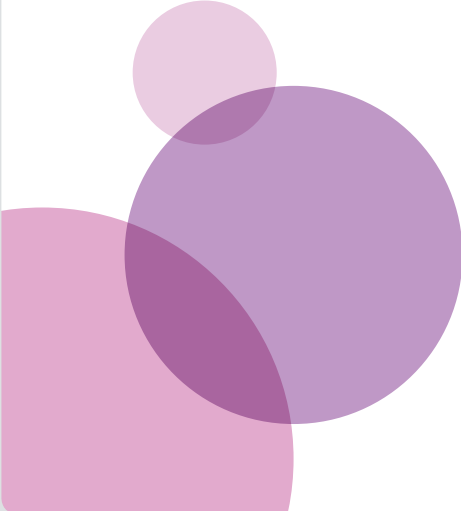


짧지만 개념에 강한 **짤강 미적분 I**
정답과 해설

01	함수의 극한	02
02	함수의 연속	08
03	미분계수	14
04	도함수	19
05	접선의 방정식과 평균값 정리	24
06	함수의 증가와 감소, 극대와 극소	29
07	방정식과 부등식, 속도와 가속도	35
08	부정적분	40
09	정적분	44
10	정적분의 활용	49



본문 | 008~015쪽

1-1 (1) $x-3$, -6 (2) 0 , 0 1-2 (1) $f(x)=\sqrt{x+3}$ 이라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 1이 아니면서 1에 한
없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$

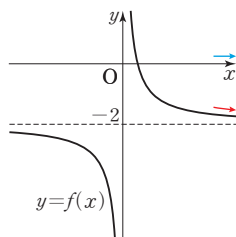
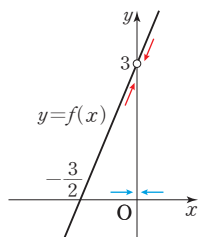
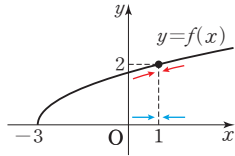
(2) $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x}$ 라 하면 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{x(2x+3)}{x} = 2x+3$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 0이 아니면서 0에 한없이
가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한
없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+3x}{x} = 3$$

1-3 (1) $f(x)=\frac{1}{x}-2$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 한없이 커질 때,
 $f(x)$ 의 값은 -2 에 한없이
가까워지므로

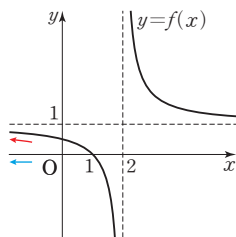
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$$

(2) $f(x)=\frac{1}{x-2}+1$ 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 음수이면서 그 절댓
값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의
값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-2} + 1 \right) = 1$$



참고 (1) x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때,
 $f(x)$ 의 값은 -2 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$$

(2) x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이
가까워지므로

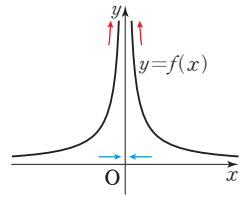
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-2} + 1 \right) = 1$$

2-1 ∞ 2-2 (1) $f(x)=\frac{1}{|x|}$ 이라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 0이 아니면서 0에
한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의
값은 한없이 커지므로

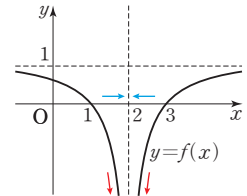
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

(2) $f(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$ 이라 하

면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 2가 아니면서 2에
한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의
값은 음수이면서 그 절댓값이
한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \right\} = -\infty$$

3-1 음수, ∞ 3-2 (1) $f(x)=4-x$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의
값은 음수이면서 그 절댓값이 한없
이 커지므로

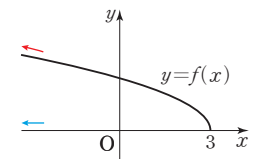
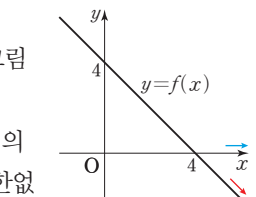
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4-x) = -\infty$$

(2) $f(x)=\sqrt{3-x}$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.

x 의 값이 음수이면서 그 절댓
값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의
값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = \infty$$

4-1 (1) -3 , -3 (2) 5 , 5 4-2 (1) x 의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의
값은 1에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

(2) x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$
의 값은 3에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

5-1 1, -1

5-2 (1) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ 라 하면 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{x} = x+2$$

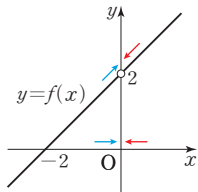
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{우극한은 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\text{좌극한은 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = 2$$



(2) $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|}$ 라 하면 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{|x|} = \begin{cases} x+2 & (x>0) \\ -x-2 & (x<0) \end{cases}$$

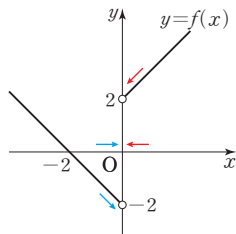
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{우극한은 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\text{좌극한은 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{|x|}$ 는 존재하지 않는다.



6-1 (1) 1, 7 (2) 3, 10

6-2 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x$
 $= 1 \times 1 + 1 = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x-1) = 2 \lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 1$
 $= 2 \times (-2) - 1 = -5$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} x(x-4) = \lim_{x \rightarrow -1} x \times \lim_{x \rightarrow -1} (x-4)$
 $= (-1) \times (-1-4) = 5$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{3x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1)} = \frac{3+3}{3 \times 3 - 1} = \frac{3}{4}$

7-1 x, 3, 3

7-2 주어진 식의 분모, 분자를 각각 x 로 나누면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-2f(x)}{x^2+f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{2f(x)}{x}}{x + \frac{f(x)}{x}} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} x - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{0 - 2 \times 2}{0 + 2} = -2 \end{aligned}$$

8-1 (1) 1, 3 (2) 12

8-2 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x^2+x+1} = \frac{6}{3} = 2$

9-1 (1) 2, 4 (2) 3, 4

9-2 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+2) = 4$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{2x(\sqrt{x^2+1}+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x(\sqrt{x^2+1}+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(\sqrt{x^2+1}+1)} = 0$

10-1 (1) 5, 5 (2) 1, 2

10-2 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$

11-1 (1) 3x, 1, 2 (2) 1, 1

11-2 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-x}-2x)$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-x}-2x)(\sqrt{4x^2-x}+2x)}{\sqrt{4x^2-x}+2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} = -\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1$

12-1 2, 2, -1, -1

12-2 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0$$

$$\text{즉, } 4+2a+b=0 \text{ 이므로 } b=-2a-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+a+2) = a+4$$

$$\text{이때 } a+4=5 \text{ 이므로 } a=1$$

$$a=1 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b=-6$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+ax+b} = -\frac{1}{4}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ 이고

$$\text{극한값이 } 0 \text{ 이 아니므로 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) = 0$$

$$\text{즉, } 1-a+b=0 \text{ 이므로 } b=a-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+ax+b} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+ax+a-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x+a-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+a-1} = \frac{1}{a-2}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{a-2} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$a-2 = -4 \quad \therefore a = -2$$

$$a = -2 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b = -3$$

13-1 0, 2, 2

13-2 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+1}-b) = 0$

$$\text{즉, } a\sqrt{2}-b=0 \text{ 이므로 } b=a\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{a\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } a=4$$

$$a=4 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b=4\sqrt{2}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+a}-b) = 0$

$$\text{즉, } \sqrt{4+a}-b=0 \text{ 이므로 } b=\sqrt{4+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}} = \frac{1}{2\sqrt{4+a}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{2\sqrt{4+a}} = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$2\sqrt{4+a} = 6 \quad \therefore a=5$$

$$a=5 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b=3$$

14-1 7, 7

14-2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

15-1 5, 5

15-2 $x \geq 2$ 이므로 주어진 식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^2}{x^2+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+2} = 1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

집중 연습

본문 | 016, 017쪽

1 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+5)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x - 33}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+11)(x-3)}{x-3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} (x+11) = 14 \\
(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2(x+1)} = \frac{3}{4} \\
(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 10}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 5)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \\
(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+9} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{1}{6} \\
(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x+2}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1 - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x+2})}{(x+1)(1 + \sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)}{(x+1)(1 + \sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+2}} = -\frac{1}{2} \\
(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+8} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+8} + 3) = 6 \\
(5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)}{x-3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6} + 3) = 6 \\
(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x^2+x-3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = 0 \\
(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+5x}{2x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{5}{x}}{2 - \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2} \\
(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x+4}{5x^3+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{5 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \frac{1}{5} \\
(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{2} \\
(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \\
(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2}{\sqrt{9x^2-1}+x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}}{\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 (1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \\
(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+x} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+x} - 2x)(\sqrt{4x^2+x} + 2x)}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{4} \\
(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+6x}-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+6x}+x}{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+6x}+x}{6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2-x}-2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-x}+2x}{(\sqrt{4x^2-x}-2x)(\sqrt{4x^2-x}+2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-x}+2x}{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}{-1} = -(2+2) = -4
 \end{aligned}$$

기초 개념 평가

본문 | 018, 019쪽

- | | |
|---------------|---------------------|
| 01 수렴 | 02 양의 |
| 03 음의 | 04 무극한 |
| 05 좌극한 | 06 L |
| 07 $L+M, L-M$ | 08 LM, L |
| 09 $0, 0$ | 10 ∞, ∞ |
| 11 0 | 12 $\frac{1}{a}, 0$ |
| 13 $\leq$ | 14 $=$ |

기초 문제 평가

본문 | 020, 021쪽

- $\lim_{x \rightarrow 1} \{3f(x)-2g(x)\} = 3\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$
 $= 3 \times 2 - 2 \times (-1) = 8$
- $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 + (-1) + 1 = 1$

$$\begin{aligned}
 3 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (2x+k) = 2+k \\
 \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1 \\
 \text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{의 값이 존재하므로} \\
 2+k &= 1 \quad \therefore k = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 (1) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x-1)\} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \\
 (2) \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4 \\
 \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x-2) = -4 \\
 \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{|x-2|} \text{는 존재하지 않는다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \neg. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \text{ (참)} \\
 \cup. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4} \text{ (거짓)} \\
 \cap. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 2 \text{ (참)} \\
 \equiv. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+x}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{3} \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \cap, \equiv$ 이다.

$$\begin{aligned}
 6 (1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-1}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-1})(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-1})}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}} \\
 &= \frac{6}{1+1} = 3
 \end{aligned}$$

(2) $x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

7 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(x - \frac{10}{x+3} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{(x-2)(x+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{7}{5}$

8 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재한다. (참)

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

$\square$. $0 < a < 2$ 인 임의의 실수 a 에 대하여 우극한과 좌극한이

같으므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg, \square$ 이다.

9 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이고 극한값이 0이 아니므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}-a) = 0, 2-a=0 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4=b \\ \therefore a+b &= 2+4=6\end{aligned}$$

10 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2-ax})$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + \sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{2a}{1+1} = a \\ \therefore a &= 6\end{aligned}$$

11 $2f(x) - g(x) = h(x)$ 라 하면 $g(x) = 2f(x) - h(x)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f(x) - \{2f(x) - h(x)\}}{f(x) + \{2f(x) - h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) + h(x)}{3f(x) - h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{h(x)}{f(x)}}{3 - \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{3+0}{3-0} = 1\end{aligned}$$

12 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \alpha$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \beta$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

즉, 이차함수 $f(x)$ 는 $x-1, x-2$ 를 인수로 갖는다.

$f(x) = a(x-1)(x-2) (a \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} a(x-2) = -a\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} a(x-1) = a$$

이때 $\alpha = -a, \beta = a$ 이므로

$$\alpha + \beta = -a + a = 0$$

13 (가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + ax + b) = 0 \quad \therefore b = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + a) = a \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 2x$ 이므로 $f(2) = 8 + 4 = 12$

14 주어진 식의 각 변을 세제곱하면

$$(2x+3)^3 < \{f(x)\}^3 < (2x+5)^3$$

$x > 0$ 이므로 이 식의 각 변을 $2x^3+1$ 로 나누면

$$\frac{(2x+3)^3}{2x^3+1} < \frac{\{f(x)\}^3}{2x^3+1} < \frac{(2x+5)^3}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3}{2x^3+1} = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5)^3}{2x^3+1} = 4 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{2x^3+1} = 4$$

본문 | 022~027쪽

1-1 (1) 0, 연속 (2) 불연속

1-2 (1) ① $f(2)=2$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x) = 2$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.(2) $x=2$ 일 때, 함수값이 존재하지 않는다.따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

2-1 3, 2, 불연속

2-2 (1) $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x-1$$

$$\textcircled{1} f(0) = -1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

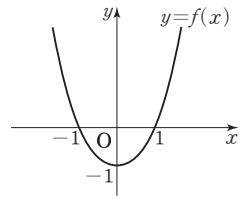
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.3-1 (1) 닫힌 (2) 열린 (3) $[1, 3)$ (4) $(-5, 0]$ 3-2 (1) 닫힌구간인 $[5, 10]$ (2) 열린구간인 $(-8, -1)$ (3) 반닫힌구간 또는 반열린구간인 $[3, 4)$ (4) 반닫힌구간 또는 반열린구간인 $(-2, 0]$ 4-1 (1) $1, \infty$ (2) $5, -\infty$ 4-2 (1) 함수 $f(x) = x^2 - x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$ (2) 함수 $f(x) = \frac{3}{x-2}$ 의 정의역은
 $\{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
(3) 함수 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 의 정의역은
 $\{x | x \geq -1\}$ 이므로 구간의 기호로 나타내면 $[-1, \infty)$
(4) 함수 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 의 정의역은
 $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 이므로 구간의 기호로 나타내면 $[-2, 2]$

5-1 2

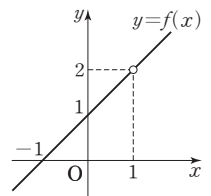
5-2 (1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x) = x^2 - 1$ 이 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$



$$(2) x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 이 연속인 구간은 $(-\infty, 1), (1, \infty)$



6-1 1, -2

6-2 (1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + a}{x-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + a}{x-1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+1} + a) = 0$$

$$\text{즉, } \sqrt{2} + a = 0 \text{이므로 } a = -\sqrt{2}$$

 $a = -\sqrt{2}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + a}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = b \\ \therefore a &= -\sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2ax + b}{x-1} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2ax + b}{x-1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2ax + b) = 0$$

$$\text{즉, } 1 + 2a + b = 0 \text{이므로 } b = -2a - 1$$

$b = -2a - 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2ax + b}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2ax - (2a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2a + 1) = 2a + 2 \end{aligned}$$

이때 $2a + 2 = 4$ 이므로 $a = 1$

$a = 1$ 을 $b = -2a - 1$ 에 대입하면 $b = -3$

$\therefore a = 1, b = -3$

7-1 연속, 불연속

7-2 두 함수 $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 + 2$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄱ. $f(x) + g(x) = x^2 + x + 3$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $f(x) - 2g(x) = -2x^2 + x - 3$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$ 이므로 $x = -1$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{x^2 + 2}$ 에서 $x^2 + 2 \neq 0$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

8-1 (2) -2

8-2 (1) 모든 실수 x 에서 연속이다.

(2) $x^2 + x \neq 0$, 즉

$x \neq -1, x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

9-1 (1) 2, 0 (2) 4, 1

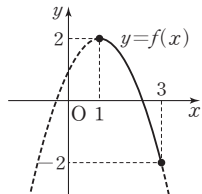
9-2 (1) 함수 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 은 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = 1$ 일 때 최댓값 2,

$x = 3$ 일 때 최솟값 -2



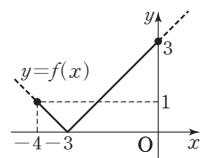
(2) 함수 $f(x) = |x + 3|$ 은 닫힌구간 $[-4, 0]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때 최댓값 3,

$x = -3$ 일 때 최솟값 0



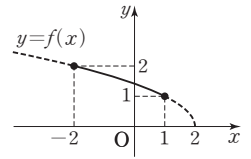
9-3 (1) 함수 $f(x) = \sqrt{2 - x}$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = -2$ 일 때 최댓값 2,

$x = 1$ 일 때 최솟값 1



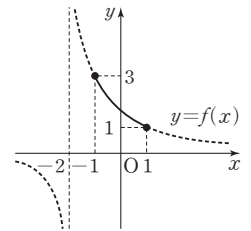
(2) 함수 $f(x) = \frac{3}{x + 2}$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값 3,

$x = 1$ 일 때 최솟값 1



10-1 2

10-2 (1) $f(x) = x^3 + 4x - 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$f(0) = -3 < 0, f(1) = 2 > 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3 + 4x - 3 = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x) = x^4 + x^3 - 6x + 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$f(0) = 2 > 0, f(1) = -2 < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4 + x^3 - 6x + 2 = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

11-1 <, -3, 1

11-2 $f(x) = x^3 - 2x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = a - 1, f(2) = a + 4$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면

$$f(1)f(2) = (a - 1)(a + 4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 1$$

따라서 정수 a 의 개수는 -3, -2, -1, 0의 4이다.

- 1 (1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{x - 2} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{x - 2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - a) = 0$$

$$\text{즉, } 4 - a = 0 \text{이므로 } a = 4$$

$a = 4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = 4, b = 4$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + a}{x - 3} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + a}{x - 3}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + a) = 0$$

$$\text{즉, } 9 - 3 + a = 0 \text{이므로 } a = -6$$

$a = -6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + a}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = -6, b = 5$$

- (3) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax}{x + 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax}{x + 1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax) = 0$$

$$\text{즉, } 1 - a = 0 \text{이므로 } a = 1$$

$a = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x = -1 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

- (4) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$$

$$\text{즉, } 1 + a + b = 0 \text{이므로 } b = -a - 1$$

$b = -a - 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + a + 1) = a + 2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } a + 2 = 0 \text{이므로 } a = -2$$

$$a = -2 \text{를 } b = -a - 1 \text{에 대입하면 } b = 1$$

$$\therefore a = -2, b = 1$$

- 2 (1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - a}{x - 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - a}{x - 1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x + 3} - a) = 0$$

$$\text{즉, } 2 - a = 0 \text{이므로 } a = 2$$

$a = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - a}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x + 3} - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{1}{4} = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2, b = \frac{1}{4}$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (ax - \sqrt{x}) = 0$$

$$\text{즉, } a - 1 = 0 \text{이므로 } a = 1$$

$a = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

- (3) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}+a}{x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}+a}{x}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+a) = 0$$

$$\text{즉, } 1+a=0 \text{이므로 } a=-1$$

$a=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}+a}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} = b \end{aligned}$$

$$\therefore a=-1, b=\frac{1}{2}$$

- (4) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+a+b}}{x+2} = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+a+b}}{x+2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2+a+b}) = 0$$

$$\text{즉, } \sqrt{4+a+b}=0 \text{이므로 } b=-\sqrt{4+a}$$

$b=-\sqrt{4+a}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+a+b}}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x+2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}} = \frac{-4}{2\sqrt{4+a}} = -\frac{2}{\sqrt{4+a}} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } -\frac{2}{\sqrt{4+a}} = -\frac{1}{3} \text{에서 } \sqrt{4+a}=6 \text{이므로 } a=32$$

$$a=32 \text{를 } b=-\sqrt{4+a} \text{에 대입하면 } b=-6$$

$$\therefore a=32, b=-6$$

- 3** (1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (3x+a) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2-2x+3) = 3+a$$

$$\text{즉, } 1-2+3=3+a \quad \therefore a=-1$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (4x+a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2-1) = -1 \quad \therefore a=-1$$

- (3) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} (3x+a) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2+2x-1) = -2$$

$$\text{즉, } -3+a=-2 \quad \therefore a=1$$

- (4) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x+b) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+4) = a+5$$

$$\text{즉, } 1+b=a+5 \quad \therefore a-b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} (x^2+ax+4) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x+b) = 3a+13$$

$$\text{즉, } 3+b=3a+13 \quad \therefore 3a-b=-10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=1$

- 4** (1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2+ax}{x-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2+ax}{x-1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} (2x^2+ax) = 0$$

$$\text{즉, } 2+a=0 \text{이므로 } a=-2$$

$a=-2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2+ax}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2-2x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} 2x = 2 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a=-2, b=2$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+ax+b}{x+1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -1-} (x+1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2+ax+b) = 0$$

$$\text{즉, } 1-a+b=0 \text{이므로 } b=a-1$$

$b=a-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+ax+b}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+ax+a-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x+a-1) = a-2\end{aligned}$$

이때 $a-2=5$ 이므로 $a=7$

$a=7$ 을 $b=a-1$ 에 대입하면 $b=6$

$\therefore a=7, b=6$

- (3) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\sqrt{x^2+5}-a}{x-2} &= b \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\sqrt{x^2+5}-a}{x-2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2+} (\sqrt{x^2+5}-a) = 0$$

즉, $3-a=0$ 이므로 $a=3$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\sqrt{x^2+5}-a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2}{3} = b\end{aligned}$$

$\therefore a=3, b=\frac{2}{3}$

- (4) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1} &= b+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} (a\sqrt{x}-b) = 0$$

즉, $a-b=0$ 이므로 $b=a$

$b=a$ 를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a\sqrt{x}-a}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a}{\sqrt{x}+1} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

이때 $\frac{a}{2}=b+1$ 에서 $b=a$ 이므로 $\frac{a}{2}=a+1$

$\therefore a=-2, b=-2$

기초 개념 평가

본문 | 030, 031쪽

- | | |
|--------------|------------|
| 01 연속 | 02 구간 |
| 03 닫힌, 열린 | 04 연속 |
| 05 $a+, b-$ | 06 연속 |
| 07 연속 | 08 연속 |
| 09 연속 | 10 닫힌, 최솟값 |
| 11 $\neq, c$ | 12 다르면 |

기초 문제 평가

본문 | 032, 033쪽

- 1 ①, ②는 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 2+} |x-2| &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2-} |x-2| &= \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x-2)\} = 0 \\ f(2) &= 0 \text{이므로 } x=2 \text{에서 연속이다.}\end{aligned}$$

- ④ $y=\sqrt{1-x}$ 에서 정의역은 $\{x|x \leq 1\}$ 이므로 $x=2$ 에서 정의되어 있지 않다.

$$\textcircled{5} y = \frac{1}{x-1} \text{은 } x \neq 1 \text{인 모든 실수 } x \text{에서 연속이다.}$$

따라서 $x=2$ 에서 불연속인 함수는 ④이다.

- 2 (i) $x=-1$ 에서의 함수값은 $f(-1)=0$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

- (ii) $x=0$ 에서의 함수값은 $f(0)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 \text{에서}$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

- (i), (ii)에서 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 $x=0$ 의 1개, 불연속인 x 의 값은 $x=-1, x=0$ 의 2개이므로

$a=1, b=2$

- 3 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 2+} (x+a) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (2x+5) = 2+a \\ 2+a &= 9 \quad \therefore a=7\end{aligned}$$

$$4 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x + b & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x = -1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x + b) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + ax - 2) = -a - 1 \\ 1 + b &= -a - 1 \quad \therefore a + b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

또 $x = 1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax - 2) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + b) = a - 1 \\ a - 1 &= -1 + b \quad \therefore a - b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -1$$

5 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= f(-1) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + a}{(x+1)^2} &= b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + a}{(x+1)^2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x + a) = 0$$

$$\text{즉, } -1 + 3 + a = 0 \text{이므로 } a = -2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x+1)^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a = -2, b = -3$$

$$6 \quad x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + a}{x-2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x = 2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= f(2) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x + a}{x-2} &= f(2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x + a}{x-2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x^2 - 2x + a) = 0$$

$$\text{즉, } 8 + 4 - 4 + a = 0 \text{이므로 } a = -8$$

$a = -8$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 3x + 4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 4) = 14 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 14$$

$$7 \quad x \neq 0 \text{일 때, } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x = 0$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 에서

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8 (가)에서 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x = 4$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \{a(x-4)^2 + b\} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x+2) = b \quad \therefore b = 6 \end{aligned}$$

(나)에서 $f(x+6) = f(x)$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(6) = f(0) \text{이므로}$$

$$a(6-4)^2 + b = 0 + 2 \quad \therefore 4a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b = 6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a + 6 = 2 \text{이므로 } a = -1$$

$$\therefore b - a = 6 - (-1) = 7$$

9 ㄱ. $x = 0$ 에서 함수값이 존재하지 않으므로 $x = 0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(0) = 0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{이므로 } x = 0 \text{에서 연속이다.}$$

$$\text{ㄷ. } f(0) = 0 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \text{이므로 } x = 0 \text{에서 불연속이다.}$$

$$\text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x = 0$ 에서 불연속이다.

따라서 $x = 0$ 에서 연속인 함수는 ㄴ이다.

10 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 은 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

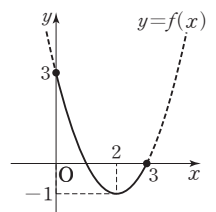
그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때 최댓값 3,

$x = 2$ 일 때 최솟값 -1

따라서 $\alpha = 3, \beta = -1$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3 + (-1) = 2$$



- 11 함수 $f(x) = |x+1| + 2$ 는 닫힌구간 $[-3, 2]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

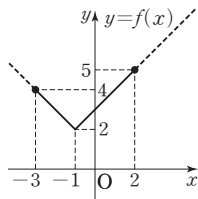
그림과 같으므로

$x=2$ 일 때 최댓값 5,

$x=-1$ 일 때 최솟값 2

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$5 \times 2 = 10$$



- 12 ㄱ. $f(x) = x^3 + x - 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = -1, f(1) = 1$ 에서 $f(0)f(1) < 0$
 ㄴ. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = 1, f(1) = 4$ 에서 $f(0)f(1) > 0$
 ㄷ. $f(x) = 2x^5 + 4x - 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = -3, f(1) = 3$ 에서 $f(0)f(1) < 0$
 따라서 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 13 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이다.
 $f(-2)f(-1) > 0, f(-1)f(0) < 0, f(0)f(1) < 0,$
 $f(1)f(2) < 0, f(2)f(3) > 0$
 이므로 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(-1, 0), (0, 1), (1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

- 14 $f(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$ 라 하면 $f(x)$ 가 이차함수이므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 최대 2이다.
 또 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, c]$ 에서 연속이고 $a < b < c$ 이므로
 $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$
 $f(b) = (b-a)(b-c) < 0$
 $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$
 즉, $f(a)f(b) < 0, f(b)f(c) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(a, b), (b, c)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
 따라서 주어진 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

1-1 (1) 0 (2) 2

1-2 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

$$= \frac{(-2 \times 3^2 + 1) - (-2 \times 1^2 + 1)}{2}$$

$$= \frac{-16}{2} = -8$$

 (2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{(2 + \Delta x) - 2}$

$$= \frac{\{-2 \times (2 + \Delta x)^2 + 1\} - (-2 \times 2^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-8\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = -8 - 2\Delta x$$

2-1 2, -3

2-2 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1}$

$$= \frac{(5a + 52) - (a + 4)}{4} = a + 12$$

이때 $a + 12 = -3$ 에서 $a = -15$

3-1 2, 2

3-2 풀이1

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{3(3 + \Delta x) + 2\} - 11}{\Delta x} = 3$$

풀이2

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x + 2) - 11}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)}{x - 3} = 3$$

4-1 2a

4-2 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - (-1)}{2} = -1$$

함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a + \Delta x)^2 - 5(a + \Delta x) + 3\} - (a^2 - 5a + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2a - 5)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a - 5 + \Delta x) = 2a - 5$$

이때 $2a - 5 = -1$ 에서 $a = 2$

5-1 (1) 2, 2 (2) 3

5-2 (1) (주어진 식) $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} \times 3$
 $= f'(2) \times 3 = 1 \times 3 = 3$

(2) (주어진 식) $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \times (-1)$
 $= f'(2) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

참고 $-h=t$ 라 하면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = f'(2)$$

6-1 2, 3

6-2 (1) (주어진 식)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1) + f(-1) - f(-1-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-2h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-2h) - f(-1)}{-2h} \times (-2)$$

$$= f'(-1) \times 2 - f'(-1) \times (-2) = 4f'(-1)$$

$$= 4 \times 1 = 4$$

(2) (주어진 식)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1) + f(-1) - f(-1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1)}{3h} \times 3 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= f'(-1) \times 3 - f'(-1) = 2f'(-1)$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

7-1 (2) 4, 4

7-2 (1) (주어진 식) $= f'(3) = 2$

(2) (주어진 식) $= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\}$
 $= f'(3) \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

8-1 2, 3

8-2 (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 3f(3) + 3f(3) - xf(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times 3 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(3)}{x-3}$$

$$= 3f'(3) - f(3)$$

$$= 3 \times 1 - 2 = 1$$

9-1 1, 4

9-2 (1) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 와 같으므로

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2+\Delta x)^2 - (2+\Delta x)\} - (2^2 - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + \Delta x) = 3$$

(2) $f(x) = x^3$ 이라 하면 점 $(-1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수 $f'(-1)$ 과 같으므로

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-1+\Delta x)^3 - (-1)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x - 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{3 - 3\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3$$

10-1 b, a, b

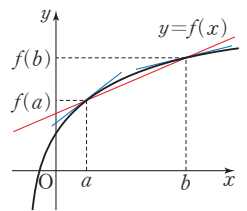
10-2 $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의

접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다.

또 $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 는 두 점

$(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로

$$f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < f'(a)$$



11-1 0, 1, 0

11-2 0, 연속, 2, 0

집중 연습

본문 | 042, 043쪽

1 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$
 $= -f'(1) = -2$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{f(1+h)-f(1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}} \times 2$$

$$= \frac{1}{f'(1)} \times 2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \frac{1}{2}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(1) - f'(1) \times (-1)$$

$$= 2f'(1) = 2 \times 2 = 4$$

$$2 (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h)-f(3)}{3h} \times 3$$

$$= f'(3) \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{-h} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= f'(3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h)-f(3)}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h} \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= f'(3) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(3+5h)-f(3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(3+5h)-f(3)}{5h}} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{f'(3)} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{2h} \times 2$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(3) \times 2 - f'(3) \times (-1)$$

$$= 3f'(3) = 3 \times 1 = 3$$

$$3 (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$$

$$= 3 \times 2 = 6$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \times (x^2+x+1) \right\}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)$$

$$= 3 \times 3 = 9$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-xf(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+f(1)-xf(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$

$$= f'(1) - f(1) = 3 - 2 = 1$$

$$4 (1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{f(x)-f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times (x+2) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$$

$$= \frac{1}{f'(2)} \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+3} \right\}$$

$$= f'(2) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+3} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{f(x)-f(2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times (x^2+2x+4) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4)$$

$$= \frac{1}{f'(2)} \times 12 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times 2 - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(2)}{x-2} \\
 &= 2f'(2) - f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1 \\
 (5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times 4 \\
 &= f(2) \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) - 4f'(2) \\
 &= 4f(2) - 4f'(2) = 4 \times 3 - 4 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

기초 개념 평가

본문 | 044, 045쪽

- | | |
|---------------|----------------|
| 01 $b-a$ | 02 $f(b)-f(a)$ |
| 03 평균변화율 | 04 $f'(a)$ |
| 05 Δx | 06 $x-a$ |
| 07 $f'(a)$ | 08 $mf'(a)$ |
| 09 $f'(a)$ | 10 $af'(a)$ |
| 11 기울기 | 12 $x=a$ |

기초 문제 평가

본문 | 046, 047쪽

1 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{6-2}{2} = 2$

2 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(1)}{a-1} = \frac{(a^2 - 2a + 3) - 2}{a-1} = a-1$$

함수 $y=f(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(3+\Delta x)^2 - 2(3+\Delta x) + 3\} - 6}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4
 \end{aligned}$$

이때 $a-1=4$ 에서 $a=5$

3 (주어진 식) $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3} \times h^2 \right\}$

$$= f'(a) \times \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$$

4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 3$ 에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= 3 \quad \therefore f'(-1) = 3 \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1) + f(-1) - f(-1-3h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1)}{3h} \times 3 \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-3h) - f(-1)}{-3h} \times (-3) \\
 &= f'(-1) \times 3 - f'(-1) \times (-3) \\
 &= 6f'(-1) = 6 \times 3 = 18
 \end{aligned}$$

5 (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(1) + f(1) - f(x^2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1} \\
 &\quad - \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\
 &= f(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) - f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\
 &= 2f(1) - 2f'(1) = 2 \times 1 - 2 \times 2 = -2
 \end{aligned}$$

6 ①, ③ (주어진 식) $= f'(1)$

② (주어진 식) $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = f'(1)$

④ (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \times \frac{x+1}{2} \right\} \\
 &= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2} = f'(1)
 \end{aligned}$$

⑤ (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\
 &= f'(1) \times 2 - f'(1) \times (-1) = 3f'(1)
 \end{aligned}$$

따라서 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

7 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2) = 3$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x^2+2x+4} \right\} \\
 &= f'(2) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

- 8 ㄱ. 점 A에서의 접선의 기울기는
점 B에서의 접선의 기울기보다
작으므로

$$f'(a) < f'(b) \text{ (거짓)}$$

- ㄴ. 직선 OA의 기울기는 직선 OB의
기울기보다 작으므로

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} < \frac{f(b)-f(0)}{b-0}$$

$$\text{즉, } \frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b} \text{ (참)}$$

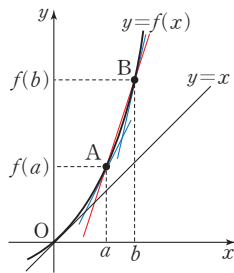
- ㄷ. 직선 $y=x$ 의 기울기는 직선 AB의 기울기보다 작으므로

$$1 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{이때 } b-a > 0 \text{ 이므로 } b-a < f(b)-f(a)$$

$$\text{즉, } a-b > f(a)-f(b) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



- 9 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

$$f'(2)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2)+f(h)-2h\}-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-2h}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h} - 2 \right\}$$

$$=f'(0)-2=6-2=4$$

- 10 ㄱ. (i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-1) = -1$ 이고

$$f(-1) = -1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 함수 $f(x) = -1$ 은 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$(ii) f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1-(-1)}{h} = 0$$

따라서 함수 $f(x) = -1$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하다.

- ㄴ. (i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0$ 이고

$$f(-1) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 함수 $f(x) = (x+1)^2$ 은 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$(ii) f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

따라서 함수 $f(x) = (x+1)^2$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하다.

- ㄷ. (i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} |x+1| = 0$ 이고

$$f(-1) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 함수 $f(x) = |x+1|$ 은 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \text{ 이 존재하지 않으므로}$$

함수 $f(x) = |x+1|$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하지 않다.

- (i), (ii)에서 함수 $f(x) = |x+1|$ 은 $x = -1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

- ㄹ. (i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} |x^2-1| = 0$ 이고

$$f(-1) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 함수 $f(x) = |x^2-1|$ 은 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h^2-2h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-h^2+2h}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} (-h+2) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h^2-2h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2-2h}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0-} (h-2) = -2$$

$$\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \text{ 이 존재하지 않으므로}$$

함수 $f(x) = |x^2-1|$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하지 않다.

- (i), (ii)에서 함수 $f(x) = |x^2-1|$ 은 $x = -1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 함수는 ㄷ, ㄹ이다.

참고 ㄹ. $h^2-2h=h(h-2)$ 에서

$$|h^2-2h| = \begin{cases} h^2-2h & (h \leq 0 \text{ 또는 } h \geq 2) \\ -h^2+2h & (0 < h < 2) \end{cases}$$

- 11 (가) 0 (나) $-|k|$ (다) 미분가능하다.

따라서 구하는 답은 ③이다.

$$\text{참고 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x(x-k)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x|x-k|}{x} = |k|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x(x-k)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x|x-k|}{x} = -|k|$$

본문 | 048~053쪽

1-1 $4x, 4x$

$$\begin{aligned}
 1-2 \quad (1) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(x+h)+1\} - (3x+1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(x+h)^2 - 1\} - (2x^2 - 1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(x+h)^2 + (x+h)\} - (-x^2 + x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2x+1)h - h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x+1-h) = -2x+1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^3 - 3x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2) = 9x^2
 \end{aligned}$$

2-1 (2) 0

$$2-2 \quad (1) f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$$

$$(2) f'(x) = 0$$

3-1 (1) 1, 3 (2) 2, 2

$$\begin{aligned}
 3-2 \quad (1) y' &= (3x^2 + 2x - 1)' \\
 &= (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 3(x^2)' + 2(x)' - (1)' \\
 &= 3 \times 2x + 2 \times 1 - 0 = 6x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= (-x^3 + 4x)' = (-x^3)' + (4x)' \\
 &= -(x^3)' + 4(x)' = -3x^2 + 4 \times 1 \\
 &= -3x^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) y' &= \{(2x+1)(x-2)\}' \\
 &= (2x+1)'(x-2) + (2x+1)(x-2)' \\
 &= 2(x-2) + (2x+1) \times 1 = 4x - 3
 \end{aligned}$$

다른 풀이 $y = (2x+1)(x-2) = 2x^2 - 3x - 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 y' &= (2x^2 - 3x - 2)' = (2x^2)' - (3x)' - (2)' \\
 &= 2(x^2)' - 3(x)' - (2)' = 2 \times 2x - 3 \times 1 - 0 \\
 &= 4x - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) y' &= \{(x^2-1)(3x-1)\}' \\
 &= (x^2-1)'(3x-1) + (x^2-1)(3x-1)' \\
 &= 2x(3x-1) + (x^2-1) \times 3 \\
 &= 9x^2 - 2x - 3
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 y &= (x^2-1)(3x-1) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1 \text{이므로} \\
 y' &= (3x^3 - x^2 - 3x + 1)' \\
 &= (3x^3)' - (x^2)' - (3x)' + (1)' \\
 &= 3(x^3)' - (x^2)' - 3(x)' + (1)' \\
 &= 3 \times 3x^2 - 2x - 3 \times 1 + 0 \\
 &= 9x^2 - 2x - 3
 \end{aligned}$$

4-1 $2a, 1$

$$\begin{aligned}
 4-2 \quad f'(x) &= (x^3 - 2x^2 + ax + 1)' \\
 &= (x^3)' - 2(x^2)' + a(x)' + (1)' \\
 &= 3x^2 - 2 \times 2x + a \times 1 + 0 \\
 &= 3x^2 - 4x + a
 \end{aligned}$$

이때 $f'(2) = -1$ 이므로 $12 - 8 + a = -1$
 $\therefore a = -5$

5-1 9, 1

$$\begin{aligned}
 5-2 \quad (1) f(1) &= 3 \text{에서 } 1 + 1 + a + b = 3 \\
 \therefore a + b &= 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 f'(x) &= 3x^2 + 2x + a \text{이므로 } f'(-1) = 3 \text{에서} \\
 3 - 2 + a &= 3 \quad \therefore a = 2 \\
 a = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b &= -1 \\
 (2) f(2) &= -1 \text{에서 } 4a + 2b + 1 = -1 \\
 \therefore 2a + b &= -1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 f'(x) &= 2ax + b \text{이므로 } f'(2) = 3 \text{에서} \\
 4a + b &= 3 \quad \dots\dots \textcircled{3} \\
 \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a &= 2, b = -5
 \end{aligned}$$

6-1 4, 4, -3

$$\begin{aligned}
 6-2 \quad f(x) &= ax^4 + bx^2 - 4x \text{에서} \\
 f'(x) &= 4ax^3 + 2bx - 4 \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= -6 \text{에서} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} &= -6 \\
 \frac{1}{2} f'(1) &= -6, \text{ 즉 } f'(1) = -12 \text{이므로} \\
 4a + 2b - 4 &= -12 \quad \therefore 2a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= 4 \text{에서 } f'(2) = 4 \text{이므로} \\
 32a + 4b - 4 &= 4 \quad \therefore 8a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a &= 1, b = -6
 \end{aligned}$$

7-1 (1) 1 (2) 2, 4

7-2 $f(x) = 2x^2 + x + 3$ 에서 $f'(x) = 4x + 1$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{3h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{2h} \times \frac{2}{3} \\ = \frac{2}{3} f'(2) = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

8-1 16

8-2 (1) $f(x) = x^{10} + x^9 + x^8$ 이라 하면 $f(1) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x^9 + x^8 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\ \text{이때 } f'(x) = 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 \text{이므로 구하는 값은} \\ f'(1) = 10 + 9 + 8 = 27 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$ 라 하면 $f(2) = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \\ \text{이때 } f'(x) = 4x^3 - 6x + 1 \text{이므로 구하는 값은} \\ f'(2) = 32 - 12 + 1 = 21 \end{aligned}$$

9-1 $3a + b, 5, -9, -9$

9-2 (1) 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$a + b = 1 \quad \therefore b = 1 - a \quad \dots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax + b) - 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$a = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -1$$

다른 풀이

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = ax + b & (x > 1) \\ h(x) = x^2 & (x \leq 1) \end{cases} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = a & (x > 1) \\ h'(x) = 2x & (x < 1) \end{cases}$$

$x=1$ 에서 연속이므로 $g(1) = h(1)$

$$a + b = 1 \quad \therefore b = 1 - a \quad \dots \textcircled{1}$$

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로 $g'(1) = h'(1)$

$$\therefore a = 2$$

$$a = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -1$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 에서

$$4 + b = -4 + 2a + 2 \quad \therefore b = 2a - 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(-x^2 + ax + 2) - (2a - 2)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{-x^2 + ax + (-2a + 4)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{-(x - 2)(x - a + 2)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \{-(x - a + 2)\} = a - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(2x + b) - (2a - 2)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$a - 4 = 2 \quad \therefore a = 6$$

$$a = 6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 6$$

다른 풀이

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = -x^2 + ax + 2 & (x \geq 2) \\ h(x) = 2x + b & (x < 2) \end{cases} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = -2x + a & (x > 2) \\ h'(x) = 2 & (x < 2) \end{cases}$$

$x=2$ 에서 연속이므로 $g(2) = h(2)$

$$-4 + 2a + 2 = 4 + b \quad \therefore b = 2a - 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로 $g'(2) = h'(2)$

$$-4 + a = 2 \quad \therefore a = 6$$

$$a = 6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 6$$

10-1 2, $Q'(x)$, -3

10-2 다항식 $x^{100} + ax^2 + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{100} + ax^2 + b = (x - 1)^2 Q(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99} + 2ax = 2(x - 1)Q(x) + (x - 1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$100 + 2a = 0 \quad \therefore a = -50$$

$$a = -50 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b = 49$$

다른 풀이 다항식 $f(x) = x^{100} + ax^2 + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어질 때, $f(1) = 0, f'(1) = 0$ 이므로

$$f(1) = 1 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -1$$

$$f'(x) = 100x^{99} + 2ax \text{에서 } f'(1) = 100 + 2a = 0$$

$$\therefore a = -50, b = 49$$

11-1 1, -4, 4

11-2 다항식 $x^{10}-2x^3+4$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을

$$Q(x), \text{ 나머지를 } ax+b(a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$x^{10}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-2+4=a+b \quad \therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$10-6=a \quad \therefore a=4$$

$a=4$ 를 ②에 대입하면 $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $4x-1$

집중 연습

본문 | 054, 055쪽

1 (1) $y'=0$

$$(2) y'=10 \times 1=10$$

$$(3) y'=4 \times 3x^2=12x^2$$

$$(4) y'=\frac{1}{2} \times 2x-3 \times 1=x-3$$

$$(5) y'=3 \times 3x^2+2x=9x^2+2x$$

$$(6) y'=6 \times 5x^4-2 \times 4x^3=30x^4-8x^3$$

2 (1) $y'=(3x+4)'(x+2)+(3x+4)(x+2)'$

$$=3(x+2)+(3x+4) \times 1=6x+10$$

$$(2) y'=(x+3)'(x^2+2x)+(x+3)(x^2+2x)'$$

$$=(x^2+2x)+(x+3)(2x+2)$$

$$=3x^2+10x+6$$

$$(3) y'=3(2x+1)^2(2x+1)'$$

$$=3(2x+1)^2 \times 2=6(2x+1)^2$$

$$(4) y'=(2x^2+x)'(x^2-1)+(2x^2+x)(x^2-1)'$$

$$=(4x+1)(x^2-1)+(2x^2+x) \times 2x$$

$$=8x^3+3x^2-4x-1$$

$$(5) y'=3(x^2+x+1)^2(x^2+x+1)'$$

$$=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$$

$$(6) y'=(x+1)'(x+2)^3+(x+1)\{(x+2)^3\}'$$

$$=(x+2)^3+(x+1) \times 3(x+2)^2(x+2)'$$

$$=(x+2)^2\{(x+2)+3(x+1)\}$$

$$=(x+2)^2(4x+5)$$

3 (1) $f(x)=2x^2+4x+1$ 에서 $f'(x)=4x+4$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{2h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{1}{2} \times 12=6$$

$$(2) f(x)=x^2-3x \text{에서 } f'(x)=2x-3$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times (-3)$$

$$=-3f'(1)=-3 \times (-1)=3$$

$$(3) f(x)=-2x^3+1 \text{에서 } f'(x)=-6x^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=-6$$

$$(4) f(x)=x^3-2x^2-3x+1 \text{에서 } f'(x)=3x^2-4x-3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\}$$

$$=\frac{1}{6}f'(3)=\frac{1}{6} \times 12=2$$

4 (1) $f(x)=(x-1)(x^2-2)$ 에서

$$f'(x)=(x^2-2)+(x-1) \times 2x=3x^2-2x-2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=19$$

$$(2) f(x)=x(3x^2+2) \text{에서}$$

$$f'(x)=(3x^2+2)+x \times 6x=9x^2+2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h)-f(2)}{2h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}f'(2)=-\frac{3}{2} \times 38=-57$$

$$(3) f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2) \text{에서}$$

$$f'(x)=4x(x^2+x-2)+(2x^2-1)(2x+1)$$

$$=8x^3+6x^2-10x-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

$$(4) f(x)=(2x^2-3x)(x^2-x+2) \text{에서}$$

$$f'(x)=(4x-3)(x^2-x+2)+(2x^2-3x)(2x-1)$$

$$=8x^3-15x^2+14x-6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\}$$

$$=2f'(1)=2 \times 1=2$$

기초 개념 평가

본문 | 056, 057쪽

- | | |
|------------|------------|
| 01 도함수 | 02 미분법 |
| 03 n | 04 1 |
| 05 0 | 06 $f'(x)$ |
| 07 $g'(x)$ | 08 $f'(x)$ |
| 09 $f'(x)$ | 10 $f'(x)$ |
| 11 $f(a)$ | 12 $f(a)$ |
| 13 미분계수 | 14 0 |
| 15 0 | |

기초 문제 평가

본문 | 058, 059쪽

- $f(x) = x^2 + 3x$ 에서 $f'(x) = 2x + 3$
 $\therefore f(2) + f'(2) = 10 + 7 = 17$
- $f(x) = 7x^3 - ax + 3$ 에서 $f'(x) = 21x^2 - a$
 이때 $f'(1) = 2$ 이므로 $21 - a = 2$
 $\therefore a = 19$
- $f'(1) = a$ (a 는 상수)라 하면 $f(x) = 2x^3 + 4ax$
 $f'(x) = 6x^2 + 4a$ 에서 $f'(1) = 6 + 4a$
 즉, $6 + 4a = a$ 이므로 $a = -2$
 따라서 $f'(x) = 6x^2 - 8$ 이므로 $f'(-1) = 6 - 8 = -2$
- $g(x) = x^2 f(x)$ 에서
 $g'(x) = (x^2)'f(x) + x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$
 $\therefore g'(1) = 2f(1) + f'(1) = 2 \times 3 + 1 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ 이고 극한값이 존재
 하므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 2\} = 0 \quad \therefore f(3) = 2$
 이때 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 1$
 같은 방법으로
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} = 2$ 에서 $g(3) = 1, g'(3) = 2$
 따라서 $y = f(x)g(x)$ 에서 $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 이므로 $x = 3$ 에서의 미분계수는
 $f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{h} = 5$ 에서 $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} f(2h) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$
 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에서 $f(0) = 0$ 이므로
 $b = 0$
 즉, $f(x) = x^2 + ax$ 에서 $f(0) = 0$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \times 2 = 2f'(0)$
 $2f'(0) = 5$ 에서 $f'(0) = \frac{5}{2}$
 이때 $f'(x) = 2x + a$ 이므로
 $f'(0) = a = \frac{5}{2}$
 $\therefore 10(a + b) = 10 \times \frac{5}{2} = 25$

- $f(x) = 2x^2 + ax$ 에서 $f'(x) = 4x + a$
 이때 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 6$ 이므로
 $4 + a = 6 \quad \therefore a = 2$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에서 $f'(x) = 2ax + b$
 $f'(0) = 2$ 에서 $b = 2$
 $f'(x) = 2ax + 2$ 이므로
 $f'(1) = 4$ 에서
 $2a + 2 = 4 \quad \therefore a = 1$
 $f(x) = x^2 + 2x + c$ 이므로
 $f(2) = 6$ 에서
 $4 + 4 + c = 6 \quad \therefore c = -2$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + (-2)^2 = 9$
- $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 4$ 에서 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2$
 $= f'(1) \times 2 - f'(1) \times (-2)$
 $= 4f'(1)$
 이때 $f'(1) = 4 - 6 + 1 = -1$ 이므로
 (주어진 식) $= 4 \times (-1) = -4$

10 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{x^2+x+1}{x+1} \right\} = \frac{3}{2} f'(1) \\ \text{이때 } f'(1) &= 3 + 8 - 3 = 8 \text{이므로} \\ (\text{주어진 식}) &= \frac{3}{2} \times 8 = 12 \end{aligned}$$

11 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에서 $f'(x) = 2x - 5$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} &= -36 \text{에서} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{kh} \times k &= k f'(1) = -36 \\ f'(1) &= 2 - 5 = -3 \text{이므로} \\ -3k &= -36 \quad \therefore k = 12 \end{aligned}$$

12 $f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6$ 이라 하면 $f(-1) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) \\ \text{이때 } f'(x) &= 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 7x^6 + 6x^5 \text{이므로 구하는} \\ &\text{값은} \\ f'(-1) &= -10 + 9 - 8 + 7 - 6 = -8 \end{aligned}$$

13 $f(x) = x^n + 2x$ 라 하면 $f(1) = 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 2x - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\ \text{이때 } f'(x) &= nx^{n-1} + 2 \text{이므로 } f'(1) = n + 2 \\ n + 2 &= 10 \quad \therefore n = 8 \end{aligned}$$

14 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 에서

$$4 = 4a + b \quad \therefore b = 4 - 4a \quad \dots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x-4)^2 + b - (4a+b)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x^2 - 8x + 12)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} a(x - 6) = -4a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - (4a+b)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x + 2) = 4 \end{aligned}$$

$$-4a = 4 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 8$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -(x-4)^2 + 8 & (x \geq 2) \\ x^2 & (x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = -(3-4)^2 + 8 = 7$$

다른 풀이

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = a(x-4)^2 + b & (x \geq 2) \\ h(x) = x^2 & (x < 2) \end{cases} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 2a(x-4) & (x > 2) \\ h'(x) = 2x & (x < 2) \end{cases}$$

$x=2$ 에서 연속이므로 $g(2) = h(2)$

$$4a + b = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x=2$ 에서 미분계수가 존재하므로 $g'(2) = h'(2)$

$$-4a = 4 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 8$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -(x-4)^2 + 8 & (x \geq 2) \\ x^2 & (x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = -(3-4)^2 + 8 = 7$$

15 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + a = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3 + a = 0 \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b = 2$

16 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 5$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-3$ 이므로

$$x^3 + ax^2 + bx + 5 = (x-2)^2 Q(x) + 2x - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 + 4a + 2b + 5 = 1 \quad \therefore 2a + b = -6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 2ax + b = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x) + 2$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$12 + 4a + b = 2 \quad \therefore 4a + b = -10 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -2$$

본문 | 060~063쪽

1-1 2, 2

1-2 (1) $f(x)=x^2-x$ 라 하면 $f'(x)=2x-1$ 점 (4, 12)에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=7$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-12=7(x-4) \quad \therefore y=7x-16$$

(2) $f(x)=x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$ 점 (-1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=3\{x-(-1)\} \quad \therefore y=3x+3$$

2-1 0, 3

2-2 $f(x)=2x^2+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=4x+a$

점 (0, 1)에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(0)=-1 \quad \therefore a=-1$$

또 점 (0, 1)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0)=1 \quad \therefore b=1$$

3-1 2, 2

3-2 (1) $f(x)=3x^2-5x+2$ 라 하면 $f'(x)=6x-5$ 접점의 좌표를 $(t, 3t^2-5t+2)$ 라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=6t-5=1 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 (1, 0)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=x-1 \quad \therefore y=x-1$$

다른 풀이 접선의 방정식을 $y=x+n$ 이라 하면

$$3x^2-5x+2=x+n, \text{ 즉 } 3x^2-6x+2-n=0$$

이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(2-n)=0, 3+3n=0 \quad \therefore n=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x-1$ (2) $f(x)=x^3-2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2$ 접점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=3t^2-2=1, t^2=1$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-1$ 일 때, 접점의 좌표는 (-1, 1)이므로

접선의 방정식은

$$y-1=x-(-1) \quad \therefore y=x+2$$

(ii) $t=1$ 일 때, 접점의 좌표는 (1, -1)이므로

접선의 방정식은

$$y-(-1)=x-1 \quad \therefore y=x-2$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$y=x+2 \text{ 또는 } y=x-2$$

4-1 2, 0

4-2 (1) $f(x)=x^2-x-2$ 라 하면 $f'(x)=2x-1$ 접점의 좌표를 (t, t^2-t-2) 라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$$f'(t)=2t-1=5 \quad \therefore t=3$$

따라서 접점의 좌표는 (3, 4)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-4=5(x-3) \quad \therefore y=5x-11$$

(2) $f(x)=x^3+2x+4$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2$ 접점의 좌표를 (t, t^3+2t+4) 라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$$f'(t)=3t^2+2=5$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 접점의 좌표는 (-1, 1) 또는 (1, 7)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=5\{x-(-1)\} \text{ 또는 } y-7=5(x-1)$$

$$\therefore y=5x+6 \text{ 또는 } y=5x+2$$

5-1 1, 2

5-2 (1) $f(x)=x^2+x$ 라 하면 $f'(x)=2x+1$ 접점의 좌표를 (t, t^2+t) 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t+1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t+1)x-t^2$$

..... ㉠

이 접선이 점 (1, 1)을 지나므로

$$1=2t+1-t^2, t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=x \text{ 또는 } y=5x-4$$

(2) $f(x)=-x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2$ 접점의 좌표를 $(t, -t^3+1)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=-3t^2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^3+1)=-3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=-3t^2x+2t^3+1$$

..... ㉡

이 접선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1=2t^3+1, t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{ 는 실수})$$

이 값을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=-3x-1$$

5-3 $f(x)=x^3-2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2$ 접점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$$

..... ㉢

이 접선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -2t^3, t^3 + 1 = 0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

이 값을 ①에 대입하면 접선의 방정식은 $y=x+2$

이 직선이 점 $(k, 5)$ 를 지나므로

$$5=k+2 \quad \therefore k=3$$

6-1 0, 0

6-2 (1) 함수 $f(x) = -x^2 + 2x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(0) = f(2)$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$

인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = -2x + 2$ 이므로 $f'(c) = -2c + 2 = 0$

$$\therefore c=1$$

(2) 함수 $f(x) = x^3 - 6x$ 는 닫힌구간 $[0, \sqrt{6}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, \sqrt{6})$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(0) = f(\sqrt{6})$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$

인 c 가 열린구간 $(0, \sqrt{6})$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 6$ 이므로

$$f'(c) = 3c^2 - 6 = 0, c^2 - 2 = 0$$

$$(c + \sqrt{2})(c - \sqrt{2}) = 0$$

그런데 $0 < c < \sqrt{2}$ 이므로 $c = \sqrt{2}$

7-1 2, 0

7-2 (1) 함수 $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ 은 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(2) = 1, f(3) = -5, f'(x) = -4x + 4$ 이므로

$$\frac{-5 - 1}{3 - 2} = -4c + 4, -6 = -4c + 4$$

$$\therefore c = \frac{5}{2}$$

(2) 함수 $f(x) = x^3 + 3x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0) = 0, f(3) = 36, f'(x) = 3x^2 + 3$ 이므로

$$\frac{36 - 0}{3 - 0} = 3c^2 + 3, 12 = 3c^2 + 3, c^2 = 3$$

그런데 $0 < c < 3$ 이므로 $c = \sqrt{3}$

참고 평균값 정리 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 에서

$f(a) = f(b)$ 인 경우가 롤의 정리이다.

1 (1) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ 이라 하면 $f'(x) = -2x + 4$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 0 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 2$$

(2) $f(x) = x^3 + x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 1$

점 $(-1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-2) = 4\{x - (-1)\} \quad \therefore y = 4x + 2$$

2 (1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 6x - 5$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -5$ 이므로

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{5}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 0) \quad \therefore y = \frac{1}{5}x + 1$$

(2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$ 이라 하면 $f'(x) = -3x^2 - 4x$

점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 1$ 이므로

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\{x - (-1)\} \quad \therefore y = -x + 1$$

3 (1) $f(x) = -x^2 + 3x$ 라 하면 $f'(x) = -2x + 3$

점점의 좌표를 $(t, -t^2 + 3t)$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(t) = -2t + 3 = -1 \quad \therefore t = 2$$

따라서 점점의 좌표는 $(2, 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = -(x - 2) \quad \therefore y = -x + 4$$

(2) $f(x) = x^3 - 13x - 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 13$

점점의 좌표를 $(t, t^3 - 13t - 2)$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(t) = 3t^2 - 13 = -1, t^2 - 4 = 0$$

$$(t + 2)(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

(i) $t = -2$ 일 때, 점점의 좌표는 $(-2, 16)$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - 16 = -\{x - (-2)\} \quad \therefore y = -x + 14$$

(ii) $t = 2$ 일 때, 점점의 좌표는 $(2, -20)$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - (-20) = -(x - 2) \quad \therefore y = -x - 18$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -x + 14 \text{ 또는 } y = -x - 18$$

4 (1) $f(x)=x^3+x-2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

곡선이 직선 $y=ax$ 와 접할 때의 접점의 좌표를 (t, t^3+t-2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+t-2)=(3t^2+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+1)x-2t^3-2$$

이 접선이 직선 $y=ax$ 와 일치하므로

$$3t^2+1=a, -2t^3-2=0$$

$$-2t^3-2=0 \text{에서 } t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

$t=-1$ 을 $3t^2+1=a$ 에 대입하면

$$a=4$$

다른 풀이 곡선과 직선의 접점의 좌표를 (t, t^3+t-2) 라 하면 이 점에서의 곡선과 직선의 y 좌표가 같으므로

$$t^3+t-2=at \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이 점에서의 접선과 직선의 기울기가 같으므로

$$3t^2+1=a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$t^3+t-2=(3t^2+1)t, t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

$t=-1$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면 $a=4$

(2) $f(x)=-x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(-3t^2+2)x+2t^3$$

이 접선이 직선 $y=ax+2$ 와 일치하므로

$$-3t^2+2=a, 2t^3=2$$

$$2t^3=2 \text{에서 } t^3-1=0$$

$$(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

$t=1$ 을 $-3t^2+2=a$ 에 대입하면

$$a=-1$$

다른 풀이 곡선과 직선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t)$ 라 하면 이 점에서의 곡선과 직선의 y 좌표가 같으므로

$$-t^3+2t=at+2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이 점에서의 접선과 직선의 기울기가 같으므로

$$-3t^2+2=a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$-t^3+2t=(-3t^2+2)t+2, t^3-1=0$$

$$(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

$t=1$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면 $a=-1$

5 (1) $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기

는 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2$$

이 접선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4=-t^2, t^2-4=0$$

$$(t+2)(t-2)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 구하는 접점의 좌표는

$$(-2, 4) \text{ 또는 } (2, 4)$$

(2) $f(x)=x^3-2x^2-2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t^2-2) 라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t)=3t^2-4t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t^2-2)=(3t^2-4t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2-2$$

이 접선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2t^3+2t^2-2, t^3-t^2+2=0$$

$$(t+1)(t^2-2t+2)=0$$

$$\therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-1, -5)$

6 (1) $f(x)=x^2+x$ 라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t)=2t+1$ 이므로

접선의 방정식은

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t+1)x-t^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 접선이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$2=4t+2-t^2, t^2-4t=0$$

$$t(t-4)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

이 값을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=x \text{ 또는 } y=9x-16$$

(2) $f(x)=x^2-3$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2-3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-3)=2t(x-t)$$

$$\therefore y=2tx-t^2-3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 접선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4=-t^2-3, t^2-1=0$$

$$(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

이 값을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x-4 \text{ 또는 } y=2x-4$$

7 (1) $f(x)=ax^3, g(x)=bx^2+cx$ 에서

$$f'(x)=3ax^2, g'(x)=2bx+c$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 모두 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$f(1)=1, g(1)=1$$

$$\therefore a=1, b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 두 곡선의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1)$$

$$3a=2b+c \quad \therefore 2b+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=2, c=-1$

(2) $f(x)=x^3+c, g(x)=-x^2+ax+b$ 에서
 $f'(x)=3x^2, g'(x)=-2x+a$
두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 모두 점 $(1, 2)$ 를 지나므로
 $f(1)=2, g(1)=2$
 $1+c=2, -1+a+b=2$
 $\therefore c=1, a+b=3$ ㉠
또 두 곡선의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(1)=g'(1)$
 $3=-2+a \quad \therefore a=5$
 $a=5$ 를 ㉠에 대입하면 $b=-2$
 $\therefore a=5, b=-2, c=1$

8 (1) $f(x)=x^3+ax+2, g(x)=bx^2+3$ 에서
 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$
두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 $x=1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로
 $f(1)=g(1)$ 에서
 $1+a+2=b+3 \quad \therefore a-b=0$ ㉠
 $f'(1)=g'(1)$ 에서
 $3+a=2b \quad \therefore a-2b=-3$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하여 풀면
 $a=3, b=3$
(2) $f(x)=2x^3+ax+b, g(x)=ax^2+bx+1$ 에서
 $f'(x)=6x^2+a, g'(x)=2ax+b$
두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 $x=-1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로
 $f(-1)=g(-1)$ 에서
 $-2-a+b=a-b+1 \quad \therefore 2a-2b=-3$ ㉠
 $f'(-1)=g'(-1)$ 에서
 $6+a=-2a+b \quad \therefore 3a-b=-6$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하여 풀면
 $a=-\frac{9}{4}, b=-\frac{3}{4}$

기초 개념 평가

본문 | 066, 067쪽

- | | |
|------------|------------|
| 01 $f'(a)$ | 02 $f'(1)$ |
| 03 $f(a)$ | 04 $f(t)$ |
| 05 $f'(t)$ | 06 t |
| 07 $f(t)$ | 08 $f'(t)$ |
| 09 t | 10 롤의 정리 |
| 11 평균값 정리 | |

기초 문제 평가

본문 | 068, 069쪽

- $f(x)=2x^3-4x$ 라 하면 $f'(x)=6x^2-4$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1)=2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-2)=2(x-1) \quad \therefore y=2x-4$
따라서 $a=2, b=-4$ 이므로 $a-b=2-(-4)=6$
- $f(x)=x^3-3x^2+x-2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1)=-2$ 이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
 $y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)=0$ 이고 극한값이 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=0 \quad \therefore f(2)=0$
이때 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$ 에서 $f'(2)=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y-0=3(x-2) \quad \therefore y=3x-6$
- $f(x)=x^3-4x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-8x$
곡선 $y=x^3-4x^2+1$ 위의 점 $A(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-5$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-2)=-5(x-1) \quad \therefore y=-5x+3$
이 접선과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $x^3-4x^2+1=-5x+3, x^3-4x^2+5x-2=0$
 $(x-1)^2(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 점 B의 x 좌표는 2이므로 $B(2, -7)$
 $\therefore AB=\sqrt{(2-1)^2+\{-7-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$
- $f(x)=x^3-6x^2+7x-4$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-12x+7=3(x-2)^2-5$
이므로 접선의 기울기는 $x=2$ 일 때, 최솟값 -5 를 갖는다.
이때 접점의 좌표는 $(2, -6)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y-(-6)=-5(x-2) \quad \therefore y=-5x+4$
- $f(x)=-x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
곡선이 직선 $y=mx+\frac{1}{4}$ 과 접할 때의 접점의 좌표를
 $(t, -t^3+2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=-3t^2+2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$
 $\therefore y=(-3t^2+2)x+2t^3$

이 직선이 직선 $y=mx+\frac{1}{4}$ 과 일치하므로

$$-3t^2+2=m, 2t^3=\frac{1}{4}$$

$$2t^3=\frac{1}{4} \text{에서 } 8t^3-1=0$$

$$(2t-1)(4t^2+2t+1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2} (\because t \text{는 실수})$$

$$t=\frac{1}{2} \text{을 } -3t^2+2=m \text{에 대입하면 } m=\frac{5}{4}$$

따라서 구하는 답은 ②이다.

7 $f(x)=x^3-x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+2) 라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t)=3t^2-1=2, t^2=1$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

$t=-1$ 일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2\{x-(-1)\} \quad \therefore y=2x+4$$

$t=1$ 일 때, 접점의 좌표는 $(1, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2(x-1) \quad \therefore y=2x$$

직선 $y=2x$ 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x+4$, 즉

$$2x-y+4=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

참고 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

8 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x-1$ 이 점 $(1, 0)$ 에서 접하므로

$$f(1)=1+a+b+1=0 \quad \therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(1)=3+2a+b=1 \quad \therefore 2a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=0, b=-2$$

$$\therefore a-b=0-(-2)=2$$

따라서 구하는 답은 ⑤이다.

9 $f(x)=x^3-3x^2-5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-5) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-3t^2-5)=(3t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$0=-2t^3+3t^2-5, 2t^3-3t^2+5=0$$

$$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$$

$$\therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 A $(-1, -9)$ 이므로 선분 OA의 길이는

$$\overline{OA}=\sqrt{(-1)^2+(-9)^2}=\sqrt{82}$$

10 $f(x)=-x^2+2x+3$ 이라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^2+2t+3)=(-2t+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(-2t+2)x+t^2+3$$

이 접선이 점 $(2, 7)$ 을 지나므로

$$7=-4t+4+t^2+3, t^2-4t=0$$

$$t(t-4)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

두 접선의 기울기는

$$f'(0)=2, f'(4)=-6$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은 -4

11 $f(x)=x^3-5x^2+6x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-10x+6$

접점의 좌표를 (t, t^3-5t^2+6t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-10t+6$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-5t^2+6t)=(3t^2-10t+6)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-10t+6)x-2t^3+5t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 접선이 점 $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$4=-3t^2+10t-6-2t^3+5t^2$$

$$t^3-t^2-5t+5=0$$

$$(t-1)(t+\sqrt{5})(t-\sqrt{5})=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=-\sqrt{5} \text{ 또는 } t=\sqrt{5}$$

$$\text{이때 } f'(1)=-1, f'(-\sqrt{5})=21+10\sqrt{5},$$

$$f'(\sqrt{5})=21-10\sqrt{5}$$

접선의 기울기가 유리수이므로 $t=1$ 을 ①에 대입하면

$$\text{접선의 방정식은 } y=-x+3$$

이 직선이 $y=ax+b$ 와 일치하므로

$$a=-1, b=3 \quad \therefore ab=-3$$

12 $f(x)=x^3+ax, g(x)=x^2+2x-1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x+2$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 한 점에서 접하므로 접점의 x

좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+at=t^2+2t-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2+a=2t+2 \quad \therefore a=-3t^2+2t+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$t^3+(-3t^2+2t+2)t=t^2+2t-1$$

$$2t^3-t^2-1=0, (t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

$$t=1 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a=-3+2+2=1$$

13 $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=-x^2+c$ 라 하면

$$f'(x)=2x+a, g'(x)=-2x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 모두 점 $(1, 3)$ 을 지나므로
 $f(1)=3, g(1)=3$

$$1+a+b=3, -1+c=3$$

$$\therefore a+b=2, c=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 두 곡선의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1)$$

$$2+a=-2 \quad \therefore a=-4$$

$$a=-4\text{를 } \textcircled{7}\text{에 대입하면 } b=6$$

$$\therefore a=-4, b=6, c=4$$

- 14** 함수 $f(x)=x^2(x-a)$ 는 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(0, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(0)=f(a)$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, a)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f(x)=x^2(x-a)=x^3-ax^2\text{에서 } f'(x)=3x^2-2ax$$

롤의 정리를 만족시키는 c 의 값이 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-2a\times\frac{1}{3}=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

- 15** 함수 $f(x)=x^2+ax$ 에 대하여 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수가 2이므로

$$f'(x)=2x+a\text{에서 } f'(2)=4+a=0 \quad \therefore a=-4$$

함수 $f(x)=x^2-4x$ 에 대하여 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 b 이므로

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{5-(-3)}{4}=2=f'(b)$$

$$f'(b)=2b-4=2 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=-4+3=-1$$

참고 함수 $f(x)=x^2+ax$ 에 대하여 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수가 존재하므로

$$f(0)=f(4)\text{에서 } 0=16+4a \quad \therefore a=-4$$

- 16** 함수 $f(x)=x^3-3x+2$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f(-1)=4, f(1)=0, f'(x)=3x^2-3\text{이므로}$$

$$\frac{0-4}{1-(-1)}=3c^2-3$$

$$3c^2-3=-2, c^2=\frac{1}{3} \quad \therefore c=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 모든 실수 c 의 값의 곱은 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}$

1-1 1, -1, 3

$$\text{1-2 (1)} f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

구간 $(-\infty, -1], [1, \infty)$ 에서 증가하고,

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소한다.

$$(2) f'(x)=-3x^2+18x=-3x(x-6)$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=6$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	6	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	108	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

구간 $(-\infty, 0], [6, \infty)$ 에서 감소하고,

닫힌구간 $[0, 6]$ 에서 증가한다.

2-1 $-2a, 4$

$$\text{2-2 모든 실수 } x\text{에 대하여 } f'(x)=-3x^2+4ax-3a\leq 0, \text{ 즉}$$

$$3x^2-4ax+3a\geq 0\text{이어야 하므로 이차방정식}$$

$$3x^2-4ax+3a=0\text{의 판별식을 } D\text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4}=4a^2-9a\leq 0, a(4a-9)\leq 0$$

$$\therefore 0\leq a\leq \frac{9}{4}$$

3-1 -1, -1, -4

$$\text{3-2 (1)} f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	14	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=14$

$x=-2$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(-2)=-18$

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-5	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	100	↘	-8	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -5 \text{에서 극대이고 극댓값은 } f(-5) = 100$$

$$x = 1 \text{에서 극소이고 극솟값은 } f(1) = -8$$

$$(3) f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	4	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 0 \text{에서 극대이고 극댓값은 } f(0) = 5$$

$$x = -1, x = 1 \text{에서 극소이고 극솟값은 } f(-1) = f(1) = 4$$

4-1 0, -1

$$4-2 (1) f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

$f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(2) = 24 - 36 + a = 0 \quad \therefore a = 12$$

또 이때의 극솟값이 1이므로

$$f(2) = 16 - 36 + 2a + b = 1$$

$$\therefore 2a + b = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a = 12$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore a = 12, b = -3$$

$$(2) f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(1) = -3 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이때의 극댓값이 8이므로

$$f(1) = -1 + a + b = 8 \quad \therefore a + b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -6, b = 15$$

5-1 -2, -12, 16

$$5-2 (1) f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ 가 $x = 0, x = 1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(0) = b = 0$$

$$f'(1) = -6 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b = 0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 3$

$$\text{따라서 } f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$\text{극댓값은 } f(1) = 2$$

$$\text{극솟값은 } f(0) = 1$$

$$\therefore a = 3, b = 0, \text{극댓값: } 2, \text{극솟값: } 1$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ 가 $x = 0, x = 2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(0) = b = 0$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \quad \therefore 4a + b = -12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b = 0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = -3$

또 $x = 0$ 에서의 극댓값이 1이므로

$$f(0) = c = 1$$

$$\therefore a = -3, b = 0, c = 1$$

6-1 1, 3

$$6-2 (1) f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

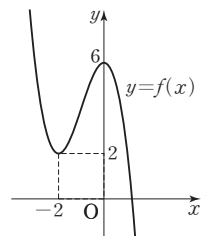
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

또 $f(0) = 6$ 이므로 함수 $y = f(x)$

의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 6)$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

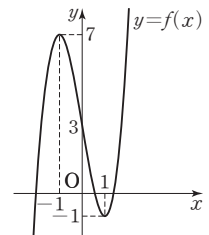
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-1	↗

또 $f(0) = 3$ 이므로 함수 $y = f(x)$

의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 3)$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



7-1 0, 0

$$7-2 (1) f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

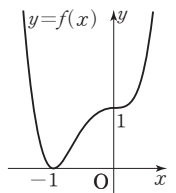
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↗

또 $f(0) = 1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의

그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$$

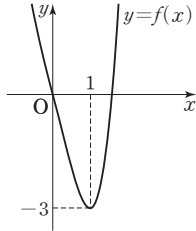
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

또 $f(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



8-1 9a, -1

$$8-2 f'(x) = x^2 + 2ax - 5a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 5a > 0, a(a+5) > 0$$

$$\therefore a < -5 \text{ 또는 } a > 0$$

9-1 3, -3

$$9-2 f'(x) = 6x^2 - 2ax + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$f'(x)=0$ 이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a \leq 0, a(a-6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$$

10-1 -1, -5

$$10-2 (1) f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

단한구간 $[-3, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

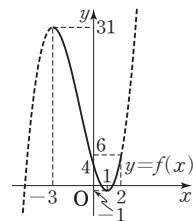
x	-3	$\dots$	1	$\dots$	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	31	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -3$ 에서 최댓값 31,

$x = 1$ 에서 최솟값 -1

을 갖는다.



$$(2) f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

단한구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

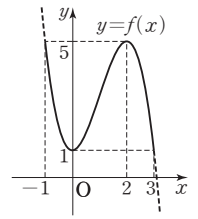
x	-1	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -1, x = 2$ 에서 최댓값 5,

$x = 0, x = 3$ 에서 최솟값 1

을 갖는다.



11-1 22, -1

$$11-2 f'(x) = 6x^2 + 18x + 12 = 6(x+2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = -1$$

단한구간 $[-2, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\dots$	-1	$\dots$	0
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-4$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	a

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 a , $x=-1$ 에서 최솟값 $a-5$ 를 갖는다. 이때 $f(x)$ 의 최솟값이 -4이므로

$$a-5 = -4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $a=1$

집중 연습

본문 | 076, 077쪽

$$1 (1) f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(-1) = \frac{8}{3}$

$x = 3$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(3) = -8$

$$(2) f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	7	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(1) = 7$

$x = -2$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(-2) = -20$

$$(3) f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-21	$\nearrow$	6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

극댓값은 없다.

$$x = -3 \text{에서 극소이고 극솟값은 } f(-3) = -21$$

$$(4) f'(x) = -4x^3 - 4x + 8 = -4(x-1)(x^2+x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 1 \text{에서 극대이고 극댓값은 } f(1) = 1$$

극솟값은 없다.

$$2 (1) f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극댓값 16을 가지므로

$$f'(-2) = 24 - 4a + b = 0$$

$$\therefore 4a - b = 24 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = -16 + 4a - 2b - 4 = 16$$

$$\therefore 2a - b = 18 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 3, b = -12$$

$$(2) f'(x) = 3ax^2 - 6x + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값 0을 가지므로

$$f'(1) = 3a - 6 + b = 0 \quad \therefore 3a + b = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1) = a - 3 + b - 7 = 0 \quad \therefore a + b = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -2, b = 12$$

$$(3) f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1, x = 3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = -3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0 \quad \therefore 6a + b = -27 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -6, b = 9$$

$$(4) f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -5, x = -1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-5) = -75 - 10a + b = 0$$

$$\therefore 10a - b = -75 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(-1) = -3 - 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a - b = -3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -9, b = -15$$

$$3 (1) f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	8

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 3 \text{에서 최댓값 } 8, x = 0 \text{에서 최솟값 } -1 \text{을 갖는다.}$$

$$(2) f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -2 \text{에서 최댓값 } 7, x = -1 \text{에서 최솟값 } -4 \text{를 갖는다.}$$

$$(3) f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	64	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -2 \text{에서 최댓값 } 64, x = 0 \text{에서 최솟값 } 0 \text{을 갖는다.}$$

$$(4) f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	9

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 2 \text{에서 최댓값 } 9, x = 1 \text{에서 최솟값 } 0 \text{을 갖는다.}$$

$$4 (1) f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$a-40$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-8$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 $a-40$ 을 갖는다.

이때 최솟값이 -35 이므로

$$a - 40 = -35 \quad \therefore a = 5$$

$$(2) f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-13$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	$a+32$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $a+32$ 를 갖는다.

이때 최댓값이 26이므로

$$a+32=26 \quad \therefore a=-6$$

$$(3) f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a+11$	$\searrow$	$a-16$	$\nearrow$	$a-9$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값, $x=2$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 11이므로

$$(a+11) + (a-16) = 11$$

$$2a = 16 \quad \therefore a = 8$$

$$(4) f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a-27$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값, $x=3$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -12이므로

$$(a+5) + (a-27) = -12$$

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

기초 개념 평가

본문 | 078, 079쪽

- | | |
|-----------------|---------------------------------|
| 01 증가, 감소 | 02 $f'(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$ |
| 03 극대 | 04 극소 |
| 05 극댓값, 극솟값 | 06 극솟값, 극댓값 |
| 07 $x, f(x), y$ | 08 $D > 0$ |
| 09 $D \leq 0$ | 10 극값 |
| 11 $f(a)$ | |

- 1 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2a \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $3x^2 + 2ax - 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 6a \leq 0, a(a+6) \leq 0 \quad \therefore -6 \leq a \leq 0$$

$$M = 0, m = -6 \text{이므로 } M - m = 0 - (-6) = 6$$

- 2 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + a \text{이므로}$$

$$f'(1) = -3 + 2 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(2) = -12 + 4 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 실수 a 의 값의 범위는 $a \geq 8$

따라서 구하는 실수 a 의 최솟값은 8이다.

$$3 f'(x) = -3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2) = -12 - 4a = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0) = 6$, 극솟값은 $f(-2) = 2$ 이므로 극댓값과 극솟값의 차는 4이다.

- 4 함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$f'(-2) = 0, f(-2) = -1$$

$$y = x^2 f(x) \text{에서 } y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \text{이므로}$$

함수 $y = x^2 f(x)$ 의 $x = -2$ 에서의 미분계수는

$$2 \times (-2) \times f(-2) + (-2)^2 \times f'(-2) = 4 + 0 = 4$$

$$5 f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = a+5$, 극솟값은

$f(3) = a-27$ 이고 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로 (극댓값) + (극솟값) = 0

$$(a+5) + (a-27) = 0 \quad \therefore a = 11$$

6 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(1)=3+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(3)=27+6a+b=0 \quad \therefore 6a+b=-27 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=9$

이때 극댓값이 3이므로

$$f(1)=1+a+b+c=3 \quad \therefore a+b+c=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$a=-6, b=9$ 를 ㉢에 대입하면 $c=-1$

$$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x-1$$

따라서 구하는 극솟값은

$$f(3)=27-54+27-1=-1$$

7 $f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$4a$	$\searrow$	$-4a^3+4a$	$\nearrow$

이때 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

$$-4a^3+4a=0, 4a(a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

8 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(0)=b=0$$

$$f'(2)=12+4a+b=0 \quad \therefore 4a+b=-12 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$b=0$ 을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2+c$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$c-4$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 c 를 가지므로 $c=5$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$c-4=5-4=1$$

다른 풀이 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0)=0, f'(2)=0$

이므로 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 0, 2이다. 즉,

$$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$$

$$2a=-6, b=0 \text{이므로 } a=-3, b=0$$

9 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

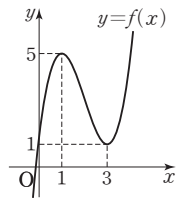
$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

또 $f(0)=1$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축과 점 $(0, 1)$ 에서 만난다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 개형이 될 수 있는 것은 ㉠이다.



10 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 0, 2, 4이므로

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

ㄱ. $f(x)$ 는 구간 $[4, \infty)$ 에서 감소한다. (참)

ㄴ. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄹ. $f(x)$ 가 극값을 갖는 점의 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 $f'(x)=3x^2-4ax+a^2+3$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$f'(x)=0$ 이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-3(a^2+3) \leq 0, a^2-9 \leq 0$$

$$(a+3)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 3$$

따라서 구하는 정수 a 의 개수는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 의 7이다.

12 $f'(x)=2x^3-4x+8=2(x+2)(x^2-2x+2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$a-16$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟값 $a-16$ 을 갖고 이때 최솟값이 2이므로

$$a-16=2 \quad \therefore a=18$$

13 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$

$a > 0$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-16a+b$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 b , $x=2$ 에서 최솟값 $-16a+b$ 를 갖는다.

이때 최댓값이 3, 최솟값이 -29 이므로

$b=3, -16a+b=-29$

$\therefore a=2, b=3 \quad \therefore a+b=2+3=5$

14 $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-5$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$	$a+36$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $M=a+36$, $x=1$ 에서 최솟값 $m=a-8$ 을 갖는다.

이때 $M+m=40$ 이므로

$(a+36) + (a-8) = 40$

$2a=12 \quad \therefore a=6$

15 사각형 ABCD가 직사각형이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$

$D(a, 9-a^2)$ 이라 하면 $a > 0, 9-a^2 > 0$ 이므로

$0 < a < 3$

이때 $A(-a, 9-a^2)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ 이므로

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$S(a) = \overline{AB} \times \overline{BC} = (9-a^2) \times 2a = -2a^3 + 18a$

$S'(a) = -6a^2 + 18 = -6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a) = 0$ 에서 $a = -\sqrt{3}$ 또는 $a = \sqrt{3}$

열린구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $S(a)$ 는 $a=\sqrt{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

1-1 2, 3

1-2 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ 이라 하면

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

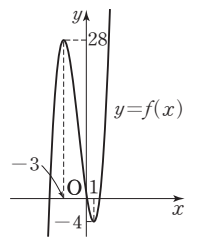
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식

$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

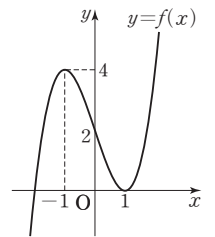
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식

$x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ 이라 하면

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$

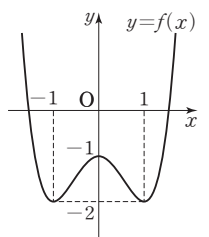
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식

$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



2-1 a, -4

2-2 $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$ 에서 $2x^3 - 3x^2 - 12x = -a$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ 라 하면

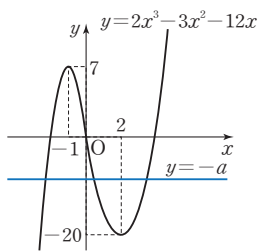
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -a$ 의 교점의 개수와 같다.



(1) 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-20 < -a < 7 \quad \therefore -7 < a < 20$$

(2) 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값은

$$-a = -20 \text{ 또는 } -a = 7 \quad \therefore a = -20 \text{ 또는 } a = 7$$

(3) 한 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-a < -20 \text{ 또는 } -a > 7 \quad \therefore a < -20 \text{ 또는 } a > 7$$

3-1 0, -16

3-2 $f(x) = x^3 - x^2 - a$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}$

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

(1) (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 에서 $f(0)f(\frac{2}{3}) < 0$, 즉

$$-a\left(-\frac{4}{27} - a\right) < 0 \quad \therefore -\frac{4}{27} < a < 0$$

(2) (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 에서 $f(0)f(\frac{2}{3}) > 0$, 즉

$$-a\left(-\frac{4}{27} - a\right) > 0 \quad \therefore a < -\frac{4}{27} \text{ 또는 } a > 0$$

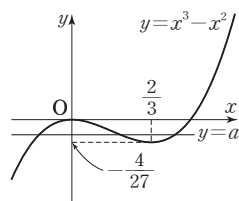
다른 풀이 $x^3 - x^2 - a = 0$ 에서 $x^3 - x^2 = a$ 이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = x^3 - x^2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

(1) 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{4}{27} < a < 0$$

(2) 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a < -\frac{4}{27} \text{ 또는 } a > 0$$



3-3 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

(1) (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 에서 $f(-1)f(3) = 0$, 즉

$$(a+5)(a-27) = 0 \quad \therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 27$$

(2) (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 에서 $f(-1)f(3) > 0$, 즉

$$(a+5)(a-27) > 0 \quad \therefore a < -5 \text{ 또는 } a > 27$$

4-1 1, 0

4-2 0, $\geq$

5-1 (1) -3 (2) 0, 2

5-2 (1) 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12, a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

따라서 $t = 1$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v = 3 \times 1^2 - 12 = -9, a = 6 \times 1 = 6$$

$\therefore$ 속도: -9, 가속도: 6

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v = 3t^2 - 12 = 0, (t+2)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 2이다.

6-1 0, 0, 3, 3

6-2 (1) t 초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 10t$$

최고 높이에서 공의 속도는 0 m/s이므로

$$v = 20 - 10t = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 그때의 높이는

$$x = 60 + 20 \times 2 - 5 \times 2^2 = 80 \text{ (m)}$$

(2) 공이 지면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로

$$x = 60 + 20t - 5t^2 = 0, (t+2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = 6 (\because t > 0)$$

따라서 공이 지면에 닿는 순간의 속도는 $t = 6$ 일 때

$$v = 20 - 10 \times 6 = -40 \text{ (m/s)}$$

집중 연습

본문 | 087쪽

1 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ 라 하면

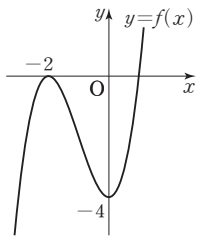
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3+3x^2-4=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(2) $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$ 라 하면

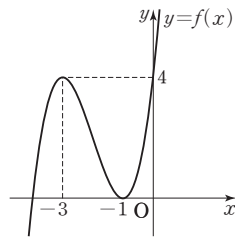
$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3+6x^2+9x+4=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ 이라 하면

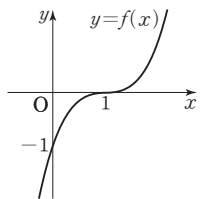
$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+3x-1=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



(4) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 라 하면

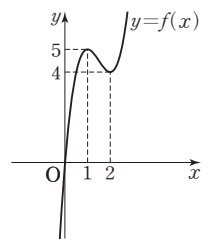
$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $2x^3-9x^2+12x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



2 (1) $f(x)=2x^4-4x^2+1$ 이라 하면

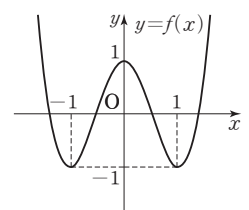
$$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $2x^4-4x^2+1=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(2) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$ 이라 하면

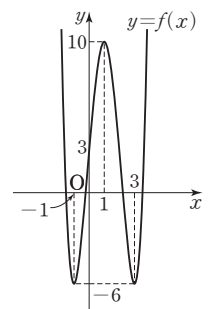
$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-6	↗	10	↘	-6	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $x^4-4x^3-2x^2+12x+3=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(3) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+5$ 라 하면

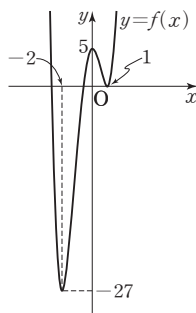
$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-27	↗	5	↘	0	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $3x^4+4x^3-12x^2+5=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(4) $f(x)=x^4-6x^2-8x+8$ 이라 하면

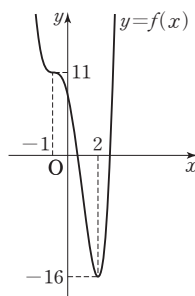
$$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

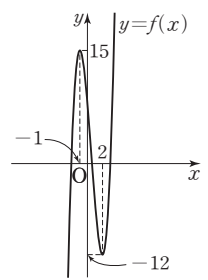
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^4-6x^2-8x+8=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $2x^3-3x^2-12x+8=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.



2 $f(x)=x^4+4x+1$ 이라 하면

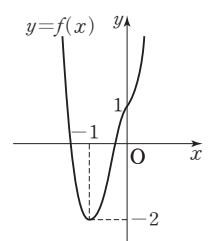
$$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^4+4x+1=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 옳은 것은 ③이다.



3 $2x^3-2=6x+k$ 에서 $2x^3-6x-2=k$

$$f(x)=2x^3-6x-2 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

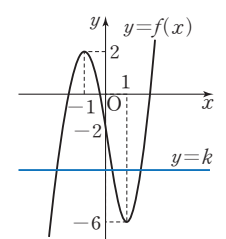
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

두 함수 $y=f(x)$, $y=k$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 한 개는 음수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면

$$-6 < k < -2$$



4 두 곡선 $y=x^3-4x^2+6x$, $y=2x^2-3x+k$ 의 교점의 개수는 방정식 $x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x-k=0$ 의 실근의 개수와 같다.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

기초 개념 평가

본문 | 088, 089쪽

- | | |
|--------------|-------------|
| 01 x 축 | 02 x 축 |
| 03 x | 04 $y=g(x)$ |
| 05 $<, =, >$ | 06 최솟값 |
| 07 $h(x)$ | 08 속도, 속력 |
| 09 가속도 | |

기초 문제 평가

본문 | 090, 091쪽

1 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$ 이라 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-12	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은
 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 에서 $f(1)f(3) < 0$, 즉
 $(4-k)(-k) < 0 \quad \therefore 0 < k < 4$

- 5 곡선 $y=x^3+6x^2$ 과 직선 $y=15x-a$ 의 교점의 개수는 방정식 $x^3+6x^2=15x-a$, 즉 $x^3+6x^2-15x+a=0$ 의 실근의 개수와 같다.

$$f(x)=x^3+6x^2-15x+a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-5	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$(극댓값) \times (극솟값) > 0 \text{에서 } f(-5)f(1) > 0, \text{ 즉}$$

$$(a+100)(a-8) > 0 \quad \therefore a < -100 \text{ 또는 } a > 8$$

- 6 $f(x)=x^3-2x^2-4x-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k$	$\searrow$	$-8-k$	$\nearrow$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$\text{즉, } x \geq 0 \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{이라면 } -8-k \geq 0 \quad \therefore k \leq -8$$

따라서 구하는 k 의 최댓값은 -8 이다.

- 7 $f(x)=x^4+4x^2-12x+k$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3+8x-12=4(x-1)(x^2+x+3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-7$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$\text{즉, } f(x) \geq 0 \text{이라면 } k-7 \geq 0 \quad \therefore k \geq 7$$

- 8 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=x^4-6x^2-8x-a$$

$$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	2	$\dots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$3-a$	$\searrow$	$-24-a$	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$\text{즉, } h(x) \geq 0 \text{이라면 } -24-a \geq 0 \quad \therefore a \leq -24$$

따라서 구하는 a 의 최댓값은 -24 이다.

- 9 (가) 1 (나) 1 (다) 0

- 10 제동을 걸고 t 초 후의 자동차의 속도를 v (m/s)라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 6t$$

자동차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$$v = 30 - 6t = 0 \text{에서 } t = 5$$

따라서 구하는 거리는

$$x = 30 \times 5 - 3 \times 5^2 = 75 \text{ (m)}$$

- 11 점 P의 시각 t 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 27, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

속도가 3이 되는 순간은

$$v = 3t^2 - 18t + 27 = 3, t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 $t=2$ 일 때 속도가 처음으로 3이 되므로 구하는 가속도는

$$a = 6 \times 2 - 18 = -6$$

- 12 점 P의 시각 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t + 4$$

출발한 후 다시 원점을 지나는 순간은

$$x = t^3 - 4t^2 + 4t = 0, t(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 구하는 속도는

$$v = 3 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = 0$$

- 13 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = t^2 + 4, v_2 = 4t$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1 = v_2$ 에서

$$t^2 + 4 = 4t, t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

$t=2$ 일 때 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 + 4 \times 2 - \frac{2}{3} = 10$$

$$g(2) = 2 \times 2^2 - 10 = -2$$

따라서 구하는 거리는 $10 - (-2) = 12$

본문 | 094~099쪽

1-1 (1) $5x$ (2) x^3

1-2 (1) $(10x)' = 10$ 이므로 $\int 10dx = 10x + C$

(2) $(2x^2)' = 4x$ 이므로 $\int 4x dx = 2x^2 + C$

2-1 (1) $2x$ (2) 4

2-2 (1) $f(x) = (7x + C)' = 7$

(2) $f(x) = (-x^2 + 2x + C)' = -2x + 2$

3-1 $2, x^2$

3-2 (1) $\int (3x^2 + 4x + 1)dx$

$$= \int 3x^2 dx + \int 4x dx + \int 1 dx$$

$$= 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int dx$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} x^3 + 4 \times \frac{1}{2} x^2 + x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 + x + C$$

(2) $\int (x-3)(x^2+3x+9)dx$

$$= \int (x^3 - 27)dx = \int x^3 dx - 27 \int dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 - 27x + C$$

3-3 (1) $\int (x+2)^2 dx - \int (x-2)^2 dx$

$$= \int \{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)\} dx$$

$$= \int 8x dx = 8 \int x dx = 8 \times \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$= 4x^2 + C$$

(2) $\int \frac{x^3}{x^2-x+1} dx + \int \frac{1}{x^2-x+1} dx$

$$= \int \frac{x^3+1}{x^2-x+1} dx$$

$$= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} dx$$

$$= \int (x+1) dx = \int x dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + x + C$$

4-1 $-5, 5$

4-2 (1) $f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2x + 1) dx$

$$= 2x^3 - x^2 + x + C$$

이때 $f(1) = 5$ 이므로 $C = 3$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$$

(2) $f(x) = \int f'(x) dx = \int (8x^3 - 3x^2 + 1) dx$

$$= 2x^4 - x^3 + x + C$$

이때 $f(0) = 4$ 이므로 $C = 4$

$$\therefore f(x) = 2x^4 - x^3 + x + 4$$

5-1 $x^2, 9, 9$

5-2 (1) 접선의 기울기가 $x-2$ 이므로 $f'(x) = x-2$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-2) dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$f(1) = 2 \text{에서 } C = \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + \frac{7}{2}$$

(2) 접선의 기울기가 $3x^2 + 4x - 5$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x - 5) dx$$

$$= x^3 + 2x^2 - 5x + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$$

6-1 $4, 1, 1$

6-2 $F(x) = xf(x) - 2x^3 + x^2 + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 2x$$

$$F'(x) = f(x) \text{에서 } f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 2x$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 2x \quad \therefore f'(x) = 6x - 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x - 2) dx = 3x^2 - 2x + C$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

7-1 $-7, 3$

7-2 $\int f(x) dx = xf(x) - 2x^3 - 4x^2 + 3$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 8x$$

$$xf'(x) = 6x^2 + 8x \quad \therefore f'(x) = 6x + 8$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x + 8) dx = 3x^2 + 8x + C$$

이때 $f(1) = -3$ 이므로 $C = -14$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 8x - 14$$

8-1 $1, 11$

8-2 $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ 1 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & (x \geq 1) \\ x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C_2 = 2$$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ 에서

$$C_1 = 1 + C_2 \quad \therefore C_1 = 3$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & (x \geq 1) \\ x + 2 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-1) + f(2) = (-1 + 2) + (4 - 2 + 3) = 6$$

8-3 $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & (x > 2) \\ 2x + 3 & (x < 2) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + C_1 & (x \geq 2) \\ x^2 + 3x + C_2 & (x < 2) \end{cases}$$

$$f(-1) = 2 \text{에서 } C_2 = 4$$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ 에서

$$4 + C_1 = 10 + C_2 \quad \therefore C_1 = 10$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 10 & (x \geq 2) \\ x^2 + 3x + 4 & (x < 2) \end{cases}$$

$$\therefore f(3) = 27 - 6 + 10 = 31$$

9-1 8, 2

9-2 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값, $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore f(3) = 0$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6x - 9) dx \\ = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

$$\text{이때 } f(3) = 0 \text{에서 } C = 27$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ 이므로 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 27 = 32$$

9-3 방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근이 0, 1이므로

$$f'(x) = ax(x-1) = ax^2 - ax \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (ax^2 - ax) dx \\ = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + C$$

$a > 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 극댓값, $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{즉, } f(0) = C = 1, f(1) = \frac{a}{3} - \frac{a}{2} + C = -1$$

$$\therefore a = 12, C = 1$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

집중 연습

본문 | 100, 101쪽

1 (1) $\int (2x-1) dx = x^2 - x + C$

(2) $\int (3y+5) dy = \frac{3}{2}y^2 + 5y + C$

(3) $\int (3x^2 - x + 4) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

(4) $\int (9t^2 - 4t + 2) dt = 3t^3 - 2t^2 + 2t + C$

(5) $\int (4x^3 + 3x^2 - 3) dx = x^4 + x^3 - 3x + C$

(6) $\int (x^5 + 2x^3 - 1) dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x + C$

2 (1) $\int (x+4)(x-4) dx = \int (x^2 - 16) dx \\ = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C$

(2) $\int (2x-1)^2 dx = \int (4x^2 - 4x + 1) dx \\ = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

(3) $\int (y+2)^2 dy = \int (y^2 + 4y + 4) dy \\ = \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 + 4y + C$

(4) $\int (x-1)(x+2) dx = \int (x^2 + x - 2) dx \\ = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(5) $\int (2t+1)(t-3) dt = \int (2t^2 - 5t - 3) dt \\ = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 3t + C$

(6) $\int (x-2)(x^2+2x+4) dx = \int (x^3 - 8) dx \\ = \frac{1}{4}x^4 - 8x + C$

3 (1) $\int (2x+3) dx + \int (2x-3) dx = \int 4x dx = 2x^2 + C$

(2) $\int (5x-8) dx - \int (x-9) dx \\ = \int (4x+1) dx = 2x^2 + x + C$

(3) $\int (3x^2+5x-3) dx + \int (3x^2-5x+3) dx \\ = \int 6x^2 dx = 2x^3 + C$

(4) $\int (4x^2+8x+5) dx - \int (x^2+7x+5) dx \\ = \int (3x^2+x) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

$$\begin{aligned}
 (5) & \int (x+3)^2 dx + \int (x-3)^2 dx \\
 &= \int (x^2+6x+9) dx + \int (x^2-6x+9) dx \\
 &= \int (2x^2+18) dx = \frac{2}{3}x^3 + 18x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) & \int (x+1)^3 dx - \int (x-1)^3 dx \\
 &= \int (x^3+3x^2+3x+1) dx - \int (x^3-3x^2+3x-1) dx \\
 &= \int (6x^2+2) dx = 2x^3 + 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 (1) & \int \frac{x^2}{x+1} dx + \int \frac{3x+2}{x+1} dx \\
 &= \int \frac{x^2+3x+2}{x+1} dx = \int \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} dx \\
 &= \int (x+2) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \int \frac{x^2}{x-2} dx - \int \frac{x+2}{x-2} dx \\
 &= \int \frac{x^2-x-2}{x-2} dx = \int \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} dx \\
 &= \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \int \frac{x^2}{x+3} dx - 3 \int \frac{3}{x+3} dx \\
 &= \int \frac{x^2}{x+3} dx - \int \frac{9}{x+3} dx \\
 &= \int \frac{x^2-9}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} dx \\
 &= \int (x-3) dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \int \frac{x^2}{x-1} dx + \int \frac{1}{1-x} dx \\
 &= \int \frac{x^2}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx \\
 &= \int \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} dx \\
 &= \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) & \int \frac{x^3}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \int \frac{x^3+1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\
 &= \int (x^2-x+1) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) & \int \frac{x^3}{x^2+2x+4} dx - \int \frac{8}{x^2+2x+4} dx \\
 &= \int \frac{x^3-8}{x^2+2x+4} dx = \int \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} dx \\
 &= \int (x-2) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C
 \end{aligned}$$

기초 개념 평가

본문 | 102, 103쪽

- | | |
|-------------------|-----------------|
| 01 부정적분 | 02 적분상수 |
| 03 $n+1, x$ | 04 $+, -$ |
| 05 $g(x)$ | 06 $x, f(x)$ |
| 07 $f'(x), 10x+C$ | 08 $g(x), h(x)$ |
| 09 극댓값 | 10 극솟값 |

기초 문제 평가

본문 | 104, 105쪽

- 1 ① $(x^3-2)'=3x^2$ ② $(x^3)'=3x^2$
 ③ $(x^3-x^2)'=3x^2-2x$ ④ $(x^3+\sqrt{3})'=3x^2$
 ⑤ $(x^3+\pi)'=3x^2$
 따라서 $f(x)$ 의 부정적분으로 옳지 않은 것은 ③이다.

- 2 $\int f(x) dx = 3x^2 - 2x + C$ 에서
 $f(x) = (3x^2 - 2x + C)' = 6x - 2$
 $\therefore f(2) = 12 - 2 = 10$

- 3 $\int x^2 f(x) dx = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + C$ 에서
 $x^2 f(x) = (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + C)' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$
 위 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $4f(2) = 32 - 36 + 8 = 4 \quad \therefore f(2) = 1$

- 4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\}$
 $= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2)$

이때 $f(x) = 3x^2 - x + 1$ 에서 $f(2) = 12 - 2 + 1 = 11$

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{4} \times 11 = \frac{11}{4}$

- 5 부정적분과 미분의 관계에 의하여

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 3x) \right\} dx = x^2 + 3x + C \text{이므로}$$

$$f(x) = x^2 + 3x + C$$

이때 $f(1) = 6$ 이므로 $C = 2$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x + 2$ 이므로 $f(3) = 9 + 9 + 2 = 20$

- 6 부정적분과 미분의 관계에 의하여

$$\frac{d}{dx} \{ \int f(x) dx \} = f(x) \text{이므로}$$

$$5x^2 + ax + 4 = bx^2 - 3x + 4$$

위 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a = -3, b = 5$$

7 $\int h(x)dx = f(x)g(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 이때 $f(x) = 2x+1, g(x) = x^2-1$ 에서
 $f'(x) = 2, g'(x) = 2x$
 $\therefore h(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$
 $= 2 \times 3 + 5 \times 4 = 26$

8 $f(x) = \int (x+1)(x-3)dx = \int (x^2 - 2x - 3)dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$
 이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$
 따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ 이므로
 $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$

9 $f(x) = \int (x^2 + 4x)dx - \int x^2 dx$
 $= \int 4x dx = 2x^2 + C$
 이때 $f(2) = 10$ 이므로 $C = 2$
 따라서 $f(x) = 2x^2 + 2$ 이므로 $f(1) = 2 + 2 = 4$

10 $f(x) = \int \frac{x^3}{x-1} dx + \int \frac{1}{1-x} dx$
 $= \int \frac{x^3}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx$
 $= \int \frac{x^3-1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx$
 $= \int (x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
 이때 $f(0) = -1$ 이므로 $C = -1$
 따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ 이므로
 $f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{5}{6}$

11 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x-3)dx = x^2 - 3x + C$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 8)$ 을 지나므로
 $f(-1) = 8$ 에서 $C = 4$
 즉, $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 이므로 $f(3) = 9 - 9 + 4 = 4$

12 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 2x + 3)dx$
 $= x^3 - x^2 + 3x + C$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 12)$ 를 지나므로
 $f(2) = 12$ 에서 $C = 2$
 $\therefore f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 2$
 또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, a)$ 를 지나므로
 $f(1) = a$ 에서 $1 - 1 + 3 + 2 = a \quad \therefore a = 5$

13 접선의 기울기가 $8x^3 + 2x - 1$ 이므로 $f'(x) = 8x^3 + 2x - 1$
 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (8x^3 + 2x - 1)dx = 2x^4 + x^2 - x + C$
 이때 y 절편이 1이므로 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$
 따라서 $f(x) = 2x^4 + x^2 - x + 1$ 이므로
 $f(-1) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$

14 $F(x) = (x+1)f(x) - 2x^3 - 3x^2$
 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $F'(x) = f(x) + (x+1)f'(x) - 6x^2 - 6x$
 $F'(x) = f(x)$ 에서 $f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) - 6x^2 - 6x$
 $(x+1)f'(x) = 6x(x+1) \quad \therefore f'(x) = 6x$
 $f(x) = \int f'(x)dx = \int 6x dx = 3x^2 + C$
 이때 $f(0) = 5$ 이므로 $C = 5$
 따라서 $f(x) = 3x^2 + 5$ 이므로 $f(-1) = 3 + 5 = 8$

15 $f'(x) = \begin{cases} -1 & (x > 2) \\ 2x & (x < 2) \end{cases}$ 이므로
 $f(x) = \begin{cases} -x + C_1 & (x > 2) \\ x^2 + C_2 & (x < 2) \end{cases}$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0) = 0$ 에서
 $C_2 = 0$
 한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$ 에서
 $-2 + C_1 = 4 + C_2 \quad \therefore C_1 = 6$
 따라서 $f(x) = \begin{cases} -x + 6 & (x \geq 2) \\ x^2 & (x < 2) \end{cases}$ 이므로
 $f(1)f(5) = 1 \times (-5 + 6) = 1$

16 $f'(x) = a(x+1)^2 - 1 = ax^2 + 2ax + a - 1 \quad (a > 0)$
 이라 하면 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로
 $a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$
 $\therefore f'(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값, $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.
 $\therefore f(-2) = 1$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

이때 $f(-2) = 1$ 에서 $C = -\frac{1}{3}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$$

본문 | 106~112쪽

1-1 (1) 2, 3 (2) 3

$$1-2 (1) S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \int_0^4 (-x+1) dx \\ = S_1 - S_2 = -4$$

$$(2) \int_4^0 (-x+1) dx = - \int_0^4 (-x+1) dx = 4$$

$$1-3 (1) \int_{-1}^{-1} 5x dx = 0$$

$$(2) \int_2^2 (x^2 + 2x) dx = 0$$

2-1 (1) $4x^3$ (2) 1

$$2-2 (1) \frac{d}{dx} \int_0^x (-t^3 + 5t^2 - 4) dt = -x^3 + 5x^2 - 4$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_5^x (t+3)(3t^2-2t) dt = (x+3)(3x^2-2x)$$

3-1 (1) 0, 3 (2) $2x, 2$ 3-2 (1) 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\int_2^2 f(t) dt = 8 + 2a - 4$$

$$\text{이때 } \int_2^2 f(t) dt = 0 \text{이므로 } 2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

(2) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_2^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^3 - 2x - 4)$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 2$$

4-1 (1) -32, 32 (2) $x, 2$

$$4-2 (1) \int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \text{이므로}$$

$$\int_0^2 (x^3 + x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ = \left(\frac{1}{4} \times 2^4 + \frac{1}{2} \times 2^2 \right) - 0 = 6$$

$$(2) \int (2t^3 - 3) dt = \frac{1}{2}t^4 - 3t + C \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 (2t^3 - 3) dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - 3t \right]_{-1}^1 \\ = \left(\frac{1}{2} \times 1^4 - 3 \times 1 \right) \\ - \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^4 - 3 \times (-1) \right\} \\ = -6$$

5-1 (1) 1 (2) $-2, x^4$

$$5-2 (1) \int_2^{-2} (3x^2 - 8) dx$$

$$= - \int_{-2}^2 (3x^2 - 8) dx$$

$$= - \left[x^3 - 8x \right]_{-2}^2$$

$$= - \{ (8 - 16) - (-8 + 16) \} = 16$$

$$(2) \int_0^{-1} (x^3 + x^2) dx$$

$$= - \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$= - \left\{ 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right\} = -\frac{1}{12}$$

6-1 $x, 3$

$$6-2 (1) \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx$$

$$= \int_0^2 x^3 dx - 3 \int_0^2 x^2 dx + 2 \int_0^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + 2 \left[x \right]_0^2$$

$$= (4 - 0) - 3 \left(\frac{8}{3} - 0 \right) + 2(2 - 0)$$

$$= 4 - 8 + 4 = 0$$

$$\text{다른 풀이 } \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x \right]_0^2$$

$$= (4 - 8 + 4) - 0 = 0$$

$$(2) \int_1^2 (x+1)^2 dx - \int_1^2 (x-1)^2 dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) dx - \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \int_1^2 \{ (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) \} dx$$

$$= \int_1^2 4x dx = 4 \int_1^2 x dx$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = 4 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 6$$

7-1 2, 8

$$7-2 (1) \int_{-1}^1 (4x^3 - 3x^2 + x) dx + \int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + x) dx$$

$$= \int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + x) dx$$

$$= \left[x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^3$$

$$= \left(81 - 27 + \frac{9}{2} \right) - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 56$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \int_0^1 (4x^3+5x-6)dx - \int_2^1 (4x^3+5x-6)dx \\
 &= \int_0^1 (4x^3+5x-6)dx + \int_1^2 (4x^3+5x-6)dx \\
 &= \int_0^2 (4x^3+5x-6)dx \\
 &= \left[x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 6x \right]_0^2 \\
 &= (16+10-12) - 0 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

8-1 x^2, x^3

8-2 (1) $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x) = 2x+1$

$1 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 4x^3-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^1 (2x+1)dx + \int_1^2 (4x^3-1)dx \\
 &= \left[x^2+x \right]_{-1}^1 + \left[x^4-x \right]_1^2 \\
 &= (2-0) + (14-0) = 16
 \end{aligned}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x) = 2x+1$

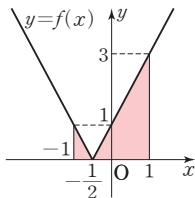
$1 \leq x \leq 3$ 일 때, $f(x) = 4x^3-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^1 (2x+1)dx + \int_1^3 (4x^3-1)dx \\
 &= \left[x^2+x \right]_0^1 + \left[x^4-x \right]_1^3 \\
 &= (2-0) + (78-0) = 80
 \end{aligned}$$

9-1 1, x

9-2 (1) $f(x) = |2x+1|$ 이라 하면

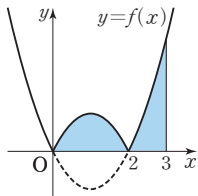
$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & (x \leq -\frac{1}{2}) \\ 2x+1 & (x \geq -\frac{1}{2}) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 |2x+1|dx \\
 &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2x-1)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x+1)dx \\
 &= \left[-x^2-x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[x^2+x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \left(\frac{1}{4}-0 \right) + \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right\} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = |x^2-2x|$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2x & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2-2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 |x^2-2x|dx \\
 &= \int_0^2 (-x^2+2x)dx + \int_2^3 (x^2-2x)dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2 \right]_2^3 \\
 &= \left(\frac{4}{3}-0 \right) + \left\{ 0 - \left(-\frac{4}{3} \right) \right\} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

10-1 $2k, -2$

10-2 (1) $\int_0^1 f(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉠

라 하면

$$f(x) = x^2 - 2x - k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 - 2t - k)dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - kt \right]_0^1 = -k - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } k = -k - \frac{2}{3} \text{ 이므로 } k = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

(2) $\int_{-2}^2 f(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉡

라 하면

$$f(x) = 3 + 7kx$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_{-2}^2 f(t)dt = \int_{-2}^2 (3 + 7kt)dt \\
 &= \left[3t + \frac{7k}{2}t^2 \right]_{-2}^2 = 12
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 3 + 84x$$

11-1 $t^4, 4$

11-2 (1) $\int_0^1 f'(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉢

라 하면

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + k \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 4$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 (t^2 + 2t - 4)dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 4t \right]_0^1 = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x - \frac{8}{3}$$

(2) $\int_0^2 tf'(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉣

라 하면

$$f(x) = x^3 - x + k \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

이것을 ㉣에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^2 tf'(t)dt = \int_0^2 t(3t^2 - 1)dt \\
 &= \int_0^2 (3t^3 - t)dt \\
 &= \left[\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 10
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = x^3 - x + 10$$

12-1 $F(x)$, 1

12-2 (1) $f(t) = 2t^3 - t^2 + 1$ 이라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} [F(t)]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = f(1) = 2\end{aligned}$$

(2) $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} [F(t)]_3^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \\ &= F'(3) = f(3) = 5\end{aligned}$$

13-1 -1, -1

13-2 (1) $f(x) = x^3 + x$ 라 하고, 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x)]_2^{2+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \\ &= F'(2) = f(2) = 10\end{aligned}$$

(2) $f(t) = t^2 - 3t$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1+h}^1 f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(t)]_{1+h}^1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1) - F(1+h)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} \\ &= -F'(1) = -f(1) = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \quad (1) \quad & 3 \int_1^2 (x^2 + x - 1) dx + \int_1^2 (-3x^2 + x + 1) dx \\ &= \int_1^2 \{3(x^2 + x - 1) + (-3x^2 + x + 1)\} dx \\ &= \int_1^2 (4x - 2) dx = \left[2x^2 - 2x \right]_1^2 = 4 - 0 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \int_3^5 (x+2)^2 dx - \int_3^5 (x-2)^2 dx \\ &= \int_3^5 (x^2 + 4x + 4) dx - \int_3^5 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \int_3^5 \{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)\} dx \\ &= \int_3^5 8x dx = \left[4x^2 \right]_3^5 = 100 - 36 = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & \int_2^3 \frac{x^2 - 2}{x+1} dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_2^3 \frac{x^2 - 2}{x+1} dx + \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_2^3 \left(\frac{x^2 - 2}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int_2^3 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx \\ &= \int_2^3 (x-1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_2^3 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad (1) \quad & \int_{-1}^1 (2x+1) dx + \int_1^2 (2x+1) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x+1) dx = \left[x^2 + x \right]_{-1}^2 = 6 - 0 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \int_{-1}^4 (x^3 + x) dx + \int_4^3 (x^3 + x) dx \\ &= \int_{-1}^3 (x^3 + x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^3 = \frac{99}{4} - \frac{3}{4} = 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & \int_{-1}^{-5} (4x^3 - 2x + 1) dx + \int_{-5}^1 (4x^3 - 2x + 1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + 1) dx = \left[x^4 - x^2 + x \right]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad (1) \quad & \int_{-1}^3 (10x-3) dx - \int_2^3 (10x-3) dx \\ &= \int_{-1}^3 (10x-3) dx + \int_3^2 (10x-3) dx \\ &= \int_{-1}^2 (10x-3) dx = \left[5x^2 - 3x \right]_{-1}^2 = 14 - 8 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \int_{-1}^0 (2x^3 - 4) dx - \int_1^0 (2t^3 - 4) dt \\ &= \int_{-1}^0 (2x^3 - 4) dx + \int_0^1 (2t^3 - 4) dt \\ &= \int_{-1}^0 (2x^3 - 4) dx + \int_0^1 (2x^3 - 4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^3 - 4) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x \right]_{-1}^1 = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -8\end{aligned}$$

집중 연습

본문 | 113쪽

$$1 \quad (1) \quad \int_{-1}^2 (6x+5) dx = \left[3x^2 + 5x \right]_{-1}^2 = 22 - (-2) = 24$$

$$(2) \quad \int_1^{-1} (-3x^2 + 4x) dx = \left[-x^3 + 2x^2 \right]_1^{-1} = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & \int_0^1 x^2(x-1) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{12} - 0 = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_{-2}^{-4} (4x^3+2x+6)dx - \int_2^{-4} (4x^3+2x+6)dx \\
 = \int_{-2}^{-4} (4x^3+2x+6)dx + \int_{-4}^2 (4x^3+2x+6)dx \\
 = \int_{-2}^2 (4x^3+2x+6)dx = \left[x^4 + x^2 + 6x \right]_{-2}^2 = 32 - 8 = 24
 \end{aligned}$$

기초 개념 평가

본문 | 114, 115쪽

- | | |
|----------------------------|------------------|
| 01 $S_1 - S_2$ | 02 $f(x)$ |
| 03 $F(b) - F(a)$ | 04 $F(b) - F(a)$ |
| 05 $+, -$ | 06 b |
| 07 $\int_c^b h(x)dx$ | 08 0 |
| 09 $\int_a^b f(t)dt, g(x)$ | 10 $f(a)$ |
| 11 a | |

기초 문제 평가

본문 | 116, 117쪽

1 $\int_1^1 (x^2+x+1)dx + \int_{-1}^{-1} (t^2+2t)dt = 0+0=0$

$$\begin{aligned}
 2 \quad f(x) &= \int_{-3}^x (3t^2+1)dt - \int_{-3}^x (t^2+2t)dt \\
 &= \int_{-3}^x \{(3t^2+1)-(t^2+2t)\}dt \\
 &= \int_{-3}^x (2t^2-2t+1)dt
 \end{aligned}$$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x^2 - 2x + 1 \\
 \therefore f'(3) &= 18 - 6 + 1 = 13
 \end{aligned}$$

3 $\int_1^x f(t)dt = x^3 + x^2 + x + a$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 + 1 + 1 + a$$

$$0 = 3 + a \quad \therefore a = -3$$

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 + x^2 + x - 3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore f(a) = f(-3) = 27 - 6 + 1 = 22$$

4 $xf(x) = x^3 + x^2 + \int_2^x f(t)dt$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2f(2) = 8 + 4 + \int_2^2 f(t)dt$$

$$2f(2) = 12 \quad \therefore f(2) = 6$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 3x^2 + 2x + f(x)$$

$$xf'(x) = 3x^2 + 2x \quad \therefore f'(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \int (3x+2)dx = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

$$f(2) = 6 \text{이므로 } C = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{3}{2} + 2 - 4 = -\frac{1}{2}$$

5 주어진 등식에서

$$x \int_{-1}^x f(t)dt - \int_{-1}^x tf(t)dt = x^3 + ax - 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$- \int_{-1}^{-1} f(t)dt - \int_{-1}^{-1} tf(t)dt = -1 - a - 2$$

$$0 = -3 - a \quad \therefore a = -3$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 + a$$

$$\int_{-1}^x f(t)dt = 3x^2 - 3$$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x$$

$$\therefore a + f(2) = -3 + 12 = 9$$

6 $\int_0^1 f(x)dx = \left[F(x) \right]_0^1 = F(1) - F(0)$

그래프에서 $F(1)=2, F(0)=0$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = 2 - 0 = 2$$

7 $\int_0^2 (2x^3 - ax + 2)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + 2x \right]_0^2$
 $= 8 - 2a + 4 = 12 - 2a$

$$\text{즉, } 12 - 2a = 7 \text{이므로 } a = \frac{5}{2}$$

8 $\int_0^1 (3a^2x^2 + 8ax - 1)dx = \left[a^2x^3 + 4ax^2 - x \right]_0^1$

$$= a^2 + 4a - 1$$

$$= (a+2)^2 - 5$$

따라서 최소가 되도록 하는 실수 a 의 값은 -2 이다.

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \int_5^2 (x^3+2x+3)dx - \int_5^{-2} (t^3+2t+3)dt \\
 &= \int_5^2 (x^3+2x+3)dx - \int_5^{-2} (x^3+2x+3)dx \\
 &= \int_5^2 (x^3+2x+3)dx + \int_{-2}^5 (x^3+2x+3)dx \\
 &= \int_{-2}^2 (x^3+2x+3)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x \right]_{-2}^2 \\
 &= 14 - 2 = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad & \int_2^4 f(x)dx \\
 &= \int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx \\
 &= \int_1^4 f(x)dx - \left\{ \int_1^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx \right\} \\
 &= 12 - (6 - 4) = 10
 \end{aligned}$$

11 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$8 - a = 4 - 12 + 10 \quad \therefore a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 10 & (x \leq 2) \\ 4x - 6 & (x > 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 f(x)dx \\
 &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\
 &= \int_1^2 (x^2 - 6x + 10)dx + \int_2^3 (4x - 6)dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x \right]_1^2 + \left[2x^2 - 6x \right]_2^3 \\
 &= \left(\frac{32}{3} - \frac{22}{3} \right) + \{0 - (-4)\} = \frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad & \int_{-3}^3 (a - |x|)dx \\
 &= \int_{-3}^0 (a + x)dx + \int_0^3 (a - x)dx \\
 &= \left[ax + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + \left[ax - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 \\
 &= \left\{ 0 - \left(-3a + \frac{9}{2} \right) \right\} + \left\{ \left(3a - \frac{9}{2} \right) - 0 \right\} \\
 &= 6a - 9 \\
 &\text{즉, } 6a - 9 = 21 \text{이므로 } a = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \int_0^1 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & \text{라 하면} \\
 & f(x) = x^2 + 2x - 3k \\
 & \text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + 2t - 3k)dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3kt \right]_0^1 = \frac{4}{3} - 3k \\
 \text{즉, } k &= \frac{4}{3} - 3k \text{이므로 } k = \frac{1}{3} \\
 \text{따라서 } f(x) &= x^2 + 2x - 1 \text{이므로} \\
 f(-2) &= 4 - 4 - 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$14 \quad \int_{-1}^1 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{라 하면} \\
 & f(x) = 3x^2 + (2x+1)k = 3x^2 + 2kx + k \\
 & \text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 & k = \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 (3t^2 + 2kt + k)dt \\
 &= \left[t^3 + kt^2 + kt \right]_{-1}^1 = 2k + 2 \\
 \text{즉, } k &= 2k + 2 \text{이므로 } k = -2 \\
 \text{따라서 } f(x) &= 3x^2 - 4x - 2 \text{이므로} \\
 f(3) &= 27 - 12 - 2 = 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & f(x) = \int_0^x (6t^2 - 2t - 3)dt = \left[2t^3 - t^2 - 3t \right]_0^x \\
 &= 2x^3 - x^2 - 3x \\
 & \text{함수 } f(t) \text{의 한 부정적분을 } F(t) \text{라 하면} \\
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\
 &= F'(1) = f(1) = -2
 \end{aligned}$$

$$16 \quad \int_0^2 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{라 하면} \\
 & f(x) = 3x^2 - 2x + k \\
 & \text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 & k = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (3t^2 - 2t + k)dt \\
 &= \left[t^3 - t^2 + kt \right]_0^2 = 2k + 4 \\
 \text{즉, } k &= 2k + 4 \text{이므로 } k = -4 \\
 \therefore f(x) &= 3x^2 - 2x - 4 \\
 \text{함수 } f(t) \text{의 한 부정적분을 } F(t) \text{라 하면} \\
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_2^{2+x} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[F(t) \right]_2^{2+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2+x) - F(2)}{x} \\
 &= F'(2) = f(2) = 4
 \end{aligned}$$

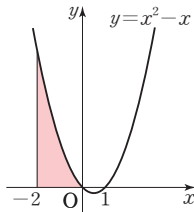
본문 | 118~121쪽

1-1 2, 7

1-2 (1) 닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 $x^2 - x \geq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

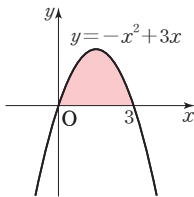
$$S = \int_{-2}^0 (x^2 - x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{14}{3}$$

(2) 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=0$ 또는 $x=3$ 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $-x^2 + 3x \geq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

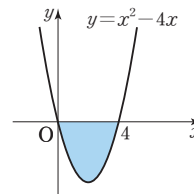
$$S = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

2-1 $\leq, 2x, 3$ 2-2 (1) 곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=0$ 또는 $x=4$ 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 $x^2 - 4x \leq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

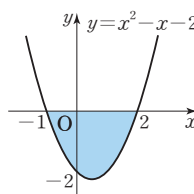
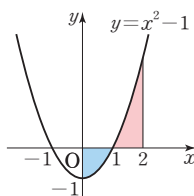
$$S = \int_0^4 |x^2 - 4x| dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

(2) 곡선 $y = x^2 - x - 2$ 와 x 축의 교점점의 x 좌표는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 $x^2 - x - 2 \leq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

3-1 $\leq, \geq, 2$ 3-2 (1) 곡선 $y = x^2 - 1$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x^2 - 1 \leq 0$ 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 |x^2 - 1| dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

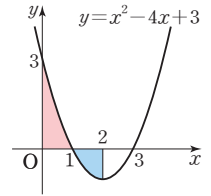
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 = 2$$

(2) 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=1$ 또는 $x=3$ 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 |x^2 - 4x + 3| dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

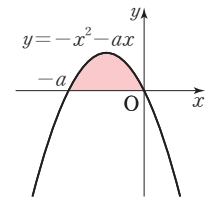
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^2 = 2$$

4-1 $\leq, 8, 2$ 4-2 (1) 곡선 $y = -x^2 - ax$ 와 x 축의 교점점의 x 좌표는 $x=-a$ 또는 $x=0$ 닫힌구간 $[-a, 0]$ 에서 $-x^2 - ax \geq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-a}^0 |-x^2 - ax| dx$$

$$= \int_{-a}^0 (-x^2 - ax) dx$$

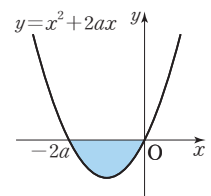
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-a}^0 = \frac{a^3}{6}$$

이때 넓이가 $\frac{9}{2}$ 이므로 $\frac{a^3}{6} = \frac{9}{2}, a^3 = 27$ $\therefore a=3$ ($\because a$ 는 실수)(2) 곡선 $y = x^2 + 2ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=-2a$ 또는 $x=0$ 닫힌구간 $[-2a, 0]$ 에서 $x^2 + 2ax \leq 0$ 따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-2a}^0 |x^2 + 2ax| dx$$

$$= \int_{-2a}^0 (-x^2 - 2ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - ax^2 \right]_{-2a}^0 = \frac{4}{3}a^3$$

이때 넓이가 $\frac{4}{3}$ 이므로 $\frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}, a^3 = 1$ $\therefore a=1$ ($\because a$ 는 실수)

5-1 1, 1

5-2 (1) 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 6x + 4$$

에서

$$2x^2 - 10x = 0$$

$$2x(x-5) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=5$$

닫힌구간 $[0, 5]$ 에서

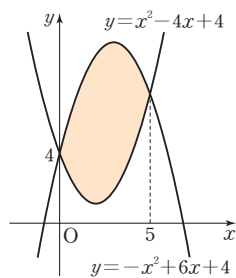
$$x^2 - 4x + 4 \leq -x^2 + 6x + 4$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_0^5 \{(-x^2 + 6x + 4) - (x^2 - 4x + 4)\} dx$$

$$= \int_0^5 (-2x^2 + 10x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 \right]_0^5 = \frac{125}{3}$$



(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 3x + 10$$

에서

$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$2(x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서

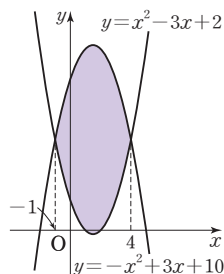
$$x^2 - 3x + 2 \leq -x^2 + 3x + 10$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^4 \{(-x^2 + 3x + 10) - (x^2 - 3x + 2)\} dx$$

$$= \int_{-1}^4 (-2x^2 + 6x + 8) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^4 = \frac{125}{3}$$



6-1 -3, ≥, 9

6-2 (1) 곡선과 직선의 교점의 x 좌

표는

$$x^2 - 2x - 3 = x - 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[1, 2]$ 에서

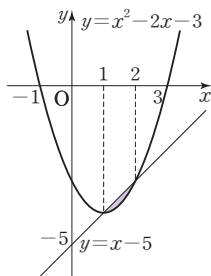
$$x^2 - 2x - 3 \leq x - 5$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_1^2 \{(x-5) - (x^2 - 2x - 3)\} dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 = \frac{1}{6}$$



(2) 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2 = -x \text{에서}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서

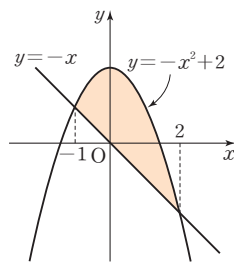
$$-x^2 + 2 \geq -x$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2) - (-x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$



7-1 (1) 2, 3 (2) $2t, -3$

7-2 (1) $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 $x_0=4$ 이므로 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$4 + \int_0^3 (4-2t) dt = 4 + \left[4t - t^2 \right]_0^3 = 7$$

$$(2) \int_1^3 (4-2t) dt = \left[4t - t^2 \right]_1^3 = 0$$

8-1 $\geq, \leq, 3$

8-2 $v(t) = 2t^2 - 4t = 2t(t-2)$

$$1 \leq t \leq 2 \text{일 때, } v(t) \leq 0$$

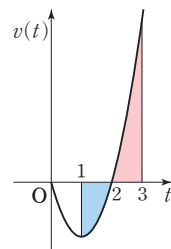
$$2 \leq t \leq 3 \text{일 때, } v(t) \geq 0$$

이므로 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가

움직인 거리는

$$\int_1^2 (-2t^2 + 4t) dt + \int_2^3 (2t^2 - 4t) dt$$

$$= \left[-\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 \right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 \right]_2^3 = 4$$



집중 연습

본문 | 122쪽

1 (1) 곡선 $y = 3 - 3x^2$ 과 x 축의 교점의

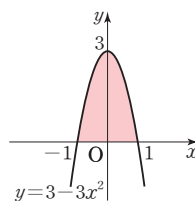
x 좌표는 $x = -1$ 또는 $x = 1$

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $3 - 3x^2 \geq 0$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx$$

$$= \left[3x - x^3 \right]_{-1}^1 = 4$$

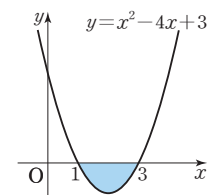


(2) 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 과 x 축의 교점

의 x 좌표는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

닫힌구간 $[1, 3]$ 에서

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

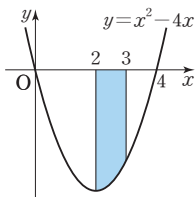
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

- (3) 닫힌구간 [2, 3]에서 $x^2 - 4x < 0$
따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_2^3 |x^2 - 4x| dx$$

$$= \int_2^3 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_2^3 = \frac{11}{3}$$

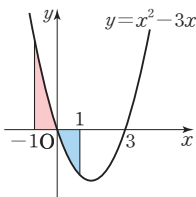


- (4) 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=0$ 또는 $x=3$
닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x^2 - 3x \geq 0$
닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x^2 - 3x \leq 0$
따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_{-1}^1 |x^2 - 3x| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = 3$$



- 2 (1) 곡선 $y = 3x^2 - 7x + 6$ 과 직선

$y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$3x^2 - 7x + 6 = 2x \text{에서}$$

$$3x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$3(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 [1, 2]에서

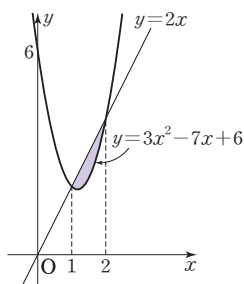
$$3x^2 - 7x + 6 \leq 2x$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_1^2 \{2x - (3x^2 - 7x + 6)\} dx$$

$$= \int_1^2 (-3x^2 + 9x - 6) dx$$

$$= \left[-x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$



- (2) 곡선 $y = -x^2 - 2x$ 와 직선

$y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 - 2x = x \text{에서}$$

$$x^2 + 3x = 0, x(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

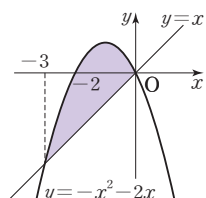
닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서

$$-x^2 - 2x \geq x$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_{-3}^0 \{(-x^2 - 2x) - x\} dx = \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 = \frac{9}{2}$$



- (3) 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 과 직선

$y = x - 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \text{에서}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

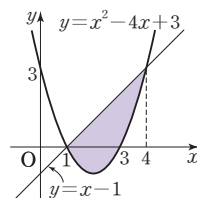
닫힌구간 [1, 4]에서 $x^2 - 4x + 3 \leq x - 1$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_1^4 \{(x-1) - (x^2 - 4x + 3)\} dx$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 = \frac{9}{2}$$



- (4) 두 곡선 $y = x^2 - 1$,

$y = -x^2 + 2x + 3$ 의 교점의

x 좌표를 구하면

$$x^2 - 1 = -x^2 + 2x + 3 \text{에서}$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$2(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서

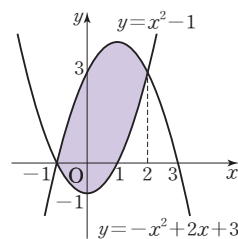
$$x^2 - 1 \leq -x^2 + 2x + 3$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 9$$



기초 개념 평가

본문 | 123쪽

01 $|f(x)|$

02 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

03 t

04 $v(t)$

05 $|v(t)|$

기초 문제 평가

본문 | 124, 125쪽

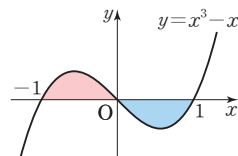
- 1 곡선 $y = x(x+1)(x-1)$ 과

x 축의 교점의 x 좌표는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x^3 - x \geq 0$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x^3 - x \leq 0$



따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2 곡선 $y = x^2 - x - 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

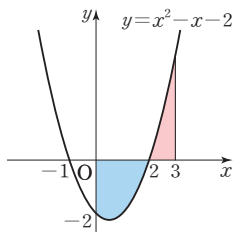
닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $x^2 - x - 2 \leq 0$

닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $x^2 - x - 2 \geq 0$

따라서 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^3 = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore 12S = 12 \times \frac{31}{6} = 62$$



3 닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 $x^3 \leq 0$

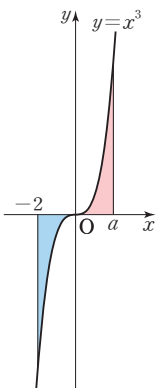
닫힌구간 $[0, a]$ 에서 $x^3 \geq 0$

따라서 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^a |x^3| dx = \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^a x^3 dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 + 4 \end{aligned}$$

이때 도형의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{4}a^4 + 4 = 8, a^4 = 16 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$



4 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1 \text{ 에서}$$

$$2x^2 - 6x = 0, 2x(x - 3) = 0$$

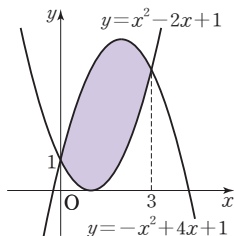
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 \leq -x^2 + 4x + 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 9 \end{aligned}$$



5 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - x + 4 = x^2 + x + 4 \text{ 에서}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서

$$x^3 - x + 4 \geq x^2 + x + 4$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

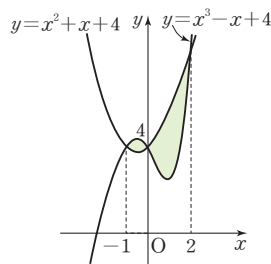
$$x^3 - x + 4 \leq x^2 + x + 4$$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x^3 - x + 4) - (x^2 + x + 4)\} dx \\ &\quad + \int_0^2 \{(x^2 + x + 4) - (x^3 - x + 4)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

따라서 $a = 12, b = 37$ 이므로

$$b - a = 37 - 12 = 25$$



6 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x = ax \text{ 에서}$$

$$x^2 - (a+2)x = 0$$

$$x(x - a - 2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a + 2$$

닫힌구간 $[0, a+2]$ 에서

$$x^2 - 2x \leq ax$$

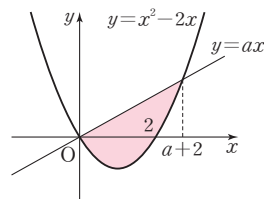
따라서 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a+2} \{ax - (x^2 - 2x)\} dx \\ &= \int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+2}{2}x^2 \right]_0^{a+2} = \frac{1}{6}(a+2)^3 \end{aligned}$$

이때 넓이가 36이므로

$$\frac{1}{6}(a+2)^3 = 36, (a+2)^3 = 216$$

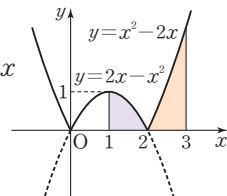
$$a+2 = 6 \quad (\because a \text{는 실수}) \quad \therefore a = 4$$



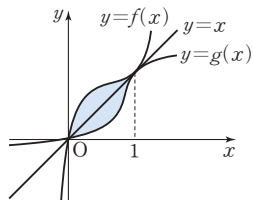
$$7 \quad x|2-x| = \begin{cases} 2x-x^2 & (x \leq 2) \\ x^2-2x & (x \geq 2) \end{cases}$$

이므로 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (2x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$



- 8 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=x^3-2x^2+2x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-2x^2+2x=x$ 에서 $x^3-2x^2+x=0$
 $x(x-1)^2=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \{(x^3-2x^2+2x)-x\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^3-2x^2+x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

참고 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 역함수를 구하기보다 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 구한다.

함수 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표가 $x=a, x=b$ 일 때

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)-g(x)| dx \\ &= 2 \int_a^b |f(x)-x| dx \end{aligned}$$

- 9 $f(x)=x^3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$ 이므로

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의

접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$$

곡선 $y=x^3$ 과 직선 $y=3x-2$ 의

교점의 x 좌표는

$$x^3=3x-2$$

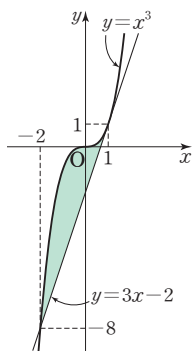
$$x^3-3x+2=0, (x-1)^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

달한구간 $[-2, 1]$ 에서 $x^3 \geq 3x-2$

따라서 구하는 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{x^3-(3x-2)\} dx = \int_{-2}^1 (x^3-3x+2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$



- 10 $v(t)=30-10t$ 이므로 3초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^3 (30-10t) dt \\ &= \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 = 45 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- 11 정지할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=20-2t=0 \text{에서 } t=10$$

정지할 때까지 열차가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{10} |v(t)| dt &= \int_0^{10} |20-2t| dt \\ &= \int_0^{10} (20-2t) dt \\ &= \left[20t - t^2 \right]_0^{10} = 100 \text{ (m)} \end{aligned}$$

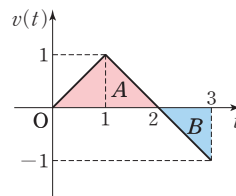
- 12 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^a (-3t^2+6t) dt &= \left[-t^3+3t^2 \right]_0^a = -a^3+3a^2 \\ -a^3+3a^2 &= 0 \text{에서 } a^2(a-3)=0 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각은 3이다.

- 13 오른쪽 그림과 같이 $0 \leq t \leq 3$ 에

서 t 축 위부분의 넓이를 A, 아랫부분의 넓이를 B라 하면 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는



$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 \{-v(t)\} dt \\ &= A+B \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- 14 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각

$x_P(t), x_Q(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_P(t) &= 0 + \int_0^t (2t^2-4t+6) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3-2t^2+6t \right]_0^t = \frac{2}{3}t^3-2t^2+6t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_Q(t) &= 0 + \int_0^t (-t^2+2t+10) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+10t \right]_0^t = -\frac{1}{3}t^3+t^2+10t \end{aligned}$$

$x_P(t)=x_Q(t)$ 에서

$$\frac{2}{3}t^3-2t^2+6t = -\frac{1}{3}t^3+t^2+10t$$

$$t^3-3t^2-4t=0, t(t+1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because t>0)$$

두 점 P, Q가 다시 만나게 되는 시각은 $t=4$ 일 때이므로

$t=4$ 일 때 점 P의 위치는

$$x_P(4) = \frac{128}{3} - 32 + 24 = \frac{104}{3}$$

Handwriting practice lines consisting of 20 sets of horizontal dotted lines on a white background.

Handwriting practice lines consisting of 20 sets of horizontal dotted lines on a white background.

Handwriting practice lines consisting of 20 sets of three horizontal dotted lines (top, middle, and bottom) for letter height guidance.