}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ 이다.

④ $y = 2 \tan \frac{x}{2}$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ 이다.

⑤ $y = \frac{1}{2} \cos 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 주기가 가장 큰 것은 ③이다.

2 함수 $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 에서

$$\text{최댓값은 } \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{최솟값은 } -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\text{주기는 } \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \therefore c = 1$$

$$\therefore a - b + c = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

3 $y = a \cos bx + c$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 1$

$$\text{또 주기는 } \pi \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

4 $f(x) = a \cos\left(bx + \frac{\pi}{3}\right) + c$ 의 최댓값이 2이므로
 $a + c = 2$ ㉠

또 주기가 π 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$f(x) = a \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + c \text{에서}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{이므로 } a \cos \frac{2}{3}\pi + c = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}a + c = \frac{1}{2} \quad \therefore -a + 2c = 1 \quad \text{.....㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, c = 1$

$$\therefore a + b - c = 1 + 2 - 1 = 2$$

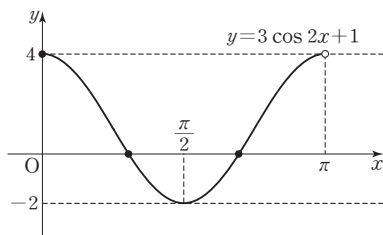
5 함수 $y = 3 \cos 2x + 1$ 에서

① 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

② 최댓값은 $3 + 1 = 4$ 이다.

③ 최솟값은 $-3 + 1 = -2$ 이다.

④ $0 \leq x < \pi$ 에서 $y = 3 \cos 2x + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 x 축과 2번 만난다.



⑤ 그래프는 $y = 3 \cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

6 함수 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 에서

① 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

② 치역은 실수 전체의 집합이므로 최댓값은 없다.

③ 점근선은 직선 $2x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉

$$x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x = \frac{n}{2}\pi \text{ (} n \text{은 정수)이다.}$$

④ $x = \frac{3}{8}\pi$ 를 대입하면 $y = \tan \frac{\pi}{4} + 1 = 1 + 1 = 2$

이므로 그래프는 점 $\left(\frac{3}{8}\pi, 2\right)$ 를 지난다.

⑤ 그래프는 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

참고 함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
 함수 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 에 대하여 대칭이다.

7 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 에서 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로

$$y = -\sin^2 x + 2 \cos x - 3$$

$$= -(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x - 3$$

$$= \cos^2 x + 2 \cos x - 4$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + 2t - 4 = (t + 1)^2 - 5$$

최댓값은 $t = 1$ 일 때, $M = -1$

최솟값은 $t = -1$ 일 때, $m = -5$

$$\therefore M - m = -1 - (-5) = 4$$

8 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta,$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{이므로}$$

(주어진 식) $= -\sin \theta - (-\cos \theta) + \cos \theta + \sin \theta$

$$= 2 \cos \theta$$

9 $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta, \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta$ 이므로

$$\text{(주어진 식)} = \tan \theta \cos \theta + \frac{-\cos \theta}{-\tan \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos \theta + \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

따라서 주어진 식을 간단히 한 것은 ④이다.

10 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{23}{6}\pi = \cos\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{3}{4}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\therefore \text{(주어진 식)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = 1$$

11 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ 이므로

$$\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 88^\circ = \sin(90^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

⋮

$$\sin 47^\circ = \sin(90^\circ - 43^\circ) = \cos 43^\circ$$

$$\sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ)$$

$$+ \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$$

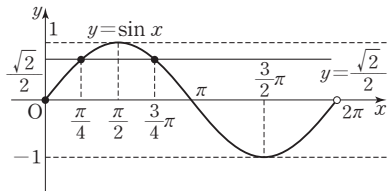
$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{44\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$= 44 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{91}{2}$$

12 (1) $\sqrt{2} \sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$ 에서

$$\sqrt{2} \sin x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sqrt{2} \sin x = 1 \quad \therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



주어진 방정식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

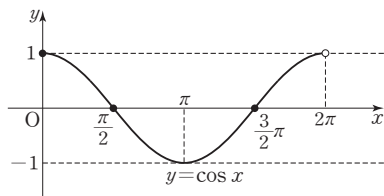
$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{4}$$

(2) $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ 에서 $\cos x(2 \cos x - 1) = 0$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

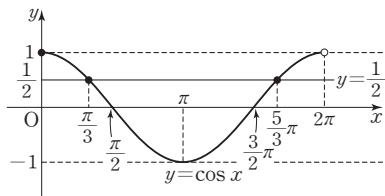
(i) $\cos x = 0$ 일 때



함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의 교점의

$$x\text{좌표는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2}$$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때



함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의

$$x\text{좌표는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$

13 주어진 부등식의 해는 함수

$y = \tan \theta$ 의 그래프가 직선

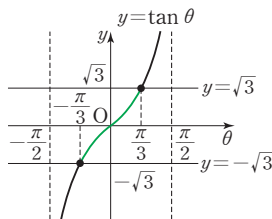
$y = -\sqrt{3}$ 과 직선 $y = \sqrt{3}$

사이에 있거나 만나는 θ 의

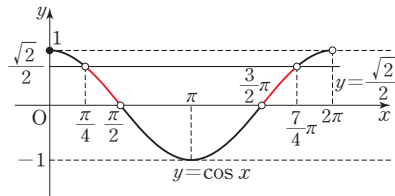
$$\text{값의 범위와 같으므로}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$b - a = \frac{2\pi}{3}$$



14 (1) $0 < 2 \cos x < \sqrt{2}$ 에서 $0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선

$y = 0$ 과 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 사이에 있는 x 의 값의 범위와 같으

므로

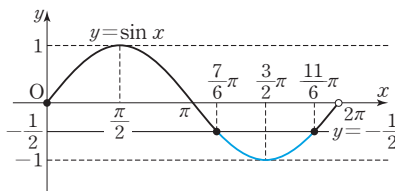
$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$$

(2) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 \geq 0$ 에서

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) \geq 0$$

그런데 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

$$2 \sin x + 1 \leq 0 \quad \therefore \sin x \leq -\frac{1}{2}$$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같

으므로

$$\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$$

15 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

이차방정식 $x^2 - (2\sqrt{2} \sin \theta)x + 3 \cos \theta = 0$ 의 판별식을

D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 하므로

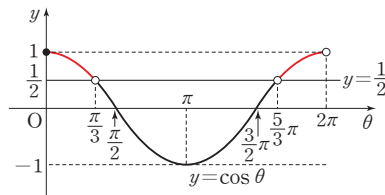
$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 3 \cos \theta < 0$$

$$2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta < 0, 2(1 - \cos^2 \theta) - 3 \cos \theta < 0$$

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 > 0, (\cos \theta + 2)(2 \cos \theta - 1) > 0$$

그런데 $\cos \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2 \cos \theta - 1 > 0 \quad \therefore \cos \theta > \frac{1}{2}$$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$$

본문 | 084~087쪽

1-1 $2\sqrt{6}, 4$ 1-2 $A = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \text{사인법칙에 의하여 } \frac{a}{\sin 45^\circ} &= \frac{5}{\sin 30^\circ} \\ \therefore a &= \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

2-1 a, b 2-2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

세 식을 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.**참고** 사인법칙의 변형

- ① $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$
 ② $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$
 ③ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

3-1 1, 1

3-2 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ 2^2 &= (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{3}-1) \times \sqrt{2} \times \cos B \\ 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \cos B &= 2(1-\sqrt{3}) \\ \therefore \cos B &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 135^\circ$ 4-1 $2c^2, A$ 4-2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{사인법칙에 의하여 } \sin C = \frac{c}{2R}, \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\text{코사인법칙에 의하여 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

세 식을 $2 \cos B \sin C = \sin A$ 에 대입하면

$$2 \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R} = \frac{a}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = a^2, b^2 = c^2$$

이때 $b > 0, c > 0$ 이므로 $b = c$ 이다.따라서 삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

5-1 1, 5

5-2 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

6-1 11, 10

6-2 (1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 8 \times 10} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

 $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \times 4 \times 6} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

 $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

7-1 16

7-2 평행사변형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ \\ &= 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

참고 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 그으면
삼각형 ABC와 삼각형 CDA는 서로 합동이므로

$$\begin{aligned} S &= 2 \triangle ABC = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B \right) \\ &= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B \end{aligned}$$

8-1 $\sqrt{3}, 35\sqrt{3}$ 8-2 사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

1 (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$

$$\therefore b = \frac{10 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

(2) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$B = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 135^\circ}$

$$\therefore b = \frac{6 \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$$

(3) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$

$$\therefore a = \frac{6 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}$$

(4) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$

$$\therefore c = \frac{3\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{3}$$

2 (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin A} = \frac{10\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

$$\sin A = \frac{10 \sin 135^\circ}{10\sqrt{2}} = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ \text{ 또는 } A = 150^\circ$$

그런데 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이고

$$B = 135^\circ \text{이므로 } A = 30^\circ$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}$

$$\sin C = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$C = 60^\circ \text{ 또는 } C = 120^\circ$$

3 (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R$

$$2R \times \frac{1}{2} = 10 \quad \therefore R = 10$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 45^\circ} = 2R$

$$2R \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \quad \therefore R = 3\sqrt{2}$$

(3) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin 45^\circ} = 2R$

$$2R \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \quad \therefore R = 6\sqrt{2}$$

(4) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{10\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = 2R$

$$2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{6} \quad \therefore R = 10\sqrt{2}$$

4 (1) $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ 에서

$$a : b : c = 2 : 3 : 4$$

$a = 2k, b = 3k, c = 4k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 + (4k)^2}{(2k + 3k + 4k)^2} = \frac{29k^2}{81k^2} = \frac{29}{81}$$

(2) $A : B : C = 1 : 2 : 9$ 에서

$$C = 180^\circ \times \frac{9}{1 + 2 + 9} = 135^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin 135^\circ} = 2 \times 1$

$$\therefore c = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

5 (1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 36 - 60 \times \frac{1}{2} = 31 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \sqrt{31}$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ \\ &= 9 + 2 - 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \end{aligned}$$

$$c > 0 \text{이므로 } c = \sqrt{5}$$

(3) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 100 + 36 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196 \end{aligned}$$

$$b > 0 \text{이므로 } b = 14$$

(4) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \cos 150^\circ \\ &= 4 + 3 - 4\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 13 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \sqrt{13}$$

$$6 (1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{1}{7}$$

$$(2) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 3 \times 4} = -\frac{11}{24}$$

$$7 (1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 120^\circ$$

$$(2) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$C = 45^\circ$$

$$(3) \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 30^\circ$$

$$(4) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 60^\circ$$

$$8 (1) \sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} \text{에서}$$

$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7}$$

크기가 최대인 각은 C 이므로

$a = k, b = \sqrt{3}k, c = \sqrt{7}k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{k^2 + (\sqrt{3}k)^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \times k \times \sqrt{3}k} \\ &= \frac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 150^\circ$

따라서 크기가 최대인 각의 크기는 150° 이다.

참고 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 최대이고, 가장 짧은 변의 대각의 크기가 최소이다.

$$(2) \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8 \text{에서}$$

$$a : b : c = 5 : 7 : 8$$

$a = 5k, b = 7k, c = 8k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(8k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 8k \times 5k} \\ &= \frac{40k^2}{80k^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 60^\circ$$

기초 개념 평가

본문 | 090, 091쪽

$$01 \quad a, \sin C$$

$$03 \quad \sin A$$

$$05 \quad \cos A$$

$$07 \quad a^2$$

$$09 \quad 4$$

$$11 \quad ab \sin \theta$$

$$02 \quad \sin A, c$$

$$04 \quad \sin B$$

$$06 \quad b^2$$

$$08 \quad ca$$

$$10 \quad b$$

$$12 \quad \frac{1}{2}pq \sin \theta$$

기초 문제 평가

본문 | 092, 093쪽

$$1 \quad B = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \therefore R = 2$$

$$2 \quad \text{사인법칙에 의하여 } \frac{5\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin B}$$

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{10 \sin 30^\circ}{5\sqrt{2}} \\ &= 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 45^\circ \text{ 또는 } B = 135^\circ$$

3 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

세 식을 $a \sin A + b \sin B = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}, a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

4 열기구의 위치를 C라 하면

$$\angle CAB + \angle ACB = 75^\circ \text{ 이므로}$$

$$45^\circ + \angle ACB = 75^\circ \quad \therefore \angle ACB = 30^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{15 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 15\sqrt{2} \text{ (m)}$$

따라서 B 지점에서 열기구까지의 거리는 $15\sqrt{2}$ m이다.

5 $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ 에서

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

$a = 3k, b = 5k, c = 7k (k > 0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (7k)^2 - (3k)^2}{2 \times 5k \times 7k} = \frac{65k^2}{70k^2} = \frac{13}{14}$$

$$\cos B = \frac{(7k)^2 + (3k)^2 - (5k)^2}{2 \times 7k \times 3k} = \frac{33k^2}{42k^2} = \frac{11}{14}$$

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos A : \cos B : \cos C &= \frac{13}{14} : \frac{11}{14} : \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 13 : 11 : (-7) \end{aligned}$$

따라서 구하는 답은 ④이다.

주의 삼각형 ABC에서 세 변의 길이의 비 ($a : b : c$)와 세 각의 크기의 비 ($A : B : C$)는 같지 않음에 주의한다. 즉,
 $a : b : c \neq A : B : C$

6 $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 21 : 15 : 20$ 에서

$$a+b=21k, b+c=15k, c+a=20k (k > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c) = 56k$$

$$\therefore a+b+c = 28k \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a = 13k, b = 8k, c = 7k$$

$$\therefore a : b : c = 13k : 8k : 7k$$

$$= 13 : 8 : 7$$

$a = 13t, b = 8t, c = 7t (t > 0)$ 로 놓으면 크기가 최대인 각은 A이므로

$$\cos A = \frac{(8t)^2 + (7t)^2 - (13t)^2}{2 \times 8t \times 7t} = \frac{-56t^2}{112t^2} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

따라서 크기가 최대인 각의 크기는 120° 이다.

7 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \frac{3}{5} = 25$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 0)$$

한편 $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$2R \times \frac{4}{5} = 5 \quad \therefore R = \frac{25}{8}$$

8 $(a+c)(a-c) = b(b+c)$ 에서

$$a^2 - c^2 = b^2 + bc \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2 + bc \quad \dots\dots ㉠$$

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$b^2 + c^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

9 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \dots\dots ㉠$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 $2 \sin C \cos B = \sin A - \sin B + \sin C$ 에 대입하면

$$2 \times \frac{c}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a}{2R} - \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = a(a-b+c), b^2 - c^2 - ab + ac = 0$$

$$(b-c)(b+c) - a(b-c) = 0$$

$$(b-c)(b+c-a) = 0$$

$$\text{이때 } b+c > a \text{이므로 } b-c=0 \quad \therefore b=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

10 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 6} = \frac{5}{7}$$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \times 7 \times 2 \times \cos B$$

$$= 49 + 4 - 28 \times \frac{5}{7} = 33$$

$$\overline{AD} > 0 \text{이므로 } \overline{AD} = \sqrt{33}$$

다른 풀이 선분 AD의 길이를 x라 하고 $\angle ADB = \theta$ 라 하면

$$\angle ADC = 180^\circ - \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$7^2 = x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \cos \theta$$

$$49 = x^2 + 4 - 4x \cos \theta \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$5^2 = x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 \times \cos (180^\circ - \theta)$$

$$\text{이때 } \cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{이므로}$$

$$25 = x^2 + 16 + 8x \cos \theta \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ $\times 2 +$ ㉡을 하면

$$123 = 3x^2 + 24, x^2 = 33 \quad \therefore x = \sqrt{33} (\because x > 0)$$

따라서 구하는 선분 AD의 길이는 $\sqrt{33}$ 이다.

11 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \times 4 \quad \therefore a = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = 2 \times 4 \quad \therefore b = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 \times \sin 30^\circ = 4\sqrt{3}$$

12 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ 에서

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ$$

$$12\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \overline{AD} \quad \therefore \overline{AD} = \frac{24}{7}$$

13 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 10^2 + 16^2 - 2 \times 10 \times 16 \times \cos 60^\circ = 196$$

$$\therefore a = 14 \quad (\because a > 0)$$

한편 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 10 \times 16 \times \sin 60^\circ = 40\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}r(14 + 10 + 16) = 40\sqrt{3} \quad \therefore r = 2\sqrt{3}$$

14 선분 AB의 길이를 x라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{19})^2 = x^2 + 10^2 - 2 \times x \times 10 \times \cos 60^\circ$$

$$76 = x^2 + 100 - 10x$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0, (x-4)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 6$$

이때 $\overline{AB} > 5$ 이므로 $\overline{AB} = 6$

따라서 구하는 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$6 \times 10 \times \sin 60^\circ = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

15 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ = 27$$

$$\overline{BD} > 0 \text{이므로 } \overline{BD} = 3\sqrt{3}$$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

$$1-1 \quad (1) 2, 5, 5 \quad (2) 3, 26$$

$$1-2 \quad (1) a_1 = 3 \times 1 + 2 = 5, a_2 = 3 \times 2 + 2 = 8,$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 2 = 11, a_4 = 3 \times 4 + 2 = 14,$$

$$a_5 = 3 \times 5 + 2 = 17$$

$$\therefore 5, 8, 11, 14, 17$$

$$(2) a_1 = 1^2 + 2 = 3, a_2 = 2^2 + 2 = 6, a_3 = 3^2 + 2 = 11,$$

$$a_4 = 4^2 + 2 = 18, a_5 = 5^2 + 2 = 27$$

$$\therefore 3, 6, 11, 18, 27$$

$$2-1 \quad (1) 3n \quad (2) 2$$

$$2-2 \quad (1) a_1 = 2 = 2 \times 1, a_2 = 4 = 2 \times 2, a_3 = 6 = 2 \times 3,$$

$$a_4 = 8 = 2 \times 4, \dots$$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

$$(2) a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}, a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1},$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}, a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}, \dots$$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$3-1 \quad -4, 5, 9$$

$$3-2 \quad (1) a_n = 3 + (n-1) \times (-2) \quad \therefore a_n = -2n + 5$$

$$(2) \text{등차수열 } -1, 1, 3, 5, \dots \text{에서 첫째항이 } -1,$$

$$\text{공차가 } 1 - (-1) = 2 \text{이므로 일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = -1 + (n-1) \times 2 \quad \therefore a_n = 2n - 3$$

$$4-1 \quad (1) 9, 1, 1 \quad (2) 30$$

$$4-2 \quad (1) \text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{라 하면}$$

$$a_3 = a + 2d = 23, a_{12} = a + 11d = -4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = 29, d = -3$$

$$\therefore a_n = 29 + (n-1) \times (-3) \quad \therefore a_n = -3n + 32$$

$$(2) \text{제 } m \text{항이 } -91 \text{이라 하면 } -3m + 32 = -91 \text{에서 } m = 41$$

따라서 -91은 제41항이다.

$$5-1 \quad 3, 11$$

$$5-2 \quad \text{첫째항이 } -45, \text{ 공차가 } 6 \text{인 등차수열의 일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = -45 + (n-1) \times 6 = 6n - 51$$

$$(1) a_n > 0 \text{에서 } 6n - 51 > 0, n > \frac{51}{6} = 8.5$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제9항이다.

$$(2) a_n > 50 \text{에서 } 6n - 51 > 50, n > \frac{101}{6} = 16.\overline{6}$$

따라서 처음으로 50보다 커지는 항은 제17항이다.

6-1 17, 18

6-2 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 50 + (n-1) \times (-4) = -4n + 54$$

$$(1) a_n < 0 \text{에서 } -4n + 54 < 0, n > \frac{54}{4} = 13.5$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제14항이다.

$$(2) a_n < -50 \text{에서 } -4n + 54 < -50, n > \frac{104}{4} = 26$$

따라서 처음으로 -50보다 작아지는 항은 제27항이다.

7-1 (1) 2 (2) 20, 12

7-2 (1) $x = \frac{-1+9}{2} = 4$

(2) y 는 10과 -2의 등차중항이므로

$$y = \frac{10 + (-2)}{2} = 4$$

10은 x 와 y 의 등차중항이므로

$$10 = \frac{x+y}{2}, x+4=20 \quad \therefore x=16$$

$$\therefore x=16, y=4$$

8-1 5, 8, 5

8-2 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면

$$(a-d) + a + (a+d) = 21, 3a = 21 \quad \therefore a = 7$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 91, a(a^2 - d^2) = 91$$

$$\text{이 식에 } a=7 \text{을 대입하면 } 7 \times (49 - d^2) = 91, d^2 = 36$$

$$\therefore d = -6 \text{ 또는 } d = 6$$

(i) $a=7, d=-6$ 일 때, 세 수는 13, 7, 1

(ii) $a=7, d=6$ 일 때, 세 수는 1, 7, 13

(i), (ii)에서 구하는 세 수는 1, 7, 13

9-1 (1) 20 (2) 19, -530

9-2 (1) $\frac{10 \times (2+74)}{2} = 380$

$$(2) \frac{10 \times \{2 \times (-1) + 9 \times 4\}}{2} = 170$$

10-1 6, 816

10-2 (1) 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$3, 6, 9, 12, \dots, 99$$

이 수열은 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$$

$$3n = 99 \quad \therefore n = 33$$

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제33항까지의 합이므로

$$\frac{33 \times (3+99)}{2} = 1683$$

(2) 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$1, 4, 7, 10, \dots, 100$$

이 수열은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2$$

$$3n-2=100 \quad \therefore n=34$$

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제34항까지의 합이므로

$$\frac{34 \times (1+100)}{2} = 1717$$

11-1 1, 1

11-2 (1)(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n-3 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$$

이때 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n = 4n-3$

(2)(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4n^2 + 3n - \{4(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 8n-1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 4 \times 1^2 + 3 \times 1 = 7$$

이때 $a_1=7$ 은 $\textcircled{2}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n = 8n-1$

12-1 1, 2

12-2 (1)(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - n - 1 - \{(n-1)^2 - (n-1) - 1\} \\ &= 2n-2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 - 1 = -1$$

이때 $a_1=-1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 0과 같지 않다.

(i), (ii)에서 $a_1 = -1, a_n = 2n-2 (n \geq 2)$

(2)(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + n + 4 - \{3(n-1)^2 + (n-1) + 4\} \\ &= 6n-2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 + 1 + 4 = 8$$

이때 $a_1=8$ 은 $\textcircled{2}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 4와 같지 않다.

(i), (ii)에서 $a_1 = 8, a_n = 6n-2 (n \geq 2)$

1 (1) $2, 4, 7, 11, 16, 22, \dots$
 $\quad \quad \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6$

$\therefore a_7 = 22 + 7 = 29$

(2) $10, 8, 6, 4, 2, 0, \dots$
 $\quad \quad \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2$

$\therefore a_7 = 0 - 2 = -2$

(3) $1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$
 $\quad \quad \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

$\therefore a_7 = 243 \times 3 = 729$

(4) $a_1 = 1 = 1^2, a_2 = -4 = -2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = -16 = -4^2,$
 $a_5 = 25 = 5^2, a_6 = -36 = -6^2, \dots$

$\therefore a_7 = 7^2 = 49$

2 (1) 첫째항이 3, 공차가 4이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 3 + (n-1) \times 4 \quad \therefore a_n = 4n - 1$

(2) 첫째항이 2, 공차가 5이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 2 + (n-1) \times 5 \quad \therefore a_n = 5n - 3$

(3) 첫째항이 100, 공차가 -5이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 100 + (n-1) \times (-5) \quad \therefore a_n = -5n + 105$

(4) 첫째항이 -3, 공차가 2이므로 일반항 a_n 은

$a_n = -3 + (n-1) \times 2 \quad \therefore a_n = 2n - 5$

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

(1) $a_5 = a + 4d = 3, a_{10} = a + 9d = 18$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -9, d = 3$

$a_n = -9 + (n-1) \times 3 \quad \therefore a_n = 3n - 12$

(2) $a_{15} = a + 14d = 33, a_{45} = a + 44d = 153$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -23, d = 4$

$a_n = -23 + (n-1) \times 4 \quad \therefore a_n = 4n - 27$

(3) $a_5 = a + 4d = 21, a_{12} = a + 11d = 49$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 5, d = 4$

$a_n = 5 + (n-1) \times 4 \quad \therefore a_n = 4n + 1$

(4) $a_3 = a + 2d = 2, a_9 = a + 8d = -16$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 8, d = -3$

$a_n = 8 + (n-1) \times (-3) \quad \therefore a_n = -3n + 11$

4 (1) $x = \frac{2+20}{2} = 11$

(2) $x = \frac{10+(-4)}{2} = 3$

(3) y 는 14와 -2의 등차중항이므로

$y = \frac{14+(-2)}{2} = 6$

14는 x 와 y 의 등차중항이므로

$14 = \frac{x+y}{2}$

$x+6=28 \quad \therefore x=22$

$\therefore x=22, y=6$

(4) x 는 1과 y 의 등차중항이므로

$x = \frac{1+y}{2} \quad \therefore 2x-y=1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$

y 는 x 와 -11의 등차중항이므로

$y = \frac{x+(-11)}{2} \quad \therefore x-2y=11 \quad \dots\dots\textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$x=-3, y=-7$

5 (1) $\frac{12 \times (-2+53)}{2} = 306$

(2) $\frac{15 \times (10+52)}{2} = 465$

(3) $\frac{27 \times (9+113)}{2} = 1647$

6 (1) $\frac{17 \times \{2 \times 5 + 16 \times (-2)\}}{2} = -187$

(2) $\frac{20 \times \{2 \times 3 + 19 \times (-5)\}}{2} = -890$

(3) $\frac{16 \times \{2 \times (-3) + 15 \times 6\}}{2} = 672$

7 (1) 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$

$5n - 3 = 72 \quad \therefore n = 15$

따라서 구하는 합은

$\frac{15 \times (2+72)}{2} = 555$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$a_n = -2 + (n-1) \times (-3) = -3n + 1$

$-3n + 1 = -53 \quad \therefore n = 18$

따라서 구하는 합은

$\frac{18 \times \{-2 + (-53)\}}{2} = -495$

(3) 첫째항이 1, 공차가 6인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$a_n = 1 + (n-1) \times 6 = 6n - 5$

$6n - 5 = 91 \quad \therefore n = 16$

따라서 구하는 합은

$\frac{16 \times (1+91)}{2} = 736$

- 9 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면
세 수의 합이 6이므로
 $(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6 \quad \therefore a=2$
세 수의 곱이 -24 이므로
 $(a-d) \times a \times (a+d) = -24$, $a(a^2-d^2) = -24$
이 식에 $a=2$ 를 대입하면 $2(4-d^2) = -24$, $d^2=16$
 $\therefore d=-4$ 또는 $d=4$
(i) $a=2$, $d=-4$ 일 때, 세 수는 $6, 2, -2$
(ii) $a=2$, $d=4$ 일 때, 세 수는 $-2, 2, 6$
(i), (ii)에서 세 수는 $-2, 2, 6$ 이므로 세 수의 제곱의 합은
 $(-2)^2+2^2+6^2=44$

- 10 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_{10}=a+9d=-1$ ㉠
 $a_{16}=a+15d=11$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-19$, $d=2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제26항까지의 합은
 $\frac{26 \times \{2 \times (-19) + 25 \times 2\}}{2} = 156$

- 11 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3=a+2d=9$ ㉠
 $a_{15}=a+14d=-15$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $d=-2$
 $\therefore a_n=13+(n-1) \times (-2) = -2n+15$
 $a_n < 0$ 에서 $-2n+15 < 0$, $n > \frac{15}{2} = 7.5$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제7항까지 양수이고 제8항부터 음수이다.
또 $a_1=13$, $a_7=1$, $a_8=-1$, $a_{20}=-25$ 이므로
 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$
 $=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+a_9+\cdots+a_{20})$
 $=\frac{7 \times (13+1)}{2} - \frac{13 \times \{-1+(-25)\}}{2}$
 $=49+169=218$

- 12 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
첫째항부터 제5항까지의 합이 125이므로
 $\frac{5 \times (2a+4d)}{2} = 125 \quad \therefore a+2d=25$ ㉠
첫째항부터 제10항까지의 합이 500이므로
 $\frac{10 \times (2a+9d)}{2} = 500 \quad \therefore 2a+9d=100$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=10$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은
 $a_n=5+(n-1) \times 10 \quad \therefore a_n=10n-5$

- 13 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
첫째항부터 제5항까지의 합이 20이므로
 $\frac{5 \times (2a+4d)}{2} = 20 \quad \therefore a+2d=4$ ㉠
제3항부터 제7항까지의 합이 -10 이므로
 $\frac{5 \times \{2(a+2d)+4d\}}{2} = -10$ 첫째항이 $a+2d$, 공차가 d 인 등차수열의
첫째항부터 제5항까지의 합
 $\therefore a+4d=-2$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=-3$
 $\therefore$ 첫째항: 10, 공차: -3

- 14 수열 $1, a_1, a_2, \dots, a_n, 2$ 는 첫째항이 1, 제 $(n+2)$ 항이 2이고,
이 수열의 첫째항부터 제 $(n+2)$ 항까지의 합이 24이므로
 $\frac{(n+2)(1+2)}{2} = 24$
 $n+2=16 \quad \therefore n=14$

- 15 100 이하의 자연수 중에서 8의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면
 $8, 16, 24, 32, \dots, 96$
이 수열은 첫째항이 8, 공차가 8인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n=8+(n-1) \times 8=8n$
 $8n=96 \quad \therefore n=12$
100 이하의 자연수 중에서 8의 배수의 합은
 $\frac{12 \times (8+96)}{2} = 624$
이때 1부터 100까지의 자연수의 합은
 $\frac{100 \times (1+100)}{2} = 5050$
따라서 100 이하의 자연수 중에서 8의 배수가 아닌 수의 합은
 $5050-624=4426$

- 16 (i) $n \geq 2$ 일 때
 $a_n=S_n-S_{n-1}$
 $=3n^2-2n+1-\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\}$
 $=6n-5$ ㉠
(ii) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=3 \times 1^2-2 \times 1+1=2$
이때 $a_1=2$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값 1과 같지 않다.
(i), (ii)에서 $a_1=2$, $a_n=6n-5$ ($n \geq 2$)
 $\therefore a_1+a_6=2+31=33$
다른 풀이 $a_1=S_1=3 \times 1^2-2 \times 1+1=2$
 $a_6=S_6-S_5$
 $=(3 \times 6^2-2 \times 6+1)-(3 \times 5^2-2 \times 5+1)$
 $=97-66=31$
 $\therefore a_1+a_6=2+31=33$

본문 | 108~113쪽

1-1 2, 2

1-2 (1) $a_n = \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$

(2) 등비수열 $-6, 12, -24, 48, \dots$ 에서 첫째항이 -6 ,
공비가 $12 \div (-6) = -2$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -6 \times (-2)^{n-1}$

2-1 (1) 2, 3 (2) 9, 9

2-2 (1) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = ar^5 = -96 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = -8$$

 r 는 실수이므로 $r = -2$ $r = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 3$

$$\therefore a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

(2) 제 m 항이 -1536 이라 하면

$$3 \times (-2)^{m-1} = -1536 \text{에서}$$

$$(-2)^{m-1} = -512 = (-2)^9, m-1=9 \quad \therefore m=10$$

따라서 -1536 은 제10항이다.

3-1 7, 8, 8

3-2 첫째항이 5, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 \times 3^{n-1}$$

$$a_n > 1000 \text{에서 } 5 \times 3^{n-1} > 1000, 3^{n-1} > 200$$

$$\text{이때 } 3^4 = 81, 3^5 = 243 \text{이므로 } n-1 \geq 5 \quad \therefore n \geq 6$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제6항이다.

4-1 1500, 12, 12

4-2 (1) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = ar^5 = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = \frac{1}{27}$$

$$r \text{는 실수이므로 } r = \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{1}{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = 81$$

$$\therefore a_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(2) a_n < \frac{1}{5} \text{에서 } 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{5}, 3^{n-1} > 405$$

$$\text{이때 } 3^5 = 243, 3^6 = 729 \text{이므로 } n-1 \geq 6 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{5}$ 보다 작아지는 항은 제7항이다.

5-1 (1) 4 (2) 250

5-2 (1) x 는 3과 27의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 27 = 81 \quad \therefore x = 9 (\because x > 0)$$

(2) x 는 6과 54의 등비중항이므로

$$x^2 = 6 \times 54 = 324 \quad \therefore x = 18 (\because x > 0)$$

54는 x 와 y 의 등비중항이므로

$$54^2 = xy, \text{ 즉 } 18y = 2916 \text{에서}$$

$$y = 162$$

6-1 4, 4

6-2 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 수의 합이 26이므로

$$a + ar + ar^2 = 26 \quad \therefore a(1 + r + r^2) = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수의 곱이 216이므로

$$a \times ar \times ar^2 = 216, a^3 r^3 = (ar)^3 = 216$$

$$ar \text{는 실수이므로 } ar = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{6}{r} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{6}{r}(1 + r + r^2) = 26, 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r-1)(r-3) = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{3} \text{ 또는 } r = 3$$

$$(i) r = \frac{1}{3} \text{일 때, } a = 18 \text{이므로 세 수는 } 18, 6, 2$$

$$(ii) r = 3 \text{일 때, } a = 2 \text{이므로 세 수는 } 2, 6, 18$$

(i), (ii)에서 구하는 세 수는 2, 6, 18

다른 풀이 등비수열을 이루는 세 수를 $a, b, c (a < b < c)$ 라
하면

$$a + b + c = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$abc = 216 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = ac \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b^3 = 216 \quad \therefore b = 6 (\because b \text{는 실수})$$

$$b = 6 \text{을 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$a + c = 20, ac = 36$$

$$a(20-a) = 36, a^2 - 20a + 36 = 0$$

$$(a-2)(a-18) = 0 \quad \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 18$$

$$a < c \text{이므로 } a = 2, c = 18$$

따라서 구하는 세 수는 2, 6, 18

7-1 (1) 2, 21 (2) -3

7-2 (1) $\frac{2 \times (3^{10} - 1)}{3 - 1} = 3^{10} - 1$

$$(2) \frac{\frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

8-1 -3, 1

8-2 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\text{제2항이 } -6 \text{이므로 } ar = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{제5항이 } -162 \text{이므로 } ar^4 = -162 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^3 = 27$$

r 는 실수이므로 $r=3$

$r=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a=-2$

따라서 구하는 합은

$$\frac{(-2) \times (3^{15}-1)}{3-1} = -(3^{15}-1) = 1-3^{15}$$

9-1 (1) 8, 3, 3 (2) 1533

9-2 (1) 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1} = -15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a(r^8-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = -255 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } -15(r^4+1) = -255$$

$$r^4 = 16, r^4 - 16 = 0$$

$$(r^2+4)(r^2-4) = 0, (r^2+4)(r+2)(r-2) = 0$$

r 는 양수이므로 $r=2$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a=-1$

$\therefore$ 첫째항: -1 , 공비: 2

(2) 첫째항이 -1 , 공비가 2 인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{(-1) \times (2^{12}-1)}{2-1} = 1-2^{12} = -4095$$

다른 풀이 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{a(r^{12}-1)}{r-1} &= \frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1} \\ &= -15(r^8+r^4+1) \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

이때 $r^4=16$ 이므로 구하는 합은

$$(-15) \times (16^2+16+1) = -4095$$

참고 자주 이용하는 인수분해 공식

$$\textcircled{1} r^2-1=(r-1)(r+1)$$

$$\Rightarrow r^{2n}-1=(r^n-1)(r^n+1)$$

$$\textcircled{2} r^3-1=(r-1)(r^2+r+1)$$

$$\Rightarrow r^{3n}-1=(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)$$

10-1 1, 1

10-2 (i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times 3^n - 2 - (2 \times 3^{n-1} - 2) \\ &= 4 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 3^1 - 2 = 4$$

이때 $a_1=4$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n = 4 \times 3^{n-1}$

11-1 1, 3

11-2 (i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times 3^n + 2 - (2 \times 3^{n-1} + 2) \\ &= 4 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 3^1 + 2 = 8$$

이때 $a_1=8$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 4와 같지 않다.

(i), (ii)에서 $a_1=8, a_n=4 \times 3^{n-1} (n \geq 2)$

집중 연습

본문 | 114, 115쪽

1 (1) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 5, 공비가 -2 이므로

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 4, 공비가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$a_n = 4 \times (\sqrt{3})^{n-1}$$

2 (1) $a_n = -3 \times 6^{n-1}$

$$(2) a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

첫째항이 2이고 제4항이 250이므로

$$2r^3 = 250, r^3 = 125$$

r 는 실수이므로 $r=5$

$$\therefore a_n = 2 \times 5^{n-1}$$

3 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$(1) \text{제3항이 } 18 \text{이므로 } ar^2 = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{제5항이 } 162 \text{이므로 } ar^4 = 162 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^2 = 9$$

$$\therefore r = -3 \text{ 또는 } r = 3$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$r = -3 \text{일 때 } a = 2, r = 3 \text{일 때 } a = 2$$

$$\therefore a_n = 2 \times (-3)^{n-1} \text{ 또는 } a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$(2) \text{제2항이 } \frac{1}{2} \text{이므로 } ar = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{제5항이 } 4 \text{이므로 } ar^4 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^3 = 8$$

r 는 실수이므로 $r=2$

$$r=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$$

$$(3) \text{ 제2항이 } \frac{3}{2} \text{ 이므로 } ar = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{제4항이 } \frac{3}{8} \text{ 이므로 } ar^3 = \frac{3}{8} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{ 을 하면 } r^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$r = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 } a = -3, r = \frac{1}{2} \text{ 일 때 } a = 3$$

$$\therefore a_n = -3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ 또는 } a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

4 (1) x 는 8과 18의 등비중항이므로

$$x^2 = 8 \times 18 = 144 \quad \therefore x = 12 \quad (\because x > 0)$$

(2) x 는 3과 $\frac{1}{12}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{2} \quad (\because x > 0)$$

(3) y 는 -6 과 -54 의 등비중항이므로

$$y^2 = (-6) \times (-54) = 324 \quad \therefore y = 18 \quad (\because y > 0)$$

-6 은 x 와 y 의 등비중항이므로

$$(-6)^2 = xy, 18y = 36 \quad \therefore x = 2$$

5 (1) $\frac{5 \times (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 5(2^{20} - 1)$

(2) $\frac{1 \times (5^{20} - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^{20} - 1)$

(3) $\frac{4 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 3 \left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$

6 (1) 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{3 \times (3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^8 - 1)$$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{8 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\} = \frac{255}{16}$$

(3) 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{\sqrt{2} \times \{(\sqrt{2})^8 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \{(\sqrt{2})^8 - 1\} \\ = 15(2 + \sqrt{2})$$

7 (1) 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로 1024를 제 n 항이라 하면

$$2 \times 2^{n-1} = 1024, 2^n = 1024 = 2^{10} \quad \therefore n = 10$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{2 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 2 = 2046$$

(2) 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로 192를 제 n 항이라 하면

$$\frac{3}{2} \times 2^{n-1} = 192, 2^{n-1} = 128 = 2^7$$

$$n - 1 = 7 \quad \therefore n = 8$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{\frac{3}{2} \times (2^8 - 1)}{2 - 1} = \frac{3}{2}(2^8 - 1) = \frac{765}{2}$$

(3) 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 $\frac{1}{32}$ 을 제 n 항이라 하면

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$$

$$n - 1 = 6 \quad \therefore n = 7$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{2 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\} = \frac{43}{32}$$

8 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

(1) 제3항이 6이므로 $ar^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

제6항이 48이므로 $ar^5 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{ 을 하면 } r^3 = 8$$

r 는 실수이므로 $r = 2$

$$\text{이것을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{\frac{3}{2} \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = \frac{3}{2}(2^7 - 1) = \frac{381}{2}$$

(2) 제2항이 3이므로 $ar = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

제5항이 -24 이므로 $ar^4 = -24 \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{ 을 하면 } r^3 = -8$$

r 는 실수이므로 $r = -2$

$$\text{이것을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } a = -\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{-\frac{3}{2} \times \{1 - (-2)^7\}}{1 - (-2)} = -\frac{1}{2} \{1 - (-2)^7\} = -\frac{129}{2}$$

(3) 제4항이 6이므로 $ar^3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

제7항이 $\frac{3}{4}$ 이므로 $ar^6 = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{ 을 하면 } r^3 = \frac{1}{8}$$

$$r \text{는 실수이므로 } r = \frac{1}{2}$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a = 48$

따라서 구하는 합은

$$\frac{48 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 96 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right\} = \frac{381}{4}$$

- | | |
|-----------|--------------------------|
| 01 등비수열 | 02 $\times r$ |
| 03 8 | 04 7 |
| 05 등비중항 | 06 $b^2=ac$ |
| 07 r | 08 na |
| 09 r, r | 10 r^{3n}, r^n, r^{2n} |
| 11 S_1 | 12 S_n |

- 1 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 첫째항이 32이므로
 $a_4 : a_8 = 2 : 3$ 에서
 $32r^3 : 32r^7 = 2 : 3, 64r^7 = 96r^3 \quad \therefore r^4 = \frac{3}{2}$
 $\therefore a_{13} = 32r^{12} = 32 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 108$
- 2 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로
 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{20}$
 $= 2 \times (2 \times \sqrt{2}) \times \{2 \times (\sqrt{2})^2\} \times \cdots \times \{2 \times (\sqrt{2})^{19}\}$
 $= 2^{20} \times (\sqrt{2})^{1+2+3+\cdots+19}$
 이때 $1+2+3+\cdots+19 = \frac{19 \times (1+19)}{2} = 190$ 이므로
 (주어진 식) $= 2^{20} \times (\sqrt{2})^{190} = 2^{20} \times 2^{95} = 2^{115}$
 $\therefore m = 115$
- 3 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a + ar = 60, a(1+r) = 60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $ar^2 + ar^3 = 240, ar^2(1+r) = 240 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면 $r^2 = 4$
 $r > 0$ 이므로 $r = 2$
 $r = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 20$
 $\therefore a_{10} = 20 \times 2^9 = 10240$
- 4 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a + ar + ar^2 = 3, a(1+r+r^2) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $ar^3 + ar^4 + ar^5 = 6, ar^3(1+r+r^2) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면 $r^3 = 2$
 $\therefore a_7 + a_8 + a_9 = ar^6 + ar^7 + ar^8$
 $= ar^6(1+r+r^2)$
 $= ar^3(1+r+r^2) \times r^3$
 $= 6 \times 2 = 12$

- 5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $a_n < 1$ 에서 $1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000}, 2^{n-1} > 1000$
 이때 $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ 이므로
 $n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11$
 따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제11항이다.

- 6 등비수열 2, $a, b, c, 162$ 의 공비를 r 라 하면
 $162 = 2r^4$ 에서 $r^4 = 81$
 $(r^2+9)(r^2-9) = 0, (r^2+9)(r+3)(r-3) = 0$
 공비는 양수이므로 $r = 3$
 $a = 2 \times 3 = 6, b = 6 \times 3 = 18, c = 18 \times 3 = 54$
 $\therefore a = 6, b = 18, c = 54$

다른 풀이 b 는 2와 162의 등비중항이므로
 $b^2 = 2 \times 162 = 324 \quad \therefore b = 18 (\because b > 0)$
 a 는 2와 18의 등비중항이므로
 $a^2 = 2 \times 18 = 36 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$
 c 는 18과 162의 등비중항이므로
 $c^2 = 18 \times 162 = 2916 \quad \therefore c = 54 (\because c > 0)$

- 7 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 = a + d, a_4 = a + 3d, a_7 = a + 6d$
 a_2, a_4, a_7 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a_4^2 = a_2 \times a_7$
 $(a + 3d)^2 = (a + d)(a + 6d)$
 $a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 7ad + 6d^2$
 $ad - 3d^2 = 0, d(a - 3d) = 0$
 $d \neq 0$ 이므로 $a = 3d$
 $\therefore \frac{a_5}{a_3} = \frac{a + 4d}{a + 2d} = \frac{3d + 4d}{3d + 2d} = \frac{7}{5}$
- 8 $x, 12, y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $12^2 = xy \quad \therefore xy = 144 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $68, y, x$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2y = 68 + x \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 에서 $x = 2y - 68$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(2y - 68)y = 144, y^2 - 34y - 72 = 0$
 $(y + 2)(y - 36) = 0$
 이때 $y > 0$ 이므로 $y = 36$
 $y = 36$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $72 = 68 + x \quad \therefore x = 4$
 $\therefore x = 4, y = 36$

9 등비수열을 이루는 가로, 세로, 높이를 각각 a, ar, ar^2 으로 놓으면 직육면체의 부피가 8이므로
 $a \times ar \times ar^2 = a^3 r^3 = (ar)^3 = 8$
 ar 는 실수이므로 $ar=2$ ㉠

직육면체의 겉넓이가 28이므로
 $2(a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a) = 28$
 $a^2 r + a^2 r^3 + a^2 r^2 = 14$
 $\therefore a^2 r(1+r+r^2) = 14$ ㉡

㉠에서 $a = \frac{2}{r}$ 를 ㉡에 대입하면
 $\frac{4}{r^2} \times r(1+r+r^2) = 14, 2(1+r+r^2) = 7r$
 $2r^2 - 5r + 2 = 0, (2r-1)(r-2) = 0$
공비는 1보다 크므로 $r=2$
 $r=2$ 일 때 $a=1$ 이므로
 $ar=1 \times 2=2, ar^2=1 \times 2^2=4$
따라서 직육면체의 가로, 세로, 높이의 제곱의 합은 $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$

다른 풀이 등비수열을 이루는 세 수를 a, b, c ($a < b < c$)라 하면
 $abc=8$ ㉠
 $2(ab+bc+ca)=28$
 $\therefore ab+bc+ca=14$ ㉡
 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $b^2=ac$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $b^3=8$
 b 는 실수이므로 $b=2$
 $b=2$ 를 ㉠, ㉡에 대입하면
 $a+c=5, ac=4$
 $a(5-a)=4, a^2-5a+4=0$
 $(a-1)(a-4)=0 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=4$
 $a < c$ 이므로 $a=1, c=4$
따라서 구하는 합은 $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$

10 $\frac{2 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^n - 1) > 1000$ 에서
 $4^n - 1 > 1500, 4^n > 1501$
이때 $4^5 = 1024, 4^6 = 4096$ 이므로 $n \geq 6$
따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 처음으로 1000보다 커지는 n 의 값은 6이다.

11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
제2항이 6이므로
 $ar=6$ ㉠
첫째항부터 제3항까지의 합이 26이므로
 $\frac{a(r^3-1)}{r-1} = 26$
 $\therefore a(r^2+r+1) = 26$ ㉡

㉠에서 $a = \frac{6}{r}$ 을 ㉡에 대입하면
 $\frac{6}{r}(r^2+r+1) = 26, 3(r^2+r+1) = 13r$
 $3r^2 - 10r + 3 = 0, (3r-1)(r-3) = 0$
 $\therefore r = \frac{1}{3}$ 또는 $r = 3$
(i) $r = \frac{1}{3}$ 일 때, ㉠에 대입하면 $a = 18$
(ii) $r = 3$ 일 때, ㉠에 대입하면 $a = 2$
(i), (ii)에서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은
 $a_n = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 또는 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

12 수열 1, 3, 9, 27, ...은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이다.
제6항부터 제9항까지의 합은 첫째항이 $1 \times 3^5 = 3^5$ 이고, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제4항까지의 합이므로

$$\frac{3^5 \times (3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{243 \times 80}{2} = 9720$$

다른 풀이 등비수열 1, 3, 9, 27, ...의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{1 \times (3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^9 - 1)$$

첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\frac{1 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^5 - 1)$$

따라서 제6항부터 제9항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3^9 - 1) - \frac{1}{2}(3^5 - 1) &= \frac{3^5}{2} \times (3^4 - 1) \\ &= \frac{243}{2} \times 80 = 9720 \end{aligned}$$

13 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
첫째항부터 제3항까지의 합이 6이므로

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1} = 6 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

제2항부터 제4항까지의 합이 -12이므로

$$\frac{ar(r^3-1)}{r-1} = -12 \quad \dots\dots\text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$6r = -12 \quad \therefore r = -2$$

$r = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{9a}{3} = 6 \quad \therefore a = 2$$

$\therefore$ 첫째항: 2, 공비: -2

참고 제2항부터 제4항까지의 합은 첫째항이 ar , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제3항까지의 합이다.

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
첫째항부터 제3항까지의 합이 6이므로

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 &= 6 \\ \therefore a(1+r+r^2) &= 6 \quad \dots\dots\text{㉠} \end{aligned}$$

제2항부터 제4항까지의 합이 -12이므로

$$ar + ar^2 + ar^3 = -12$$

$$\therefore ar(1+r+r^2) = -12$$

.....㉠

㉠을 ㉠에 대입하면

$$6r = -12 \quad \therefore r = -2$$

$r = -2$ 를 ㉠에 대입하면 $a = 2$

$\therefore$ 첫째항: 2, 공비: -2

14 첫째항부터 제4항까지의 합이 30이므로

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1} = 30$$

.....㉡

첫째항부터 제8항까지의 합이 510이므로

$$\frac{a(r^8-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 510$$

.....㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$$30(r^4+1) = 510, r^4 = 16$$

$$(r^2+4)(r^2-4) = 0, (r^2+4)(r+2)(r-2) = 0$$

r 는 실수이므로 $r = -2$ 또는 $r = 2$

(i) $r = -2$ 일 때, ㉡에 대입하면 $a = -6$

(ii) $r = 2$ 일 때, ㉡에 대입하면 $a = 2$

(i), (ii)에서 $a < 0$ 이므로 $a = -6, r = -2$

$$\therefore a+r = -8$$

15 윤아가 매일 읽는 책의 쪽수는

$$5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, 5 \times 2^3, \dots$$

이므로 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

윤아가 n 일 동안 읽은 책의 쪽수의 합은

$$\frac{5 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 5(2^n - 1)$$

마지막 날까지 읽은 책의 쪽수의 합이 400보다 크거나 같으면 책을 다 읽게 되므로

$$5(2^n - 1) \geq 400, 2^n \geq 81$$

$$\text{이때 } 2^6 = 64, 2^7 = 128 \text{이므로}$$

$$n \geq 7$$

따라서 400쪽짜리 책을 다 읽는 데 7일이 걸린다.

16 (i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3^{n+1} + k) - (3^n + k)$$

$$= 2 \times 3^n$$

.....㉣

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^2 + k = 9 + k$$

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루므로 $a_1 = 9 + k$ 는

㉣에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같아야 한다.

$$9 + k = 2 \times 3 \quad \therefore k = -3$$

1-1 (1) 1, k (2) 1

1-2 (1) 제 k 항 $a_k = 2 + (k-1) \times 2 = 2k$

$$\therefore 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k$$

(2) 제 k 항 $a_k = 1 \times 3^{k-1} = 3^{k-1}$

$$\therefore 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3^{k-1}$$

2-1 10, 11

2-2 (1) 일반항 $3k-1$ 의 k 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례로 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 (3k-1) &= (3-1) + (6-1) + (9-1) + (12-1) \\ &\quad + (15-1) + (18-1) + (21-1) \\ &= 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 \end{aligned}$$

(2) 일반항 2^k 의 k 에 1, 2, 3, ..., 20을 차례로 대입하면

$$\sum_{k=1}^{20} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$$

3-1 3, 10, 25

$$\begin{aligned} \text{3-2 (1)} \quad \sum_{k=1}^{20} (a_k + 2b_k) &= \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 2b_k \\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k + 2 \sum_{k=1}^{20} b_k \\ &= 3 + 2 \times 8 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sum_{k=1}^{20} (2a_k - 3b_k + 2) &= \sum_{k=1}^{20} 2a_k - \sum_{k=1}^{20} 3b_k + \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{20} a_k - 3 \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= 2 \times 3 - 3 \times 8 + 2 \times 20 = 22 \end{aligned}$$

4-1 20, 4

$$\begin{aligned} \text{4-2 (1)} \quad \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 + 12a_k + 9) \\ &= \sum_{k=1}^{10} 4a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 12a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 12 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\ &= 4 \times 10 + 12 \times 5 + 9 \times 10 = 190 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)(a_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 10 - 1 \times 10 = 0 \end{aligned}$$

5-1 (1) 55 (2) 21 (3) 2

$$\text{5-2 (1)} \quad \sum_{k=1}^8 k = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

$$\text{(2)} \quad \sum_{k=1}^8 k^2 = \frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$$

$$\text{(3)} \quad \sum_{k=1}^8 k^3 = \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 = 1296$$

6-1 (1) 6, 6 (2) 2, 420

다른 풀이 (1) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^5 k(k+1) = \frac{5 \times 6 \times 7}{3} = 70$

6-2 (1) $\sum_{k=1}^{10} (k+1)(k-1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 1 \times 10 = 375$$

(2) $\sum_{k=1}^5 k(k^2+2) = \sum_{k=1}^5 (k^3+2k) = \sum_{k=1}^5 k^3 + \sum_{k=1}^5 2k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^5 k^3 + 2 \sum_{k=1}^5 k \\ &= \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} = 255 \end{aligned}$$

7-1 6, 63

7-2 (1) $\sum_{i=1}^5 \left\{ \sum_{k=1}^5 (i+2k) \right\} = \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{k=1}^5 i + 2 \sum_{k=1}^5 k \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^5 \left(5i + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 (5i + 30) \\ &= 5 \times \frac{5 \times 6}{2} + 30 \times 5 = 225 \end{aligned}$$

(2) $\sum_{m=1}^8 \left(\sum_{k=1}^m km \right) = \sum_{m=1}^8 \left(m \sum_{k=1}^m k \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^8 \left\{ m \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^8 (m^3 + m^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times (1296 + 204) = 750 \end{aligned}$$

8-1 6, 220

8-2 (1) 주어진 수열의 제k항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) \\ &= \frac{k\{1+(2k-1)\}}{2} = k^2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = 140$$

(2) 주어진 수열의 제k항을 a_k 라 하면

$$a_k = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = \frac{1 \times (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^7 (2^k - 1) = \frac{2 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} - 1 \times 7 = 247$$

9-1 4, 1, 6

9-2 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

이때 $a_1 = 3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n = 2n + 1$

$$a_{2k} = 2 \times 2k + 1 = 4k + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k} = \sum_{k=1}^{20} (4k + 1) = 4 \times \frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20 = 860$$

9-3 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$$a_{2k-1} = 2 \times 3^{2k-1-1} = 2 \times 9^{k-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} 2 \times 9^{k-1} = 2 \times \frac{1 \times (9^{12} - 1)}{9 - 1} = \frac{9^{12} - 1}{4}$$

10-1 21, 20

10-2 (1) $\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$ 이 성립하므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^9 \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
 &= \frac{1}{(2k+1)-(2k-1)} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &\text{이 성립하므로} \\
 &\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}
 \end{aligned}$$

11-1 $k+1, 16, 16, 3$

$$\begin{aligned}
 11-2 (1) & \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(k+1) - (k+2)} \\
 &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \\
 &\text{이 성립하므로} \\
 &\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\
 &= \sum_{k=1}^{16} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{18} - \sqrt{17}) \\
 &= \sqrt{18} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \frac{2}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}{(2k-1) - (2k+1)} \\
 &= \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1} \\
 &\text{이 성립하므로} \\
 &\sum_{k=1}^{12} \frac{2}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{12} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{25} - \sqrt{23}) \\
 &= \sqrt{25} - 1 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 (1) & \sum_{k=1}^{10} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 = 120
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \sum_{k=1}^8 (1-3k) = \sum_{k=1}^8 1 - 3 \sum_{k=1}^8 k \\
 &= 1 \times 8 - 3 \times \frac{8 \times 9}{2} = -100
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \sum_{k=1}^7 (4k-2) = 4 \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 2 \\
 &= 4 \times \frac{7 \times 8}{2} - 2 \times 7 = 98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 (1) & \sum_{k=1}^6 (k^2+1) = \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^6 1 \\
 &= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 1 \times 6 = 97
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \sum_{k=1}^9 (6k^2+5) = 6 \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 5 \\
 &= 6 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 5 \times 9 = 1755
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \sum_{k=1}^{10} (k^2-k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} = 330
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 (1) & \sum_{k=1}^{10} (k^3+4) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} 4 \\
 &= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + 4 \times 10 = 3065
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \sum_{k=1}^8 (k^3-2k) = \sum_{k=1}^8 k^3 - 2 \sum_{k=1}^8 k \\
 &= \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 - 2 \times \frac{8 \times 9}{2} = 1224
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \sum_{k=1}^5 (k^3-k^2) = \sum_{k=1}^5 k^3 - \sum_{k=1}^5 k^2 \\
 &= \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 170
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 (1) & \sum_{k=1}^{12} (k+5)^2 = \sum_{k=1}^{12} (k^2+10k+25) \\
 &= \sum_{k=1}^{12} k^2 + 10 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 25 \\
 &= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 10 \times \frac{12 \times 13}{2} + 25 \times 12 \\
 &= 1730
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \sum_{k=1}^{10} (k+2)(k-2) = \sum_{k=1}^{10} (k^2-4) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 4 \\
 &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times 10 = 345
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \sum_{k=1}^6 k(k-1)^2 &= \sum_{k=1}^6 k(k^2 - 2k + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^6 (k^3 - 2k^2 + k) \\
 &= \sum_{k=1}^6 k^3 - 2 \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^6 k \\
 &= \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + \frac{6 \times 7}{2} \\
 &= 280
 \end{aligned}$$

5 (1) 수열 1, 2, 3, ...의 일반항은 $1 + (n-1) \times 1 = n$,
수열 3, 5, 7, ...의 일반항은 $3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$ 이므로
 $1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + \dots + 10 \times 21$
 $= \sum_{k=1}^{10} k(2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k$
 $= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} = 825$

(2) 수열 1, 2, 3, ...의 일반항은 $1 + (n-1) \times 1 = n$,
수열 3, 4, 5, ...의 일반항은 $3 + (n-1) \times 1 = n + 2$ 이므로
 $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 12 \times 14$
 $= \sum_{k=1}^{12} k(k+2) = \sum_{k=1}^{12} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{12} k$
 $= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 2 \times \frac{12 \times 13}{2} = 806$

(3) 수열 1, 3, 5, ...의 일반항은 $1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$,
수열 2, 4, 6, ...의 일반항은 $2 + (n-1) \times 2 = 2n$
 $2n - 1 = 15$ 에서 $n = 8$ 이므로
 $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \dots + 15 \times 16$
 $= \sum_{k=1}^8 (2k-1)2k = 4 \sum_{k=1}^8 k^2 - 2 \sum_{k=1}^8 k$
 $= 4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - 2 \times \frac{8 \times 9}{2} = 744$

6 (1) 수열 1, 4, 7, ...의 일반항은 $1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$
 $3n - 2 = 28$ 에서 $n = 10$ 이므로
 $1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + 28^2$
 $= \sum_{k=1}^{10} (3k-2)^2 = \sum_{k=1}^{10} (9k^2 - 12k + 4)$
 $= 9 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4$
 $= 9 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 12 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 = 2845$

(2) 수열 1, 3, 5, ...의 일반항은 $1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$
 $2n - 1 = 25$ 에서 $n = 13$ 이므로
 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 25^2$
 $= \sum_{k=1}^{13} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{13} (4k^2 - 4k + 1)$
 $= 4 \sum_{k=1}^{13} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{13} k + \sum_{k=1}^{13} 1$
 $= 4 \times \frac{13 \times 14 \times 27}{6} - 4 \times \frac{13 \times 14}{2} + 1 \times 13 = 2925$

7 (1) $\sum_{j=1}^5 \left\{ \sum_{i=1}^5 (i+j) \right\} = \sum_{j=1}^5 \left(\sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=1}^5 j \right)$
 $= \sum_{j=1}^5 \left(\frac{5 \times 6}{2} + 5j \right)$
 $= \sum_{j=1}^5 15 + 5 \sum_{j=1}^5 j$
 $= 15 \times 5 + 5 \times \frac{5 \times 6}{2} = 150$

(2) $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^i k \right) = \sum_{i=1}^{10} \left\{ \frac{1}{i+1} \times \frac{i(i+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} i$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} = \frac{55}{2}$

(3) $\sum_{l=1}^6 \left(\sum_{k=1}^6 k l^2 \right) = \sum_{l=1}^6 \left(l^2 \sum_{k=1}^6 k \right) = \sum_{l=1}^6 \left(l^2 \times \frac{6 \times 7}{2} \right)$
 $= \sum_{l=1}^6 21 l^2 = 21 \sum_{l=1}^6 l^2$
 $= 21 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 1911$

8 (1) $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$
 $= \frac{1}{(3k+2) - (3k-1)} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$
이 성립하므로
 $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$
 $= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$
 $= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \right.$
 $\left. + \dots + \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{38} \right) \right]$
 $= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{38} \right) = \frac{3}{19}$

(2) $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{(k+2) - k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
이 성립하므로
 $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right.$
 $\left. + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{36}{55}$

참고 ① $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} \right)$

② $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right)$

기초 개념 평가

본문 | 128, 129쪽

- | | |
|--------------|-----------|
| 01 n | 02 m |
| 03 $+$ | 04 $-$ |
| 05 c | 06 cn |
| 07 2 | 08 6 |
| 09 2 | 10 상수, 변수 |
| 11 S_{n-1} | 12 S_n |
| 13 S_n | 14 a |
| 15 $b-a$ | 16 k |

기초 문제 평가

본문 | 130, 131쪽

- 1 수열 3, 5, 7, ...의 일반항은 $3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$
 $2n+1=15$ 에서 $n=7$ 이므로
 $3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3 = \sum_{k=1}^7 (2k+1)^3$
 따라서 옳은 답은 ④이다.

$$\begin{aligned}
 2 \quad \sum_{k=1}^8 (a_k+1)(a_k-2) &= \sum_{k=1}^8 (a_k^2 - a_k - 2) \\
 &= \sum_{k=1}^8 a_k^2 - \sum_{k=1}^8 a_k - \sum_{k=1}^8 2 \\
 &= 40 - 10 - 2 \times 8 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k+1)^2 &= 200 \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 1 \times 10 = 200 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k &= 190 \quad \dots\dots ㉠ \\
 \sum_{k=1}^{10} (a_k-1)^2 &= 100 \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 - 2a_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 1 \times 10 = 100 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k &= 90 \quad \dots\dots ㉡ \\
 ㉠ - ㉡ \text{을 하면} \\
 4 \sum_{k=1}^{10} a_k &= 100 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 25
 \end{aligned}$$

- 4 수열 $\{a_n\}$ 에서 1이 a 개, 2가 b 개라 하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 1 \times a + 2 \times b = a + 2b = 26 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^m a_k^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = a + 4b = 42 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10, b=8$

이때 $m=a+b$ 이므로 $m=18$

$$5 \quad (1) \sum_{k=0}^{10} (k+2) = 2 + \sum_{k=1}^{10} (k+2)$$

$$= 2 + \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 77$$

다른 풀이 $\sum_{k=0}^{10} (k+2) = \sum_{k=0}^{10} k + \sum_{k=0}^{10} 2 = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=0}^{10} 2$
 $= \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 11 = 77$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{k=3}^{13} (2k-5) &= \sum_{k=1}^{13} (2k-5) - \sum_{k=1}^2 (2k-5) \\
 &= 2 \times \frac{13 \times 14}{2} - 5 \times 13 - \{(-3) + (-1)\} \\
 &= 121
 \end{aligned}$$

$$6 \quad (1) \sum_{k=1}^{10} (2k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{10} \{(2k+1)^2 - (2k-1)^2\} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{(4k^2 + 4k + 1) - (4k^2 - 4k + 1)\} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} 8k = 8 \sum_{k=1}^{10} k = 8 \times \frac{10 \times 11}{2} = 440
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{k=1}^{12} (k^2+1) - \sum_{k=1}^9 (k^2-1) &= \left(\sum_{k=1}^{12} k^2 + 12 \right) - \left(\sum_{k=1}^9 k^2 - 9 \right) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{12} k^2 - \sum_{k=1}^9 k^2 \right) + 21 \\
 &= \sum_{k=10}^{12} k^2 + 21 \\
 &= 10^2 + 11^2 + 12^2 + 21 = 386
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad \sum_{k=1}^m (k^2-1) &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - m \\
 &= \frac{m\{(m+1)(2m+1)-6\}}{6} \\
 &= \frac{m(2m^2+3m-5)}{6} \\
 &= \frac{2m^3+3m^2-5m}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{m=1}^9 \left\{ \sum_{k=1}^m (k^2-1) \right\} &= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^9 (2m^3+3m^2-5m) \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ 2 \times \left(\frac{9 \times 10}{2} \right)^2 + 3 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 5 \times \frac{9 \times 10}{2} \right\} \\
 &= 780
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 식의 값은 ②이다.

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{l=1}^n (k+l) \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^m \left\{ kn + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\
 &= \frac{1}{2} mn(m+n+2) \\
 &= \frac{1}{2} \times 20 \times (9+2) = 110
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & 2 \times 5 + 4 \times 7 + 6 \times 9 + \cdots + 2n(2n+3) \\
 &= \sum_{k=1}^n 2k(2k+3) = \sum_{k=1}^n (4k^2 + 6k) \\
 &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)\{(4n+2)+9\}}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(4n+11)}{3}
 \end{aligned}$$

10 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n + 2 \\
 (i) \quad n \geq 2 \text{ 일 때} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 2n^2 - n + 2 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 2\} \\
 &= 4n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad n=1 \text{ 일 때} \\
 a_1 &= S_1 = 2 \times 1^2 - 1 + 2 = 3 \\
 \text{이때 } a_1=3 \text{ 은 } \textcircled{1} \text{ 에 } n=1 \text{ 을 대입한 값과 같지 않다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i), (ii) \text{ 에서 } a_1=3, a_n=4n-3 \quad (n \geq 2) \\
 \therefore a_1 + a_{15} = 3 + (4 \times 15 - 3) = 60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad & \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{(2n+1-1)(2n+1+1)} \\
 &= \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4n(n+1)} \\
 \text{이 성립하므로} \\
 & \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right. \\
 & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{4(n+1)}
 \end{aligned}$$

12 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 2$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (k-\alpha)(k-\beta) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{k^2 - (\alpha+\beta)k + \alpha\beta\} = \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 4k + 2) \\
 &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 185
 \end{aligned}$$

$$13 \quad \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$$

가 성립하므로

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{48}+\sqrt{50}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \\
 &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\
 & \quad + \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{47}) + (\sqrt{50}-\sqrt{48})\} \\
 &= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{49} + \sqrt{50}) = 3 + 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$14 \quad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\
 &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{20}{11}
 \end{aligned}$$

15 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 4n \\
 (i) \quad n \geq 2 \text{ 일 때} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\
 &= 2n + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad n=1 \text{ 일 때} \\
 a_1 &= S_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 5 \\
 \text{이때 } a_1=5 \text{ 는 } \textcircled{1} \text{ 에 } n=1 \text{ 을 대입한 것과 같다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i), (ii) \text{ 에서 } a_n &= 2n + 3 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right. \\
 & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{33} - \frac{1}{35}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{35} \right) = \frac{3}{35}
 \end{aligned}$$

본문 | 132~137쪽

1-1 (1) 7, 9 (2) 27, 81

1-2 (1) $a_{n+1}=2a_n+1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=2a_1+1=2 \times 3+1=7$$

$$a_3=2a_2+1=2 \times 7+1=15$$

$$a_4=2a_3+1=2 \times 15+1=31$$

$$\therefore a_5=2a_4+1=2 \times 31+1=63$$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}, a_3=\frac{1}{a_2}=3, a_4=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a_5=\frac{1}{a_4}=3$$

(3) $a_{n+1}=a_n+3$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+3=2+3=5, a_3=a_2+3=5+3=8$$

$$a_4=a_3+3=8+3=11$$

$$\therefore a_5=a_4+3=11+3=14$$

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열
이므로 일반항은 $a_n=2+(n-1) \times 3=3n-1$

$$\therefore a_5=14$$

(4) $a_{n+1}=2a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=2 \times a_1=2 \times 1=2, a_3=2 \times a_2=2 \times 2=4$$

$$a_4=2 \times a_3=2 \times 4=8$$

$$\therefore a_5=2 \times a_4=2 \times 8=16$$

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열
이므로 일반항은 $a_n=1 \times 2^{n-1}=2^{n-1} \quad \therefore a_5=16$

2-1 (1) 1, 91 (2) 2, 1023

2-2 (1) $a_{n+1}=a_n+3n-1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+3 \times 1-1$$

$$a_3=a_2+3 \times 2-1=a_1+3(1+2)-2$$

$$a_4=a_3+3 \times 3-1=a_1+3(1+2+3)-3$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{10}=a_1+3(1+2+3+\cdots+9)-9$$

$$=1+3 \times \frac{9 \times 10}{2}-9=127$$

(2) $a_{n+1}=a_n+3^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+3$$

$$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$$

$$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{10}=a_1+(3+3^2+3^3+\cdots+3^9)$$

$$=1+\frac{3 \times (3^9-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{10}-1)$$

(3) $a_{n+1}=a_n+n^2-n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+1^2-1$$

$$a_3=a_2+2^2-2=a_1+(1^2+2^2)-(1+2)$$

$$a_4=a_3+3^2-3=a_1+(1^2+2^2+3^2)-(1+2+3)$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{10}=a_1+(1^2+2^2+\cdots+9^2)-(1+2+\cdots+9)$$

$$=3+\frac{9 \times 10 \times 19}{6}-\frac{9 \times 10}{2}=243$$

(4) $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+1$$

$$a_3=a_2+2=a_1+1+2$$

$$a_4=a_3+2^2=a_1+1+2+2^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{10}=a_1+(1+2+2^2+\cdots+2^8)$$

$$=2+\frac{1 \times (2^9-1)}{2-1}=513$$

3-1 (1) 20, 20 (2) 1, 190

3-2 (1) $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{2}{3}a_1$$

$$a_3=\frac{3}{4}a_2=\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1$$

$$a_4=\frac{4}{5}a_3=\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{20}=\frac{20}{21} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{19} \times \cdots \times \frac{2}{3}a_1$$

$$=\frac{2}{21} \times 3=\frac{2}{7}$$

(2) $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{3}{1}a_1$$

$$a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3} \times \frac{3}{1}a_1$$

$$a_4=\frac{7}{5}a_3=\frac{7}{5} \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{1}a_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{20}=\frac{39}{37} \times \frac{37}{35} \times \frac{35}{33} \times \cdots \times \frac{3}{1}a_1$$

$$=39 \times 2=78$$

(3) $a_{n+1}=3^{n-1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1$$

$$a_3=3a_2=3a_1$$

$$a_4=3^2a_3=3^2 \times 3a_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_{20}=3^{18} \times 3^{17} \times 3^{16} \times \cdots \times 3a_1$$

$$=3^{1+2+3+\cdots+18} \times 1$$

$$=3^{\frac{18 \times 19}{2}}=3^{171}$$

(4) $a_{n+1} = \frac{1}{2^n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2} a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{2^3} a_3 = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2} a_1$$

⋮

$$\begin{aligned} \therefore a_{20} &= \frac{1}{2^{19}} \times \frac{1}{2^{18}} \times \frac{1}{2^{17}} \times \cdots \times \frac{1}{2} a_1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+19} \times 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{19 \times 20}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{190} \end{aligned}$$

4-1 3, 30

4-2 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2a_3+1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{1}{7}$$

⋮

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$\therefore a_{50} = \frac{1}{99}$$

다른 풀이 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ 의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{으로 놓으면 } b_1 = 1, b_{n+1} = b_n + 2$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{2n-1} \text{이므로 } a_{50} = \frac{1}{99}$$

5-1 3, 2

5-2 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 3 - 4 = -1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -1 - 3 = -4$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -4 - (-1) = -3$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -3 - (-4) = 1$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 1 - (-3) = 4$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 4, 3, -1, -4, -3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 6 \times 16 + 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= 16 \times \{1+4+3+(-1)+(-4)+(-3)\} \\ &\quad + 1+4+3+(-1) \\ &= 16 \times 0 + 1+4+3+(-1) = 7 \end{aligned}$$

6-1 (가) 6 (나) $m+k+1$ (다) $k+1$

6-2 $f(m) = 5m+1, g(m) = 6m+1$ 이므로

$$f(1) \times g(2) = 6 \times 13 = 78$$

7-1 (가) $\frac{k(k+1)}{2}$ (나) $\frac{k}{2}$ (다) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

7-2 (가) $1+2h$ (나) $1+h$ (다) $1+(k+1)h$

기초 개념 평가

본문 | 138, 139쪽

01 귀납적

02 d

03 r

04 $f(n-1)$

05 $f(n-1)$

06 $\frac{5}{3}$

07 $n=1$

08 $n=2$

09 $n=k+1$

기초 문제 평가

본문 | 140, 141쪽

1 $a_{n+1} + a_n = 3$ 에서 $a_{n+1} = -a_n + 3$

$a_1 = 2$ 이므로 $a_{n+1} = -a_n + 3$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$a_3 = -a_2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$a_4 = -a_3 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$a_5 = -a_4 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$\therefore a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 2$$

- 2 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$
즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a_2-a_1=4$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (4k-3) = 4 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10 = 190$$

다른 풀이 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 는 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times (2 \times 1 + 9 \times 4)}{2} = 190$$

- 3 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \log_2 a_8 = \log_2 \left[4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7\right] = \log_2 2^{-5} = -5$$

- 4 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=3$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_2 + a_4 + a_6 = 3 + 3^3 + 3^5 = 273$$

- 5 $a_{n+1}=a_n+2n+1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 + 1 = a_1 + 2(1+2) + 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 + 1 = a_1 + 2(1+2+3) + 3$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n = a_1 + 2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} + (n-1)$$

$$= 2 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 + 1$$

이때 $a_k=145$ 에서 $k^2+1=145$ 이므로

$$k^2=144 \quad \therefore k=12 \quad (\because k>0)$$

- 6 $a_{n+1}=\frac{3n+2}{3n-1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 8을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{5}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{8}{5}a_2 = \frac{8}{5} \times \frac{5}{2}a_1$$

$$a_4 = \frac{11}{8}a_3 = \frac{11}{8} \times \frac{8}{5} \times \frac{5}{2}a_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_9 = \frac{26}{23} \times \frac{23}{20} \times \frac{20}{17} \times \cdots \times \frac{5}{2}a_1$$

$$= \frac{26}{2} \times 4 = 52$$

- 7 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{3a_1+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3a_2+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}+1} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3a_3+1} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}+1} = \frac{1}{10}$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3n-2}$$

이때 $a_k=\frac{1}{118}$ 에서 $\frac{1}{3k-2}=\frac{1}{118}$ 이므로

$$3k-2=118 \quad \therefore k=40$$

다른 풀이 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$ 의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 3$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{으로 놓으면 } b_1=1, b_{n+1}=b_n+3$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2$$

따라서 $a_n = \frac{1}{3n-2}$ 에서 $\frac{1}{3k-2} = \frac{1}{118}$ 이므로

$$3k-2=118 \quad \therefore k=40$$

- 8 $4a_1=4 \times 1=4$ 를 7로 나누었을 때의 나머지는 4이므로

$$a_2=4$$

$4a_2=4 \times 4=16$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 2이므로

$$a_3=2$$

$4a_3=4 \times 2=8$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 1이므로

$$a_4=1$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $25=3 \times 8 + 1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = 8 \times (1+4+2) + 1 = 57$$

- 9 $a_1=12, a_2=a_1+7, a_3=a_2+7, \dots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 7인 등차수열이므로

$$a_n = 12 + (n-1) \times 7 = 7n + 5$$

$$\therefore a_{15} = 7 \times 15 + 5 = 110$$

- 10 (가) 9 (나) 1 (다) 8

- 11 (가) $2k^2+7k+6$ (나) $2k+3$ (다) $k+1$

Handwriting practice lines consisting of 20 sets of horizontal dotted lines on a white background.