: 개념 해결의 법칙

정답과 해설

Ⅰ 지수함수와 로그함수

1 | 지수 002
2 | 로그 011
3 | 지수함수 022
4 | 로그함수 035

Ⅱ 삼각함수

5 | 삼각함수 050
6 | 삼각함수의 그래프 062
7 | 사인법칙과 코사인법칙 079

Ⅲ 수열

8 | 등차수열과 등비수열 089
9 | 수열의 합 107
10 | 수학적 귀납법 117

1 지수

1 거듭제곱과 거듭제곱근

개념 확인 8~10쪽

1 (1) a^{20} (2) $27a^{15}b^3$ (3) a^4b (4) $\frac{1}{a^3}$

2 (1) -4, $2+2\sqrt{3}i$, $2-2\sqrt{3}i$ (2) 3, -3, $3i$, $-3i$

3 (1) -5 (2) 4, -4

4 (1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 2 (5) $\sqrt{3}$

1 (1) $a^8\times(a^3)^4=a^8\times a^{12}=a^{20}$

(2) $(3a^5b)^3=3^3a^{15}b^3=27a^{15}b^3$

(3) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3\div\left(\frac{a}{b^2}\right)^2=\frac{a^6}{b^3}\div\frac{a^2}{b^4}$

$=\frac{a^6}{b^3}\times\frac{b^4}{a^2}=a^4b$

(4) $a^{10}\div a^5\div a^8=a^5\div a^8=\frac{1}{a^3}$

2 (1) -64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-64$이므로

$x^3+64=0$, $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 -64의 세제곱근은 -4, $2+2\sqrt{3}i$, $2-2\sqrt{3}i$이다.

(2) 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근은 3, -3, $3i$, $-3i$이다.

3 (1) -125의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-125$이므로

$x^3+125=0$, $(x+5)(x^2-5x+25)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -125의 세제곱근 중 실수인 것은 -5이다.

(2) 256의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=256$이므로

$x^4-256=0$, $(x+4)(x-4)(x^2+16)=0$

$\therefore x=\pm4$ 또는 $x=\pm4i$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 4, -4이다.

4 (1) $\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\times2}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $(\sqrt[4]{25})^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times2]{64}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(5) $\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[2\times6]{3^{1\times6}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$

개념 드릴 11쪽

1 (1) a^{14} (2) $\frac{1}{a^2}$ (3) $-27a^{11}$ (4) a^5b^6 (5) $-a^4b^{11}$

2 (1) $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$ (2) 3 (3) -2 (4) 5, -5

3 (1) 0.3 (2) -5 (3) $\frac{2}{3}$ (4) 2

4 (1) 6 (2) 4 (3) 25 (4) $\sqrt{7}$ (5) $\sqrt{2}$

1 (1) $(a^3)^2\times(a^2)^4=a^6\times a^8=a^{14}$

(2) $a^{11}\div a^8\div a^5=a^3\div a^5=\frac{1}{a^2}$

(3) $(-3a^3b^2)^3\times\left(\frac{a}{b^3}\right)^2=-27a^9b^6\times\frac{a^2}{b^6}=-27a^{11}$

(4) $(a^2b^3)^4\div(ab^2)^3=a^8b^{12}\div a^3b^6=a^8b^{12}\times\frac{1}{a^3b^6}=a^5b^6$

(5) $(-a^2b)^3\div\left(\frac{a}{b^2}\right)^3\times ab^2=-a^6b^3\div\frac{a^3}{b^6}\times ab^2$

$=-a^6b^3\times\frac{b^6}{a^3}\times ab^2$

$=-a^4b^{11}$

2 (1) 10의 제곱근을 x라 하면 $x^2=10$이므로

$x^2-10=0$, $(x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{10}$

따라서 10의 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$이다.

(2) 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다.

(3) -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

(4) 625의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=625$이므로

$x^4-625=0$, $(x+5)(x-5)(x^2+25)=0$

$\therefore x=\pm5$ 또는 $x=\pm5i$

따라서 625의 네제곱근 중 실수인 것은 5, -5이다.

3 (1) $\sqrt[3]{0.027}=\sqrt[3]{(0.3)^3}=0.3$

(2) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

(3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{2}{3}$

(4) $-\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{(-2)^5}=-(-2)=2$

4 (1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{4\times54}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(2) $\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{512}{2}}=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

(3) $(\sqrt[3]{5})^6=\sqrt[3]{5^6}=\sqrt[3]{(5^2)^3}=5^2=25$

(4) $\sqrt[10]{7^5}=\sqrt[2\times5]{7^{1\times5}}=\sqrt[2]{7^1}=\sqrt{7}$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[3\times2]{8}=\sqrt[2\times3]{2^{1\times3}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2}$

필수 예제 01 거듭제곱근 12쪽

01-1 ④

|전략| 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수일 때는 1개이고, n이 짝수일 때는 a의 값에 따라 다르다.

① 64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=64$이므로
$x^3-64=0$, $(x-4)(x^2+4x+16)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$
즉, 64의 세제곱근은 3개이다.

② -27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로
$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
즉, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3의 1개이다.

③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{8}$, $-\sqrt[4]{8}$이다.

④ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$의 1개이다.

⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

01-2 14

|전략| A의 n제곱근은 $x^n=A$를 만족시키는 x의 값이다.

$\sqrt{256}=16$의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$
$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$
이때 음수인 것은 -2이므로 $a=-2$
-343의 세제곱근을 y라 하면 $y^3=-343$이므로
$y^3+343=0$, $(y+7)(y^2-7y+49)=0$
$\therefore y=-7$ 또는 $y=\dfrac{7\pm7\sqrt{3}i}{2}$
이때 실수인 것은 -7이므로 $b=-7$
$\therefore ab=-2\times(-7)=14$

필수 예제 02 거듭제곱근의 계산 13쪽

02-1 (1) 7 (2) 2 (3) $\sqrt[24]{a}$ (4) b

|전략| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{4}\times\sqrt[4]{64}=\sqrt[3]{3\times9}+\sqrt[4]{4\times64}$
$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[4]{4^4}=3+4=7$

(2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}\times\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[15]{2^5}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$
$=\sqrt[3]{2\times2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}$
$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}$
$=\dfrac{\sqrt[24]{a^4}}{\sqrt[24]{a^3}}=\sqrt[24]{a}$

(4) $\sqrt[6]{ab^4}\times\sqrt{ab^4}\div\sqrt[3]{a^2b^5}=\sqrt[6]{ab^4}\times\sqrt[6]{a^3b^{12}}\div\sqrt[6]{a^4b^{10}}$
$=\sqrt[6]{\dfrac{ab^4\times a^3b^{12}}{a^4b^{10}}}=\sqrt[6]{b^6}=b$

02-2 (1) 6 (2) 1

|전략| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})-\sqrt[5]{(-5)^5}$
$=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times2}+\sqrt[3]{2^2})-\sqrt[5]{(-5)^5}$
$=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2\}-\sqrt[5]{(-5)^5}$
$=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3-(-5)$
$=3-2+5=6$

(2) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\div\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}}}\div\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$
$=\dfrac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[10]{x}}\times\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[15]{x}}\times\dfrac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[6]{x}}=1$

02-3 8

|전략| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$\sqrt[k]{9}\times\sqrt[4]{243}\div\sqrt[3]{81}=\sqrt[6]{3}$에서
$\sqrt[k]{3^2}=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[3]{81}\div\sqrt[4]{243}$
$=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[3]{3^4}\div\sqrt[4]{3^5}$
$=\sqrt[12]{3^2}\times\sqrt[12]{3^{16}}\div\sqrt[12]{3^{15}}$
$=\sqrt[12]{\dfrac{3^2\times3^{16}}{3^{15}}}=\sqrt[12]{3^3}$
따라서 $\sqrt[k]{3^2}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[8]{3^2}$이므로 $k=8$

필수 예제 03 거듭제곱근의 대소 비교 14쪽

03-1 $\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[4]{5}$

|전략| $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때 $a<b$이면 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$임을 이용하여 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로
$\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$
$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$
$\sqrt[6]{10}=\sqrt[12]{10^2}=\sqrt[12]{100}$
이때 $16<100<125$이므로 $\sqrt[12]{16}<\sqrt[12]{100}<\sqrt[12]{125}$
$\therefore \sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[4]{5}$

03-2 $B<A<C$

|전략| $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때 $a<b$이면 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$임을 이용하여 대소를 비교한다.

$A=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$, $B=\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{6}}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}$, $C=\sqrt{\sqrt[6]{\dfrac{1}{56}}}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{56}}$
3, 4, 12의 최소공배수가 12이므로
$A=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{81}}$
$B=\sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{1}{6}\right)^3}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{216}}$
$C=\sqrt[12]{\dfrac{1}{56}}$
이때 $\dfrac{1}{216}<\dfrac{1}{81}<\dfrac{1}{56}$이므로 $\sqrt[12]{\dfrac{1}{216}}<\sqrt[12]{\dfrac{1}{81}}<\sqrt[12]{\dfrac{1}{56}}$
$\therefore B<A<C$

03-3 답 12

|전략| $a>0, b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때 $a<b$이면 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$임을 이용하여 대소를 비교한다.

$\sqrt[12]{7\sqrt{2}}=\sqrt[12]{\sqrt{7^2\times 2}}=\sqrt[24]{98}$, $\sqrt{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[8]{5}$, $\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[12]{12}$

24, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$\sqrt[24]{98}$

$\sqrt[8]{5}=\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{125}$

$\sqrt[12]{12}=\sqrt[24]{12^2}=\sqrt[24]{144}$

이때 $98<125<144$이므로 $\sqrt[24]{98}<\sqrt[24]{125}<\sqrt[24]{144}$

$\therefore \sqrt[12]{7\sqrt{2}}<\sqrt{\sqrt[4]{5}}<\sqrt{\sqrt[3]{12}}$

따라서 $a=\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[12]{12}$이므로

$a^{12}=12$

2 지수의 확장

개념 확인 15~17쪽

1 (1) a^3 (2) $\frac{1}{a^9}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) 1

2 (1) $\sqrt[3]{a}$ (2) $\sqrt{a}$ (3) $\sqrt[3]{a^2}$ (4) $\sqrt[5]{a^3}$

3 (1) 5 (2) 2 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 12

4 (1) $5^{\sqrt{2}}$ (2) $6^{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{1}{49}$ (4) 108

5 (1) a^4 (2) $a^{3\sqrt{3}}$ (3) a^{12} (4) $ab^{\sqrt{2}}$

1 (1) $a^{-2}\times a^5=a^{-2+5}=a^3$

(2) $a^{-4}\div a^5=a^{-4-5}=a^{-9}=\frac{1}{a^9}$

(3) $2^{-1}\times 4^{-1}=2^{-1}\times(2^2)^{-1}$
$=2^{-1}\times 2^{-2}$
$=2^{-1+(-2)}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(4) $3^8\times 3^{-2}\div(3^2)^3=3^8\times 3^{-2}\div 3^6$
$=3^{8+(-2)-6}=3^0=1$

2 (3) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

(4) $a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$

3 (1) $5^{\frac{3}{8}}\times 5^{\frac{5}{8}}=5^{\frac{3}{8}+\frac{5}{8}}=5$

(2) $2^3\div(2^{\frac{1}{2}})^4=2^3\div 2^{\frac{1}{2}\times 4}=2^3\div 2^2=2^{3-2}=2$

(3) $(\sqrt[3]{16})^{-\frac{3}{2}}=(16^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=16^{-\frac{1}{2}}$
$=(4^2)^{-\frac{1}{2}}=4^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=4^{-1}=\frac{1}{4}$

(4) $(2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}})^4=(2^{\frac{1}{2}})^4\times(3^{\frac{1}{4}})^4=2^2\times 3=12$

4 (1) $5^{3\sqrt{2}}\times 5^{-2\sqrt{2}}=5^{3\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})}=5^{\sqrt{2}}$

(2) $6^{2\sqrt{3}}\div 6^{\sqrt{3}}=6^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}=6^{\sqrt{3}}$

(3) $(7^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}=7^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}=7^{-2}=\frac{1}{49}$

(4) $(4^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times 3^{\sqrt{\frac{3}{2}}})^{\sqrt{6}}=(4^{\frac{1}{\sqrt{6}}})^{\sqrt{6}}\times(3^{\sqrt{\frac{3}{2}}})^{\sqrt{6}}$
$=4^{\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}}\times 3^{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{6}}$
$=4\times 3^3=108$

5 (1) $a^{2-\sqrt{5}}\times a^{2+\sqrt{5}}=a^{2-\sqrt{5}+(2+\sqrt{5})}=a^4$

(2) $a^{\sqrt{75}}\div a^{\sqrt{12}}=a^{5\sqrt{3}}\div a^{2\sqrt{3}}=a^{5\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=a^{3\sqrt{3}}$

(3) $(a^{\sqrt{24}})^{\sqrt{6}}=a^{\sqrt{144}}=a^{12}$

(4) $(a^{\frac{1}{\sqrt{7}}}\times b^{\sqrt{\frac{2}{7}}})^{\sqrt{7}}=a^{\frac{1}{\sqrt{7}}\times\sqrt{7}}\times b^{\sqrt{\frac{2}{7}}\times\sqrt{7}}=ab^{\sqrt{2}}$

개념 드릴 18쪽

1 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{5}$ (4) -27

2 (1) a^3 (2) a^2b^{-3} (3) $\frac{1}{2^{10}}$ (4) 3^{18}

3 (1) $2^{\frac{4}{3}}$ (2) $5^{-\frac{3}{4}}$ (3) $7^{-\frac{5}{6}}$ (4) $3^{\frac{1}{3}}$

4 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $2^{\frac{11}{2}}$ (3) 5 (4) $\frac{1}{32}$ (5) $a^{\frac{1}{12}}$ (6) $a^{\frac{1}{4}}$

5 (1) $5^{3\sqrt{3}}$ (2) $3^{3\sqrt{2}}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) $6^{2\sqrt{5}}$

1 (3) $(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{1}{27}}=-27$

2 (1) $a^{-3}\times a^4\div a^{-2}=a^{-3+4-(-2)}=a^3$

(2) $(a^{-2}b^3)^{-1}=(a^{-2})^{-1}(b^3)^{-1}=a^2b^{-3}$

(3) $(2^{-2})^2\times(2^3)^{-2}=2^{-4}\times 2^{-6}=2^{-4+(-6)}$
$=2^{-10}=\frac{1}{2^{10}}$

(4) $(3^{-2})^{-3}\div(3^3)^{-4}=3^6\div 3^{-12}=3^{6-(-12)}=3^{18}$

3 (3) $\frac{1}{\sqrt[6]{7^5}}=\frac{1}{7^{\frac{5}{6}}}=7^{-\frac{5}{6}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[12]{3^{-4}}}=\frac{1}{3^{-\frac{4}{12}}}=\frac{1}{3^{-\frac{1}{3}}}=3^{\frac{1}{3}}$

4 (1) $27^{-\frac{4}{3}}\times 9^{\frac{3}{2}}=(3^3)^{-\frac{4}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}\times 3^{2\times\frac{3}{2}}$
$=3^{-4}\times 3^3=3^{-4+3}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

(2) $64^{\frac{3}{4}}\div 8^{-\frac{1}{3}}=(2^6)^{\frac{3}{4}}\div(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{6\times\frac{3}{4}}\div 2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$
$=2^{\frac{9}{2}}\div 2^{-1}=2^{\frac{9}{2}-(-1)}=2^{\frac{11}{2}}$

(3) $\sqrt{25^{-3}}\times\sqrt[3]{125^4}=\sqrt{(5^2)^{-3}}\times\sqrt[3]{(5^3)^4}$
$=\sqrt{5^{-6}}\times\sqrt[3]{5^{12}}=5^{-\frac{6}{2}}\times 5^{\frac{12}{3}}$
$=5^{-3}\times 5^4=5^{-3+4}=5$

(4) $\sqrt{16^{-4}}\div\sqrt{8^{-2}}=\sqrt{(2^4)^{-4}}\div\sqrt{(2^3)^{-2}}$

$=\sqrt{2^{-16}}\div\sqrt{2^{-6}}=2^{-\frac{16}{2}}\div2^{-\frac{6}{2}}$

$=2^{-8}\div2^{-3}=2^{-8-(-3)}$

$=2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

(5) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\div\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{6+4-9}{12}}=a^{\frac{1}{12}}$

(6) $\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[4]{a}\times\sqrt[6]{a^{-1}}=a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{4}}\times a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=a^{\frac{8-3-2}{12}}=a^{\frac{1}{4}}$

5 (1) $5^{\sqrt{3}}\times5^{\sqrt{12}}=5^{\sqrt{3}}\times5^{2\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=5^{3\sqrt{3}}$

(2) $3^{\sqrt{8}}\div3^{-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\div3^{-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}=3^{3\sqrt{2}}$

(3) $(4^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}=4^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$

(4) $6^{7\sqrt{5}}\times6^{-\sqrt{20}}\div6^{\sqrt{45}}=6^{7\sqrt{5}}\times6^{-2\sqrt{5}}\div6^{3\sqrt{5}}$

$=6^{7\sqrt{5}+(-2\sqrt{5})-3\sqrt{5}}=6^{2\sqrt{5}}$

필수 예제 01 지수의 확장 19쪽

01-1 답 (1) $2^{-\frac{9}{2}}$ (2) 2 (3) $\frac{9}{16}$ (4) $\frac{1}{9}$

|전략| 밑을 통일시킨 후 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\{(-2)^4\}^{\frac{3}{8}}\times16^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{8}}\times16^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{8}+\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$=16^{-\frac{9}{8}}=(2^4)^{-\frac{9}{8}}$

$=2^{-\frac{9}{2}}$

(2) $4^{\frac{2}{3}}\div36^{\frac{1}{3}}\times18^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\div(2^2\times3^2)^{\frac{1}{3}}\times(2\times3^2)^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}}$

$=2^{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}$

$=2^1\times3^0=2$

(3) $\left[\left\{\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\right]=\left[\left\{\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}\right]$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

(4) $(7^{\sqrt{10}}\times3^{2\sqrt{10}-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}\div63^{2\sqrt{5}}$

$=(7^{2\sqrt{5}}\times3^{4\sqrt{5}-2})\div(3^2\times7)^{2\sqrt{5}}$

$=\frac{7^{2\sqrt{5}}\times3^{4\sqrt{5}-2}}{3^{4\sqrt{5}}\times7^{2\sqrt{5}}}$

$=3^{4\sqrt{5}-2-4\sqrt{5}}\times7^{2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}$

$=3^{-2}\times7^0=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

필수 예제 02 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기 20쪽

02-1 답 (1) $-\frac{5}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

|전략| $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt[6]{3}\times(\sqrt[3]{3})^{-\frac{9}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{-\frac{9}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{3}{2}}$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\left(-\frac{3}{2}\right)}=3^{\frac{3+1-9}{6}}=3^{-\frac{5}{6}}$

$\therefore k=-\frac{5}{6}$

(2) $\sqrt[3]{a^4}\div\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[12]{a}=a^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}}$

$=a^{\frac{16-9+1}{12}}=a^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

02-2 답 13

|전략| $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\{a^2\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a^2\times(a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}$

$=\{a^2\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}=(a^2\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(a^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$

$=(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{8}}$

따라서 $p=8$, $q=5$이므로 $p+q=8+5=13$

다른 풀이 $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{24}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{12+2+1}{24}}=a^{\frac{5}{8}}$

따라서 $p=8$, $q=5$이므로 $p+q=8+5=13$

02-3 답 5

|전략| $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$(\sqrt{a^3}\times\sqrt[n]{a}\div a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{10}{11}}=(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{n}}\div a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{10}{11}}=\{a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)}\}^{\frac{10}{11}}$

$=(a^{2+\frac{1}{n}})^{\frac{10}{11}}=a^{\frac{10(2n+1)}{11n}}$

따라서 $a^{\frac{10(2n+1)}{11n}}=a^2$이므로 $\frac{10(2n+1)}{11n}=2$

$20n+10=22n$, $2n=10$ $\therefore n=5$

필수 예제 03 지수법칙과 곱셈 공식 21쪽

03-1 답 (1) $x-\frac{1}{y}$ (2) $\frac{1}{x}-y$

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{-\frac{1}{2}})^2=x-y^{-1}=x-\frac{1}{y}$

(2) $(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$

$=(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})\{(x^{-\frac{1}{3}})^2+x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+(y^{\frac{1}{3}})^2\}$

$=(x^{-\frac{1}{3}})^3-(y^{\frac{1}{3}})^3=x^{-1}-y=\frac{1}{x}-y$

03-2 답 (1) 78 (2) 4

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $(6^{\frac{2}{3}}+6^{-\frac{1}{3}})^3+(6^{\frac{2}{3}}-6^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(6^{\frac{2}{3}})^3+3\times(6^{\frac{2}{3}})^2\times6^{-\frac{1}{3}}+3\times6^{\frac{2}{3}}\times(6^{-\frac{1}{3}})^2+(6^{-\frac{1}{3}})^3$

$\quad+(6^{\frac{2}{3}})^3-3\times(6^{\frac{2}{3}})^2\times6^{-\frac{1}{3}}+3\times6^{\frac{2}{3}}\times(6^{-\frac{1}{3}})^2-(6^{-\frac{1}{3}})^3$

$=2\times6^2+2\times3\times6^{\frac{2}{3}+(-\frac{2}{3})}$

$=72+6=78$

(2) $(5^{\frac{1}{2}}+1)(5^{\frac{1}{2}}-1)(8^{\frac{1}{6}}+1)(8^{\frac{1}{6}}-1)=\{(5^{\frac{1}{2}})^2-1^2\}\{(8^{\frac{1}{6}})^2-1^2\}$

$=(5-1)\{(2^3)^{\frac{1}{3}}-1\}$

$=4\times1=4$

03-3 답 $1-a^4$

|전략| 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 식을 간단히 한다.

$(1+a^{\frac{1}{4}})(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{2}})(1+a)(1+a^2)$

$=\{1-(a^{\frac{1}{4}})^2\}(1+a^{\frac{1}{2}})(1+a)(1+a^2)$

$=(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})(1+a)(1+a^2)$

$=\{1-(a^{\frac{1}{2}})^2\}(1+a)(1+a^2)$

$=(1-a)(1+a)(1+a^2)$

$=(1-a^2)(1+a^2)$

$=1-(a^2)^2=1-a^4$

필수 예제 04 a^x+a^{-x} 꼴의 식의 값 구하기 22쪽

04-1 답 (1) 14 (2) 52

|전략| 주어진 식의 양변을 제곱 또는 세제곱한다.

(1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=4^2$, $a+2+a^{-1}=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

(2) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=4^3$, $a^{\frac{3}{2}}+3aa^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=64$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=64$, $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times4=64$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$

다른 풀이 (1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}=4^2-2=14$

(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=4^3-3\times4=52$

04-2 답 204

|전략| 주어진 식의 양변을 제곱하여 $x+x^{-1}$의 값을 먼저 구한다.

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2$, $x-2+x^{-1}=4$

$\therefore x+x^{-1}=6$ ……㉠

㉠의 양변을 세제곱하면

$(x+x^{-1})^3=6^3$, $x^3+3x^2x^{-1}+3xx^{-2}+x^{-3}=216$

$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=216$

$x^3+x^{-3}+3\times6=216$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x^3+x^{-3}=198$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x+x^{-1}+x^3+x^{-3}=6+198=204$

다른 풀이 $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=2^2+2=6$

$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3xx^{-1}(x+x^{-1})=6^3-3\times6=198$

$\therefore x+x^{-1}+x^3+x^{-3}=6+198=204$

필수 예제 05 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기 23쪽

05-1 답 (1) $3-2\sqrt{2}$ (2) $\frac{18-10\sqrt{2}}{31}$

|전략| 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하여 구하는 식을 a^{2x}이 포함된 식으로 변형한다.

(1) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}=3-2\sqrt{2}$

(2) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^{5x}+a^{-5x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^{5x}+a^{-5x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^{5x}+a^{-5x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{6x}+a^{-4x}}$

$=\frac{a^{2x}-1}{(a^{2x})^3+\frac{1}{(a^{2x})^2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^3+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+\frac{1}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}+1}$

$=\frac{2(\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}-1)}{(4\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2}-1)}=\frac{2(9-5\sqrt{2})}{32-1}$

$=\frac{18-10\sqrt{2}}{31}$

05-2 답 $\frac{63}{10}$

|전략| 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하여 구하는 식을 9^x이 포함된 식으로 변형한다.

$\frac{27^x+27^{-x}}{3^x-3^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$\frac{27^x+27^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^x(27^x+27^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}=\frac{3^x(3^{3x}+3^{-3x})}{3^x(3^x-3^{-x})}$

$=\frac{3^{4x}+3^{-2x}}{3^{2x}-1}=\frac{(3^{2x})^2+\frac{1}{3^{2x}}}{3^{2x}-1}$

$=\frac{(9^x)^2+\frac{1}{9^x}}{9^x-1}=\frac{5^2+\frac{1}{5}}{5-1}$

$=\frac{\frac{126}{5}}{4}=\frac{63}{10}$

05-3 답 $\frac{10}{3}$

|전략| 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하여 4^a의 값을 구한다.

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하면

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=\frac{2^a(2^a+2^{-a})}{2^a(2^a-2^{-a})}=\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}$

$=\frac{4^a+1}{4^a-1}$

즉, $\frac{4^a+1}{4^a-1}=2$이므로

$4^a+1=2(4^a-1)$

$4^a+1=2\times4^a-2$ $\therefore 4^a=3$

$\therefore 4^a+4^{-a}=4^a+\frac{1}{4^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

다른 풀이 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=2$에서 $2^a+2^{-a}=2(2^a-2^{-a})$이므로

$2^a+2^{-a}=2\times2^a-2\times2^{-a}$ $\therefore 2^a=3\times2^{-a}$

이 식의 양변에 2^a을 곱하면

$2^a\times2^a=3\times2^{-a}\times2^a$ $\therefore 2^{2a}=3$

따라서 $4^a=3$이므로

$4^a+4^{-a}=4^a+\frac{1}{4^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

필수 예제 06 밑이 다른 식이 주어졌을 때 식의 값 구하기 24쪽

06-1 답 1

|전략| $a>0, b>0, x\neq0$일 때, $a^x=b \iff a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$6^x=243$에서

$6=243^{\frac{1}{x}}=(3^5)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{5}{x}}$ ……㉠

$2^y=27$에서

$2=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{5}{x}}\div3^{\frac{3}{y}}=6\div2=3$

따라서 $3^{\frac{5}{x}-\frac{3}{y}}=3^1$이므로

$\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1$

06-2 답 6

|전략| $a>0, b>0, x\neq0$일 때, $a^x=b \iff a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$4^x=a$에서 $4=a^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$6^y=a$에서 $6=a^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$9^z=a$에서 $9=a^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}=4\times6\times9$ $\therefore a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=6^3$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$이므로

$a^3=6^3$ $\therefore a=6\ (\because a>0)$

필수 예제 07 지수의 실생활에의 활용 25쪽

07-1 답 2

|전략| $n=8$일 때와 $n=2$일 때 각각 t_1과 t_2를 구한다.

전자레인지로 피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간 t_1분은

$t_1=1.2\times8^{0.5}=1.2\times(2^3)^{0.5}=1.2\times2^{1.5}$

전자레인지로 피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간 t_2분은

$t_2=1.2\times2^{0.5}$

$\therefore \frac{t_1}{t_2}=\frac{1.2\times2^{1.5}}{1.2\times2^{0.5}}=2^{1.5-0.5}=2$

07-2 답 3

|전략| $t=1$일 때와 $t=8$일 때 각각 S_1과 S_2에 대한 식을 구한다.

햇볕에 노출되는 시간이 1시간일 때의 요구되는 자외선 차단 지수는 S_1이므로

$1=m\times2^{S_1}$ ……㉠

햇볕에 노출되는 시간이 8시간일 때의 요구되는 자외선 차단 지수는 S_2이므로

$8=m\times2^{S_2}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{m\times2^{S_2}}{m\times2^{S_1}}=\frac{8}{1}$ $\therefore 2^{S_2-S_1}=8$

따라서 $2^{S_2-S_1}=2^3$이므로

$S_2-S_1=3$

개념 정리 26~27쪽

01 밑, 지수 **02** n제곱근, 거듭제곱근

03 (1) $-\sqrt[n]{a}$ (2) 0 (3) 없다. **04** $\sqrt[n]{a}$ **05** ㉣

06 ㉠ **07** ㉢ **08** ㉡ **09** 1, $\frac{1}{a^n}$

10 $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a}$ **11** 2, 3, 4, 1000, 40, 44 **12** a^{x+y}

13 a^{x-y} **14** a^{xy} **15** a^xb^x

16 $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-1$, 3, 2, 27, 16, 11

11 $\{(-2)^6\}^{\frac{1}{3}}+125^{-\frac{2}{3}}\times100^{\frac{3}{2}}$

$=(2^6)^{\frac{1}{3}}+(5^3)^{-\frac{2}{3}}\times(10^2)^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\boxed{2}}+5^{-2}\times10^{\boxed{3}}$

$=\boxed{4}+\frac{1}{25}\times\boxed{1000}$

$=4+\boxed{40}=\boxed{44}$

16 $(9^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-(4^{\sqrt{2}+1}\div4^{\sqrt{2}-1})$

$=(3^2)^{\boxed{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}-4^{\sqrt{2}+1-(\boxed{\sqrt{2}-1})}$

$=3^{\boxed{3}}-4^{\boxed{2}}$

$=\boxed{27}-\boxed{16}=\boxed{11}$

중단원 마무리

28~30쪽

01 ③	02 ②	03 ⑤	04 ③
05 ③	06 ①	07 ②	08 ④
09 ②	10 ②	11 ①	12 ③
13 ④	14 ⑤	15 ④	16 ④
17 ③	18 ⑤	19 ④	20 4
21 13	22 14	23 $-\frac{5}{4}$	

LEVEL 1

01 ① 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$이다.

② $5^3=125$이므로 5는 125의 세제곱근이다.

③ 4의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=4$이므로

$x^4-4=0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

즉, 4의 네제곱근은 4개이다.

④ -1의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1$이다.

⑤ n이 1이 아닌 홀수일 때, -7의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-7}$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

참고 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

02 $\sqrt[6]{a^2b^7}\times\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[12]{a^6b^{11}}=\sqrt[12]{a^4b^{14}}\times\sqrt[12]{a^8b^4}\div\sqrt[12]{a^6b^{11}}$

$=\sqrt[12]{\frac{a^4b^{14}\times a^8b^4}{a^6b^{11}}}$

$=\sqrt[12]{a^6b^7}$

따라서 $n=12$, $p=6$, $q=7$이므로

$n+p+q=12+6+7=25$

03 $A=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^2\times2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}$

$B=\sqrt{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[6]{7}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}}=\sqrt[12]{12}$

4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt[4]{8}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}$

$B=\sqrt[6]{7}=\sqrt[12]{7^2}=\sqrt[12]{49}$

$C=\sqrt[12]{12}$

이때 $12<49<512$이므로 $\sqrt[12]{12}<\sqrt[12]{49}<\sqrt[12]{512}$

$\therefore C<B<A$

다른 풀이 세 수 $A=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $B=\sqrt{\sqrt{7}}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$A=\sqrt{2\sqrt{2}}=(2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{4}}$

$B=\sqrt{\sqrt{7}}=(7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{4}}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}}=(12^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=12^{\frac{1}{12}}$

4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$A=2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{9}{12}}=(2^9)^{\frac{1}{12}}=512^{\frac{1}{12}}$

$B=7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{12}}=49^{\frac{1}{12}}$

$C=12^{\frac{1}{12}}$

이때 $12<49<512$이므로 $12^{\frac{1}{12}}<49^{\frac{1}{12}}<512^{\frac{1}{12}}$

$\therefore C<B<A$

04 $(2\sqrt[\sqrt{3}]{\frac{4}{3}})^{\sqrt{3}}\times4^{-\frac{1}{2}}\div\{(-2)^4\}^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}\div(2^4)^{\frac{1}{4}}$

$=2^2\times2^{-1}\div2$

$=2^{2+(-1)-1}$

$=2^0=1$

참고 a^x에서 지수 x의 값의 범위에 따른 밑 a의 조건은 다음과 같다.

지수 x의 값의 범위	양의 정수	정수	유리수	실수
밑 a의 조건	$a\neq0$	$a\neq0$	$a>0$	$a>0$

05 $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}=[a\times\{a\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}}$

$=[a\times\{a\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}}$

$=\{a\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{4}}$

$=(a\times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{16}}$

$\therefore k=\frac{7}{16}$

다른 풀이 $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt{a}}\times\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}}$

$=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[24]{a}\times\sqrt[48]{a}$

$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{24}}\times a^{\frac{1}{48}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}}$

$=a^{\frac{12+6+2+1}{48}}=a^{\frac{7}{16}}$

$\therefore k=\frac{7}{16}$

06 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{-1})(a^2+a^{-2})$

$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2\}(a+a^{-1})(a^2+a^{-2})$

$=(a-a^{-1})(a+a^{-1})(a^2+a^{-2})$

$=\{a^2-(a^{-1})^2\}(a^2+a^{-2})$

$=(a^2-a^{-2})(a^2+a^{-2})$

$=(a^2)^2-(a^{-2})^2$

$=a^4-a^{-4}$

이때 $a=\sqrt{3}$이므로

(주어진 식)$=a^4-a^{-4}=(\sqrt{3})^4-(\sqrt{3})^{-4}$

$=(\sqrt{3})^4-\frac{1}{(\sqrt{3})^4}=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$

따라서 $p=9$, $q=80$이므로

$q-p=80-9=71$

07 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$

$=a+a^{-1}+2$

$=4+2=6$

이때 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$이므로

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$

08 $2^{\frac{x}{2}}=a$에서 $2=a^{\frac{2}{x}}$ ……㉠

$9^y=a$, 즉 $3^{2y}=a$에서 $3=a^{\frac{1}{2y}}$ ……㉡

$25^z=a$, 즉 $5^{2z}=a$에서 $5=a^{\frac{1}{2z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$a^{\frac{2}{x}}\times a^{\frac{1}{2y}}\times a^{\frac{1}{2z}}=2\times3\times5$ $\therefore a^{\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}}=30$

이때 $\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}=1$이므로 $a=30$

LEVEL 2

09 ㄱ. -8의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$이다. (참)

ㄴ. n이 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-5}$의 1개이다. (거짓)

ㄷ. n이 짝수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{5}$, $-\sqrt[n]{5}$의 2개이다. (참)

ㄹ. 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\text{이 홀수})\\ |a| & (n\text{이 짝수})\end{cases}$이므로

n이 짝수이고 $a<0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=|a|=-a$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 a는 k의 네제곱근이므로

$a^4=k$ ……㉠

$\sqrt[4]{3}$은 a의 세제곱근이므로

$(\sqrt[4]{3})^3=a$ $\therefore a=\sqrt[4]{3^3}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=(\sqrt[4]{3^3})^4=3^3=27$

11 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}}\div\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}=\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^3}}\div\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}$

$=\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^3}}\times\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

$=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^2}\times\sqrt[6]{x}}$

$=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}\times\sqrt[6]{x}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

12 $\sqrt[3]{\sqrt{29}}=\sqrt[6]{29}$

$\sqrt[3]{2\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times5}}=\sqrt[3]{\sqrt{20}}=\sqrt[6]{20}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{6}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times6}}=\sqrt{\sqrt[3]{48}}=\sqrt[6]{48}$

이때 $20<29<48$이므로 $\sqrt[6]{20}<\sqrt[6]{29}<\sqrt[6]{48}$

따라서 $a=\sqrt[6]{20}$, $b=\sqrt[6]{48}$이므로 부등식 $\sqrt[6]{20}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{48}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 21, 22, 23, …, 47의 27이다.

13 $a=\sqrt[4]{2}$에서 $a^4=2$

$b=\sqrt[3]{3}$에서 $b^3=3$

$\therefore \sqrt[12]{18}=18^{\frac{1}{12}}=(2\times3^2)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{12}}\times3^{\frac{1}{6}}$

$=(a^4)^{\frac{1}{12}}\times(b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

14 $(\sqrt{7^n})^{\frac{1}{2}}=(7^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{n}{4}}$

$7^{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되기 위해서는 $\frac{n}{4}$이 자연수이어야 하므로 n은 4의 배수이어야 한다.

따라서 20 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, 16, 20이므로 구하는 합은

$4+8+12+16+20=60$

참고 자연수 a가 소수일 때, $a^{\frac{n}{m}}$이 자연수가 되려면 n이 m의 배수이어야 한다. (단, m, n은 자연수)

15 $\frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a}$

$=\frac{1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}}}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a}$

$=\frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a}$

$=\frac{2(1+a^{\frac{1}{2}})+2(1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})}+\frac{4}{1+a}$

$=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1+a}$

$=\frac{4(1+a)+4(1-a)}{(1-a)(1+a)}=\frac{8}{1-a^2}$

이때 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

(주어진 식)$=\frac{8}{1-a^2}=\frac{8}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$

16 $3^x+3^{1-x}=10$의 양변을 제곱하면

$(3^x+3^{1-x})^2=100$

$3^{2x}+2\times3^x\times3^{1-x}+3^{2(1-x)}=100$

$9^x+6+9^{1-x}=100$

$\therefore 9^x+9^{1-x}=100-6=94$

다른 풀이 $3^x=t$ $(t>0)$라 하면

$3^{1-x}=3\times3^{-x}=3\times\frac{1}{3^x}=\frac{3}{t}$

즉, $3^x+3^{1-x}=10$에서 $t+\frac{3}{t}=10$

$\therefore 9^x+9^{1-x}=(3^x)^2+(3^{1-x})^2=t^2+\left(\frac{3}{t}\right)^2$

$=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-2\times t\times\frac{3}{t}$

$=10^2-6=94$

17 $2^a=3$, $6^b=7$이므로

$2^{ab+a+b}=(2^a)^b\times2^a\times2^b$

$=3^b\times2^a\times2^b$

$=(2\times3)^b\times3=6^b\times3$

$=7\times3=21$

18 $a^x=81$에서 $a=81^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^y=81$에서 $b=81^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$c^z=81$에서 $c=81^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$81^{\frac{1}{x}}\times81^{\frac{1}{y}}\times81^{\frac{1}{z}}=abc$ $\therefore 81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=abc$

이때 $abc=9$이므로 $81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=9$

따라서 $9^{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=9^1$이므로 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

19 수면으로부터 깊이가 d(m)인 지점에서 무게가 540 kg인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경이 R_1(m), 무게가 p(kg)인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경이 R_2(m)이므로

$R_1=k\left(\frac{540}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$, $R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{k\left(\frac{540}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{540}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$

이때 $\frac{R_1}{R_2}=3$이므로 $\left(\frac{540}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=3$에서

$\frac{540}{p}=3^3$ $\therefore p=\frac{540}{27}=20$

서술형

20 -3의 제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$f_2(-3)=0$

-2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$의 1개이므로

$f_3(-2)=1$

5의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{5}$의 2개이므로

$f_4(5)=2$

$\sqrt{10}$의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$의 1개이므로

$f_5(\sqrt{10})=1$ … ❶

$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)+f_5(\sqrt{10})$

$=0+1+2+1=4$ … ❷

채점 기준	비율
❶ $f_n(x)$의 값을 각각 구할 수 있다.	80 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}=[a\times\{a\times(a^3)^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$

$=\{a\times(a\times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=\{a\times(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}$

$=(a\times a^{\frac{7}{12}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{19}{12}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{19}{24}}$ … ❶

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{15}}}{\sqrt[3]{a^n}}}=\left\{\frac{(a^{15})^{\frac{1}{2}}}{(a^n)^{\frac{1}{3}}}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{a^{\frac{15}{2}}}{a^{\frac{n}{3}}}\right)^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{15}{2}-\frac{n}{3}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{15}{8}-\frac{n}{12}}$ … ❷

따라서 $a^{\frac{19}{24}}=a^{\frac{15}{8}-\frac{n}{12}}$이므로

$\frac{19}{24}=\frac{15}{8}-\frac{n}{12}$, $19=45-2n$ $\therefore n=13$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 등식의 좌변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 등식의 우변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[3]{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a^3}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{19}{24}}$

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{15}}}{\sqrt[3]{a^n}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a^{15}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^n}}}=\frac{\sqrt[8]{a^{15}}}{\sqrt[12]{a^n}}=\frac{a^{\frac{15}{8}}}{a^{\frac{n}{12}}}=a^{\frac{15}{8}-\frac{n}{12}}$

따라서 $a^{\frac{19}{24}}=a^{\frac{15}{8}-\frac{n}{12}}$이므로

$\frac{19}{24}=\frac{15}{8}-\frac{n}{12}$, $19=45-2n$ $\therefore n=13$

22 $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(3^{\frac{1}{3}})^3+3\times(3^{\frac{1}{3}})^2\times3^{-\frac{1}{3}}+3\times3^{\frac{1}{3}}\times(3^{-\frac{1}{3}})^2+(3^{-\frac{1}{3}})^3$

$=3+3^{-1}+3(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})=3+\frac{1}{3}+3x=\frac{10}{3}+3x$

이므로 $x^3-3x=\frac{10}{3}$ … ❶

$\therefore 3x^3-9x+4=3(x^3-3x)+4=3\times\frac{10}{3}+4=14$ … ❷

채점 기준	비율
❶ x^3-3x의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

23 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하면

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=\frac{2^a(2^a+2^{-a})}{2^a(2^a-2^{-a})}=\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=\frac{4^a+1}{4^a-1}$

즉, $\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$이므로 $4^a+1=-2(4^a-1)$

$4^a+1=-2\times4^a+2$, $3\times4^a=1$ $\therefore 4^a=\frac{1}{3}$ … ❶

$\therefore \frac{4^a+4^{-a}}{4^a-4^{-a}}=\frac{4^a+\frac{1}{4^a}}{4^a-\frac{1}{4^a}}=\frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}-3}=\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{5}{4}$ … ❷

채점 기준	비율
❶ 4^a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$에서 $2^a+2^{-a}=-2(2^a-2^{-a})$

$2^a+2^{-a}=-2\times2^a+2\times2^{-a}$, $3\times2^a=2^{-a}$ $\therefore 2^a=\frac{1}{3}\times2^{-a}$

위의 식의 양변에 2^a을 곱하면 $4^a=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{4^a+4^{-a}}{4^a-4^{-a}}=\frac{4^a+\frac{1}{4^a}}{4^a-\frac{1}{4^a}}=\frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}-3}=\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{5}{4}$

2 로그

1 로그의 뜻

개념 확인 32쪽

1 (1) $2=\log_5 25$ (2) $0=\log_9 1$ (3) $-2=\log_4 \frac{1}{16}$

2 (1) $6^0=1$ (2) $10^{-2}=0.01$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

3 (1) $0<x<1$ 또는 $x>1$ (2) $x>1$

3 (1) 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$이므로
$0<x<1$ 또는 $x>1$
(2) 진수의 조건에서 $x-1>0$이므로
$x>1$

개념 드릴 33쪽

1 (1) $0=\log_7 1$ (2) $5=\log_3 243$ (3) $3=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$
(4) $-2=\log_{\frac{1}{2}} 4$ (5) $-\frac{2}{3}=\log_{27} \frac{1}{9}$

2 (1) $10^3=1000$ (2) $6^{-3}=\frac{1}{216}$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$
(4) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ (5) $(\sqrt{3})^4=9$

3 (1) $2<x<3$ 또는 $x>3$ (2) $x<2$ 또는 $2<x<3$
(3) $\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $x>3$ (4) $-2<x<-\frac{5}{3}$ 또는 $x>-\frac{5}{3}$

4 (1) $x<2$ (2) $x<0$ 또는 $x>3$
(3) $x<-2$ 또는 $x>4$ (4) $1<x<2$

3 (1) 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq 1$이므로
$x>2$, $x\neq 3$ $\therefore$ $2<x<3$ 또는 $x>3$
(2) 밑의 조건에서 $3-x>0$, $3-x\neq 1$이므로
$x<3$, $x\neq 2$ $\therefore$ $x<2$ 또는 $2<x<3$
(3) 밑의 조건에서 $2x-5>0$, $2x-5\neq 1$이므로
$x>\frac{5}{2}$, $x\neq 3$ $\therefore$ $\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $x>3$
(4) 밑의 조건에서 $3x+6>0$, $3x+6\neq 1$이므로
$x>-2$, $x\neq -\frac{5}{3}$ $\therefore$ $-2<x<-\frac{5}{3}$ 또는 $x>-\frac{5}{3}$

4 (1) 진수의 조건에서 $4-2x>0$이므로
$x<2$
(2) 진수의 조건에서 $x^2-3x>0$이므로
$x(x-3)>0$ $\therefore$ $x<0$ 또는 $x>3$
(3) 진수의 조건에서 $x^2-2x-8>0$이므로
$(x+2)(x-4)>0$ $\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>4$
(4) 진수의 조건에서 $-x^2+3x-2>0$이므로
$x^2-3x+2<0$, $(x-1)(x-2)<0$
$\therefore$ $1<x<2$

필수 예제 01 로그의 정의 34쪽

01-1 답 (1) 49 (2) 81 (3) 8

|전략| $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때, $\log_a N=x \iff a^x=N$임을 이용한다.

(1) $\log_{\frac{1}{7}} x=-2$에서 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}=x$
$\therefore$ $x=(7^{-1})^{-2}=7^2=49$
(2) $\log_{\sqrt{3}} x=8$에서 $(\sqrt{3})^8=x$
$\therefore$ $x=(3^{\frac{1}{2}})^8=3^4=81$
(3) $\log_2(\log_{64} x)=-1$에서 $2^{-1}=\log_{64} x$이므로
$\log_{64} x=\frac{1}{2}$, $64^{\frac{1}{2}}=x$
$\therefore$ $x=(8^2)^{\frac{1}{2}}=8$

01-2 답 9

|전략| 5^x의 값을 먼저 구한 후 5^{2x}의 값을 구한다.

$x=\log_5 3$에서 $5^x=3$
$\therefore$ $5^{2x}=(5^x)^2=3^2=9$

01-3 답 9

|전략| $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때, $\log_a N=x \iff a^x=N$임을 이용한다.

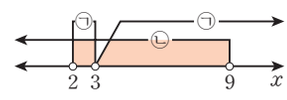
$\log_a 64=3$에서 $a^3=64$
$\therefore$ $a=64^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}=4$
$\log_2(\log_6 b)=1$에서 $2=\log_6 b$
$6^2=b$ $\therefore$ $b=36$
$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{36}{4}=9$

필수 예제 02 로그의 밑과 진수의 조건 35쪽

02-1 답 (1) $2<x<3$ 또는 $3<x<9$
(2) $4<x<5$ 또는 $5<x<7$

|전략| 밑의 조건과 진수의 조건을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(1) 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq 1$이므로
$x>2$, $x\neq 3$ $\therefore$ $2<x<3$ 또는 $x>3$ ……㉠
진수의 조건에서 $9-x>0$이므로
$x<9$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$2<x<3$ 또는 $3<x<9$



(2) 밑의 조건에서 $x-4>0$, $x-4\neq1$이므로

$x>4$, $x\neq5$ $\therefore 4<x<5$ 또는 $x>5$ ……㉠

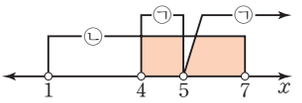
진수의 조건에서 $-x^2+8x-7>0$이므로

$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<5$ 또는 $5<x<7$



02-2 답 7

|전략| 밑의 조건과 진수의 조건을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ……㉠

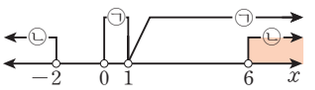
진수의 조건에서 $x^2-4x-12>0$이므로

$(x+2)(x-6)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>6$

따라서 정수 x의 최솟값은 7이다.



02-3 답 18

|전략| 밑의 조건과 진수의 조건을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$이므로

$x>3$, $x\neq4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+11x-24>0$이므로

$x^2-11x+24<0$, $(x-3)(x-8)<0$

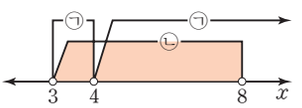
$\therefore 3<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$

따라서 $\log_{x-3}(-x^2+11x-24)$가 정의되도록 하는 정수 x의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$



2 로그의 성질

개념 확인 36~37쪽

1 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 1

2 (1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) −2

3 (1) 4 (2) 3

4 (1) 1 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 5

2 (1) $\log_4 2+\log_4 32=\log_4(2\times32)=\log_4 64=\log_4 4^3=3$

(2) $\log_5 50-\log_5 2=\log_5\frac{50}{2}=\log_5 25$

$=\log_5 5^2=2$

(3) $\log_2 18+2\log_2\frac{1}{3}=\log_2 18+\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\log_2\left(18\times\frac{1}{9}\right)=\log_2 2=1$

(4) $\log_6\frac{1}{12}-\log_6 3=\log_6\frac{\frac{1}{12}}{3}=\log_6\frac{1}{36}$

$=\log_6 6^{-2}=-2$

3 (1) $\frac{\log_5 81}{\log_5 3}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

(2) $\frac{1}{\log_{216}6}=\log_6 216=\log_6 6^3=3$

4 (1) $\log_4 3\times\log_3 4=\log_4 3\times\frac{1}{\log_4 3}=1$

(2) $\log_{16}8=\log_{2^4}2^3=\frac{3}{4}\log_2 2=\frac{3}{4}$

(3) $3^{\log_3 5}=5$

개념 드릴 38쪽

1 (1) 1 (2) 3 (3) 2 (4) 3 (5) −1 (6) 1 (7) 2

2 (1) $\frac{1}{\log_{10}2}$ (2) $\frac{2}{\log_{10}3}$ (3) $\frac{\log_{10}3}{2\log_{10}2}$ (4) $\frac{3\log_{10}2}{2\log_{10}5}$

3 (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{2}{3}$ (5) 9 (6) 15

1 (1) $\log_8 8-\log_{10}1=1-0=1$

(2) $\log_3 18+\log_3\frac{3}{2}=\log_3\left(18\times\frac{3}{2}\right)=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

(3) $\log_6 3+2\log_6\sqrt{12}=\log_6 3+\log_6(\sqrt{12})^2=\log_6 3+\log_6 12$

$=\log_6(3\times12)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

(4) $\log_4 48-\log_4\frac{3}{4}=\log_4\left(48\div\frac{3}{4}\right)=\log_4\left(48\times\frac{4}{3}\right)$

$=\log_4 64=\log_4 4^3=3$

(5) $\log_2 18-4\log_2\sqrt{6}=\log_2 18-\log_2(\sqrt{6})^4$

$=\log_2 18-\log_2 36=\log_2\frac{18}{36}$

$=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

(6) $\log_2 5+\log_2 6-\log_2 15=\log_2\frac{5\times6}{15}=\log_2 2=1$

(7) $\log_3\frac{3}{7}-\log_3\frac{1}{3}+2\log_3\sqrt{7}$

$=\log_3\frac{3}{7}-\log_3\frac{1}{3}+\log_3(\sqrt{7})^2=\log_3\frac{3}{7}-\log_3\frac{1}{3}+\log_3 7$

$=\log_3\left(\frac{3}{7}\div\frac{1}{3}\times7\right)$

$=\log_3\left(\frac{3}{7}\times3\times7\right)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

2 (1) $\log_2 10=\frac{1}{\log_{10}2}$

(2) $\log_3 100=\frac{\log_{10}100}{\log_{10}3}=\frac{\log_{10}10^2}{\log_{10}3}=\frac{2}{\log_{10}3}$

(3) $\log_4 3=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4}=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2}=\dfrac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}$

(4) $\log_{25} 8=\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 25}=\dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 5^2}=\dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 5}$

3 (1) $\log_{10} 5\times\log_5 10=\log_{10} 5\times\dfrac{1}{\log_{10} 5}=1$

(2) $\log_3 2\times\log_2 9=\log_3 2\times\log_2 3^2=\log_3 2\times 2\log_2 3$

$=\log_3 2\times\dfrac{2}{\log_3 2}=2$

(3) $\log_{64} 16=\log_{2^6} 2^4=\dfrac{4}{6}\log_2 2=\dfrac{2}{3}$

(4) $\log_{27}\dfrac{1}{9}=\log_{3^3} 3^{-2}=-\dfrac{2}{3}\log_3 3=-\dfrac{2}{3}$

(5) $4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^{\log_2 2^2}=3^2=9$

(6) $2^{\log_2 5+\log_2 3}=2^{\log_2 15}=15$

필수 예제 01 로그의 성질 39쪽

01-1 답 (1) 2 (2) 3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

|전략| 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $5\log_3\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}$

$=\log_3(\sqrt{3})^5+\log_3 2^{\frac{1}{2}}-\log_3\sqrt{6}$

$=\log_3 9\sqrt{3}+\log_3\sqrt{2}-\log_3\sqrt{6}$

$=\log_3\dfrac{9\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

(2) $2\log_2\sqrt{6}+\dfrac{1}{2}\log_2 16-\log_2 3$

$=\log_2(\sqrt{6})^2+\log_2(4^2)^{\frac{1}{2}}-\log_2 3$

$=\log_2 6+\log_2 4-\log_2 3$

$=\log_2\dfrac{6\times 4}{3}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

(3) $\log_6\sqrt{3}-\log_6 2\sqrt{2}+2\log_6 2$

$=\log_6\sqrt{3}-\log_6 2\sqrt{2}+\log_6 2^2$

$=\log_6\dfrac{\sqrt{3}\times 4}{2\sqrt{2}}=\log_6\sqrt{6}$

$=\log_6 6^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\dfrac{1}{3}\log_{10} 16-\log_{10}\dfrac{2}{5}-2\log_{10}\sqrt[3]{5}$

$=\dfrac{1}{3}\log_{10} 2^4-(\log_{10} 2-\log_{10} 5)-2\log_{10} 5^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{4}{3}\log_{10} 2-\log_{10} 2+\log_{10} 5-\dfrac{2}{3}\log_{10} 5$

$=\dfrac{1}{3}\log_{10} 2+\dfrac{1}{3}\log_{10} 5$

$=\dfrac{1}{3}(\log_{10} 2+\log_{10} 5)=\dfrac{1}{3}\log_{10}(2\times 5)$

$=\dfrac{1}{3}\log_{10} 10=\dfrac{1}{3}$

01-2 답 5

|전략| 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$2\log_2\sqrt{3}-\log_2 6+6\log_2\sqrt{2}$

$=\log_2(\sqrt{3})^2-\log_2 6+\log_2(\sqrt{2})^6$

$=\log_2 3-\log_2 6+\log_2 8=\log_2\dfrac{3\times 8}{6}$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

따라서 $k=2$이므로

$\log_k 32=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

필수 예제 02 로그의 밑의 변환 40쪽

02-1 답 (1) −2 (2) 3

|전략| 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\dfrac{1}{\log_6 3}-\log_3 54=\log_3 6-\log_3 54$

$=\log_3\dfrac{6}{54}=\log_3\dfrac{1}{9}$

$=\log_3 3^{-2}=-2$

(2) $\dfrac{1}{\log_2 10}+\dfrac{1}{\log_{20} 10}+\dfrac{1}{\log_{25} 10}=\log_{10} 2+\log_{10} 20+\log_{10} 25$

$=\log_{10}(2\times 20\times 25)$

$=\log_{10} 1000=\log_{10} 10^3=3$

02-2 답 20

|전략| $\log_a b$를 a를 밑으로 하는 로그로 변환하여 식을 간단히 한다.

$\log_a 3\times\log_9 b=\log_a 3\times\dfrac{\log_a b}{\log_a 9}=\log_a 3\times\dfrac{\log_a b}{\log_a 3^2}$

$=\log_a 3\times\dfrac{\log_a b}{2\log_a 3}=\dfrac{\log_a b}{2}=10$

$\therefore\ \log_a b=20$

02-3 답 3

|전략| 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 a, b, c를 간단히 한다.

$\dfrac{\log_7 2}{a}=\log_7 6$에서 $a=\dfrac{\log_7 2}{\log_7 6}=\log_6 2$

$\dfrac{\log_7 4}{b}=\log_7 6$에서 $b=\dfrac{\log_7 4}{\log_7 6}=\log_6 4$

$\dfrac{\log_7 27}{c}=\log_7 6$에서 $c=\dfrac{\log_7 27}{\log_7 6}=\log_6 27$

$\therefore\ a+b+c=\log_6 2+\log_6 4+\log_6 27$

$=\log_6(2\times 4\times 27)$

$=\log_6 216=\log_6 6^3=3$

다른 풀이 $a+b+c=\dfrac{\log_7 2}{\log_7 6}+\dfrac{\log_7 4}{\log_7 6}+\dfrac{\log_7 27}{\log_7 6}$

$=\dfrac{\log_7 2+\log_7 4+\log_7 27}{\log_7 6}$

$=\dfrac{\log_7(2\times 4\times 27)}{\log_7 6}=\dfrac{\log_7 216}{\log_7 6}$

$=\dfrac{\log_7 6^3}{\log_7 6}=3$

필수 예제 03 로그의 여러 가지 성질 41쪽

03-1 답 (1) $-\frac{5}{18}$ (2) 4

|전략| 로그의 성질 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$, $a^{\log_a b}=b$를 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $(\log_2 3+\log_8 9)(\log_9 2-\log_{27} 4)$

$=(\log_2 3+\log_{2^3} 3^2)(\log_{3^2} 2-\log_{3^3} 2^2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{2}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{2}{3}\log_3 2\right)$ ($\log_2 3$의 계수: $=\left(1+\frac{2}{3}\right)\log_2 3$, $\log_3 2$의 계수: $=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\log_3 2$)

$=\frac{5}{3}\log_2 3\times\left(-\frac{1}{6}\log_3 2\right)$

$=\frac{5}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times\log_2 3\times\log_3 2=-\frac{5}{18}$

(2) 먼저 지수를 간단히 하면

$2\log_5 4-3\log_5 2+\frac{1}{4}\log_5 16$

$=\log_5 4^2-\log_5 2^3+\log_5 (2^4)^{\frac{1}{4}}$

$=\log_5 16-\log_5 8+\log_5 2$

$=\log_5\frac{16\times 2}{8}=\log_5 4$

$\therefore 5^{2\log_5 4-3\log_5 2+\frac{1}{4}\log_5 16}=5^{\log_5 4}=4$

03-2 답 5

|전략| 로그의 성질 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$를 이용하여 식을 간단히 한다.

$\log_{\frac{1}{3}} 5+\log_9 125+\log_3\sqrt{5}=\log_{3^{-1}} 5+\log_{3^2} 5^3+\log_3 5^{\frac{1}{2}}$

$=-\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5$ ($=\left(-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\log_3 5$)

$=\log_3 5$

따라서 $k=\log_3 5$이므로

$3^k=5$

03-3 답 2

|전략| 로그의 성질 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$를 이용하여 식을 간단히 한다.

$(\log_4 27+\log_2 9)\log_{\sqrt{3}} k=(\log_{2^2} 3^3+\log_2 3^2)\log_{3^{\frac{1}{2}}} k$

$=\left(\frac{3}{2}\log_2 3+2\log_2 3\right)\times 2\log_3 k$

$=\frac{7}{2}\log_2 3\times 2\log_3 k$

$=7\log_2 3\times\frac{\log_2 k}{\log_2 3}=7\log_2 k$

이므로 $7\log_2 k=7$

$\log_2 k=1$ $\therefore k=2$

필수 예제 04 로그의 값을 문자로 나타내기 42쪽

04-1 답 (1) $2a+3b$ (2) $a-b-1$ (3) $\frac{b+1}{2a}$ (4) $\frac{3a+2b}{1-a}$

|전략| 주어진 식을 $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$이 포함된 꼴로 변형한다.

(1) $\log_{10} 108=\log_{10}(2^2\times 3^3)=2\log_{10} 2+3\log_{10} 3=2a+3b$

(2) $\log_{\frac{1}{10}} 15=\log_{10^{-1}}(3\times 5)=-\log_{10}(3\times 5)$

$=-(\log_{10} 3+\log_{10} 5)$

$=-\left(\log_{10} 3+\log_{10}\frac{10}{2}\right)$

$=-(\log_{10} 3+\log_{10} 10-\log_{10} 2)$

$=-(\log_{10} 3+1-\log_{10} 2)$

$=\log_{10} 2-\log_{10} 3-1=a-b-1$

(3) $\log_2\sqrt{30}=\frac{1}{2}\log_2 30=\frac{1}{2}\times\frac{\log_{10} 30}{\log_{10} 2}$

$=\frac{\log_{10}(3\times 10)}{2\log_{10} 2}=\frac{\log_{10} 3+\log_{10} 10}{2\log_{10} 2}$

$=\frac{\log_{10} 3+1}{2\log_{10} 2}=\frac{b+1}{2a}$

(4) $\log_5 72=\frac{\log_{10} 72}{\log_{10} 5}=\frac{\log_{10}(2^3\times 3^2)}{\log_{10}\frac{10}{2}}$

$=\frac{\log_{10} 2^3+\log_{10} 3^2}{\log_{10} 10-\log_{10} 2}$

$=\frac{3\log_{10} 2+2\log_{10} 3}{1-\log_{10} 2}$

$=\frac{3a+2b}{1-a}$

04-2 답 (1) $a+2b$ (2) $\frac{3a+b}{a+b}$

|전략| 먼저 로그의 정의를 이용하여 a, b를 로그로 나타낸다.

(1) $5^a=2$에서 $a=\log_5 2$

$5^b=3$에서 $b=\log_5 3$

$\therefore \log_5 18=\log_5(2\times 3^2)=\log_5 2+2\log_5 3=a+2b$

(2) $7^a=2$에서 $a=\log_7 2$

$7^b=5$에서 $b=\log_7 5$

$\therefore \log_{10} 40=\frac{\log_7 40}{\log_7 10}=\frac{\log_7(2^3\times 5)}{\log_7(2\times 5)}$

$=\frac{\log_7 2^3+\log_7 5}{\log_7 2+\log_7 5}=\frac{3\log_7 2+\log_7 5}{\log_7 2+\log_7 5}$

$=\frac{3a+b}{a+b}$

04-3 답 $\frac{y+2z}{3x+y+z}$

|전략| 먼저 로그의 정의를 이용하여 x, y, z를 로그로 나타낸다.

$a^x=2$에서 $x=\log_a 2$

$a^y=3$에서 $y=\log_a 3$

$a^z=5$에서 $z=\log_a 5$

$\therefore \log_{120} 75=\frac{\log_a 75}{\log_a 120}=\frac{\log_a(3\times 5^2)}{\log_a(2^3\times 3\times 5)}$

$=\frac{\log_a 3+\log_a 5^2}{\log_a 2^3+\log_a 3+\log_a 5}$

$=\frac{\log_a 3+2\log_a 5}{3\log_a 2+\log_a 3+\log_a 5}=\frac{y+2z}{3x+y+z}$

필수 예제 05 로그의 정의와 성질을 이용하여 식의 값 구하기 43쪽

05-1 답 1

|전략| 지수를 로그로 나타낸 후 식의 값을 구한다.

$2^x=14$에서 $x=\log_2 14$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_2 14}=\log_{14} 2$

$7^y=14$에서 $y=\log_7 14$

$\therefore \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_7 14}=\log_{14} 7$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\log_{14} 2+\log_{14} 7=\log_{14}(2\times 7)$

$=\log_{14} 14=1$

다른 풀이 $2^x=14$에서 $2=14^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$7^y=14$에서 $7=14^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면 $14^{\frac{1}{x}}\times 14^{\frac{1}{y}}=14$, $14^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=14^1$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$

05-2 답 2

|전략| 지수를 로그로 나타낸 후 식의 값을 구한다.

$15^x=27$에서 $x=\log_{15} 27=\log_{15} 3^3=3\log_{15} 3$

$\therefore \dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{\log_{15} 3}=\log_3 15$

$135^y=81$에서 $y=\log_{135} 81=\log_{135} 3^4=4\log_{135} 3$

$\therefore \dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{\log_{135} 3}=\log_3 135$

$\therefore \dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{x}=\log_3 135-\log_3 15=\log_3 \dfrac{135}{15}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

다른 풀이 $15^x=27$에서 $15=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ……㉠

$135^y=81$에서 $135=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $3^{\frac{4}{y}}\div 3^{\frac{3}{x}}=9$, $3^{\frac{4}{y}-\frac{3}{x}}=3^2$

$\therefore \dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{x}=2$

필수 예제 06 로그와 이차방정식 44쪽

06-1 답 4

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-12x+3=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)=\log_2\{(\alpha+1)(\beta+1)\}$

$=\log_2(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log_2(3+12+1)$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

06-2 답 2

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4$, $\log_3\alpha\times\log_3\beta=2$

$\therefore \log_\alpha 3+\log_\beta 3=\dfrac{1}{\log_3\alpha}+\dfrac{1}{\log_3\beta}$

$=\dfrac{\log_3\beta+\log_3\alpha}{\log_3\alpha\times\log_3\beta}$

$=\dfrac{4}{2}=2$

06-3 답 −4

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=2$, $\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta=-2$

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\dfrac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\dfrac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}$

$=\dfrac{(\log_{10}\beta)^2+(\log_{10}\alpha)^2}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}$

$=\dfrac{(\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta)^2-2\times\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}$

$=\dfrac{2^2-2\times(-2)}{-2}=-4$

3 상용로그

개념 확인 45~46쪽

1 (1) 3 (2) −3 (3) $\frac{2}{3}$

2 (1) 0.6628 (2) 0.6739 (3) 0.6839

3 (1) 정수 부분: 1, 소수 부분: 0.8603

(2) 정수 부분: −1, 소수 부분: 0.8603

1 (1) $\log 1000=\log 10^3=3$

(2) $\log\dfrac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

(3) $\log\sqrt[3]{100}=\log(10^2)^{\frac{1}{3}}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$

2 (1) 상용로그표에서 4.6의 가로줄과 0의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 4.60=0.6628$

(2) 상용로그표에서 4.7의 가로줄과 2의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 4.72=0.6739$

(3) 상용로그표에서 4.8의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 4.83=0.6839$

3 (1) $\log 72.5=\log(10\times 7.25)$

$=\log 10+\log 7.25$

$=1+0.8603$

이므로 정수 부분은 1, 소수 부분은 0.8603이다.

(2) $\log 0.725=\log(10^{-1}\times 7.25)$

$=\log 10^{-1}+\log 7.25$

$=-1+0.8603$

이므로 정수 부분은 −1, 소수 부분은 0.8603이다.

개념 드릴 47쪽

1 (1) -5 (2) $\frac{3}{4}$ (3) $-\frac{2}{7}$ (4) $\frac{5}{2}$

2 (1) 0.7868 (2) 0.7993 (3) 6.03 (4) 6.21

3 (1) 1.0253 (2) 3.0253 (3) -0.9747 (4) -1.9747

4 (1) 1.5763 (2) -1.4377 (3) 0.2933

5 (1) 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.6646
(2) 정수 부분: 4, 소수 부분: 0.1903
(3) 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.9474
(4) 정수 부분: -5, 소수 부분: 0.7185

1 (1) $\log \frac{1}{100000}=\log 10^{-5}=-5$

(2) $\log \sqrt[4]{1000}=\log (10^3)^{\frac{1}{4}}=\log 10^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

(3) $\log \frac{1}{\sqrt[7]{100}}=\log \frac{1}{(10^2)^{\frac{1}{7}}}=\log \frac{1}{10^{\frac{2}{7}}}=\log 10^{-\frac{2}{7}}=-\frac{2}{7}$

(4) $\log 100\sqrt{10}=\log 10^{2+\frac{1}{2}}=\log 10^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

2 (1) 상용로그표에서 6.1의 가로줄과 2의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.12=0.7868$
$\therefore x=0.7868$

(2) 상용로그표에서 6.3의 가로줄과 0의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.30=0.7993$
$\therefore x=0.7993$

(3) 상용로그표에서 0.7803은 6.0의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.03=0.7803$
$\therefore x=6.03$

(4) 상용로그표에서 0.7931은 6.2의 가로줄과 1의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.21=0.7931$
$\therefore x=6.21$

3 (1) $\log 10.6=\log (10\times 1.06)$
$=\log 10+\log 1.06$
$=1+0.0253=1.0253$

(2) $\log 1060=\log (10^3\times 1.06)$
$=\log 10^3+\log 1.06$
$=3+0.0253=3.0253$

(3) $\log 0.106=\log (10^{-1}\times 1.06)$
$=\log 10^{-1}+\log 1.06$
$=-1+0.0253=-0.9747$

(4) $\log 0.0106=\log (10^{-2}\times 1.06)$
$=\log 10^{-2}+\log 1.06$
$=-2+0.0253=-1.9747$

4 (1) $\log 3.77=0.5763$에서
$\log 37.7=\log (10\times 3.77)$
$=\log 10+\log 3.77$
$=1+0.5763=1.5763$

(2) $\log 3.65=0.5623$에서
$\log 0.0365=\log (10^{-2}\times 3.65)$
$=\log 10^{-2}+\log 3.65$
$=-2+0.5623=-1.4377$

(3) $\log 3.86=0.5866$에서
$\log \sqrt{3.86}=\log 3.86^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 3.86$
$=\frac{1}{2}\times 0.5866=0.2933$

5 (1) $\log N=3.6646=3+0.6646$
이므로 $\log N$의 정수 부분은 3, 소수 부분은 0.6646이다.

(2) $\log N=4.1903=4+0.1903$
이므로 $\log N$의 정수 부분은 4, 소수 부분은 0.1903이다.

(3) $\log N=-1.0526=-2+0.9474$
이므로 $\log N$의 정수 부분은 -2, 소수 부분은 0.9474이다.

(4) $\log N=-4.2815=-5+0.7185$
이므로 $\log N$의 정수 부분은 -5, 소수 부분은 0.7185이다.

필수 예제 01 상용로그의 값 48쪽

01-1 답 (1) 1.8572 (2) -0.5283 (3) -1.2219

|전략| 주어진 상용로그의 값을 사용할 수 있도록 로그의 진수를 변형하고 로그의 성질을 이용한다.

(1) $\log 72=\log (2^3\times 3^2)=3\log 2+2\log 3$
$=3\times 0.3010+2\times 0.4771$
$=1.8572$

(2) $\log \frac{8}{27}=\log \left(\frac{2}{3}\right)^3=3\log \frac{2}{3}$
$=3(\log 2-\log 3)$
$=3\times (0.3010-0.4771)$
$=-0.5283$

(3) $\log 0.06=\log (10^{-2}\times 2\times 3)=\log 10^{-2}+\log 2+\log 3$
$=-2+\log 2+\log 3$
$=-2+0.3010+0.4771$
$=-1.2219$

01-2 답 (1) 2.6 (2) 1.7

|전략| 주어진 상용로그의 값을 사용할 수 있도록 로그의 진수를 변형하고 로그의 성질을 이용한다.

(1) $\log \frac{1}{A}+\log B^2=\log A^{-1}+\log B^2$
$=-\log A+2\log B$
$=-1.8+2\times 2.2=2.6$

(2) $\log \sqrt[3]{A}-\log \frac{1}{\sqrt{B}}=\log A^{\frac{1}{3}}-\log B^{-\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{3}\log A-\left(-\frac{1}{2}\log B\right)$
$=\frac{1}{3}\times 1.8+\frac{1}{2}\times 2.2=1.7$

01-3 답 0.3409

|전략| 상용로그표에 있는 상용로그의 값을 이용할 수 있도록 로그의 진수를 변형하고 로그의 성질을 이용한다.

$\log 2.31=0.3636$에서

$$\log\sqrt[4]{23.1}=\log 23.1^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log 23.1$$
$$=\frac{1}{4}\log(10\times 2.31)=\frac{1}{4}(\log 10+\log 2.31)$$
$$=\frac{1}{4}\times(1+0.3636)=0.3409$$

필수 예제 02 상용로그의 진수 구하기 49쪽

02-1 답 (1) 73.1 (2) 0.000731

|전략| 주어진 상용로그의 값을 사용할 수 있도록 로그의 값을 $\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$) 꼴로 나타낸다.

(1) $\log x=1.8639=1+0.8639$
$=\log 10+\log 7.31=\log(10\times 7.31)$
$=\log 73.1$
$\therefore x=73.1$

(2) $\log x=-3.1361=-3-0.1361=-4+0.8639$
$=\log 10^{-4}+\log 7.31=\log(10^{-4}\times 7.31)$
$=\log 0.000731$
$\therefore x=0.000731$

02-2 답 (1) 56700 (2) 0.0567

|전략| 주어진 상용로그의 값을 사용할 수 있도록 로그의 값을 $\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$) 꼴로 나타낸다.

$\log 56.7=\log(10\times 5.67)=\log 10+\log 5.67$
$=1+\log 5.67=1.7536$
이므로 $\log 5.67=0.7536$

(1) $\log x=4.7536=4+0.7536$
$=\log 10^4+\log 5.67=\log(10^4\times 5.67)$
$=\log 56700$
$\therefore x=56700$

(2) $\log x=-1.2464=-1-0.2464=-2+0.7536$
$=\log 10^{-2}+\log 5.67=\log(10^{-2}\times 5.67)$
$=\log 0.0567$
$\therefore x=0.0567$

필수 예제 03 상용로그의 소수 부분의 활용 50쪽

03-1 답 $10^{\frac{7}{3}}$, $10^{\frac{8}{3}}$

|전략| 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차는 정수임을 이용한다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같으므로

$$\log x-\log\frac{1}{x^2}=\log x-\log x^{-2}=\log x+2\log x$$
$$=3\log x=(\text{정수})$$

이때 $\log x$의 정수 부분이 2이고 소수 부분이 0이 아니므로
$2<\log x<3$
따라서 $6<3\log x<9$이고, $3\log x$는 정수이므로
$3\log x=7$ 또는 $3\log x=8$
$\log x=\frac{7}{3}$ 또는 $\log x=\frac{8}{3}$
$\therefore x=10^{\frac{7}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{3}}$

03-2 답 $10^{\frac{15}{4}}$

|전략| 두 상용로그의 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합은 정수임을 이용한다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로
↳ $\log x\neq$(정수), $\log\sqrt[3]{x}\neq$(정수)

$$\log x+\log\sqrt[3]{x}=\log x+\log x^{\frac{1}{3}}=\log x+\frac{1}{3}\log x$$
$$=\frac{4}{3}\log x=(\text{정수})$$

이때 $\log x$의 정수 부분이 3이므로
$3<\log x<4$ ($\because \log x\neq$(정수))
$\therefore 4<\frac{4}{3}\log x<\frac{16}{3}$
따라서 $\frac{4}{3}\log x$는 정수이므로
$\frac{4}{3}\log x=5$, $\log x=\frac{15}{4}$
$\therefore x=10^{\frac{15}{4}}$

다른 풀이 $\log x$의 소수 부분을 α라 하면
$\log x=3+\alpha$ (단, $0<\alpha<1$) ($\because \log x\neq$(정수))
$\therefore \log\sqrt[3]{x}=\log x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log x=\frac{1}{3}(3+\alpha)=1+\frac{\alpha}{3}$
즉, $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{3}$이므로
$\alpha+\frac{\alpha}{3}=1$, $\frac{4}{3}\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{3}{4}$
따라서 $\log x=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$이므로 $x=10^{\frac{15}{4}}$

필수 예제 04 상용로그의 실생활에의 활용 51쪽

04-1 답 100배

|전략| 지진의 규모가 6.82, 5.48일 때 방출되는 에너지를 각각 E_1, E_2라 하고 주어진 식에 대입하여 $\frac{E_1}{E_2}$의 값을 구한다.

지진의 규모가 6.82일 때 방출되는 에너지를 E_1이라 하면
$6.82=0.67\log(0.37E_1)+1.46$ ……㉠
지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지를 E_2라 하면
$5.48=0.67\log(0.37E_2)+1.46$ ……㉡
㉠−㉡을 하면
$1.34=0.67\{\log(0.37E_1)-\log(0.37E_2)\}$
$\log\frac{E_1}{E_2}=2$ $\therefore \frac{E_1}{E_2}=10^2=100$
따라서 지진의 규모가 6.82일 때 방출되는 에너지는 지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지의 100배이다.

04-2 답 890만 원

|전략| $P=2\times10^7$, $t=5$, $r=0.15$를 대입하여 W의 값을 구한다.

새 차의 가격이 2000만 원, 즉 (2×10^7)원이고 연평균 감가상각비율이 0.15일 때, 5년 후의 중고차 가격을 구해야 하므로 주어진 관계식에 $P=2\times10^7$, $t=5$, $r=0.15$를 대입하면

$$\log(1-0.15)=\frac{1}{5}\log\frac{W}{2\times10^7}$$

$$\log0.85=\frac{1}{5}\{\log W-\log(2\times10^7)\}$$

$$=\frac{1}{5}\{\log W-(\log2+\log10^7)\}$$

$$\log(8.5\times10^{-1})=\frac{1}{5}(\log W-\log2-7)$$

$$5(\log8.5-1)=\log W-\log2-7$$

$$\therefore \log W=5\log8.5+\log2+2$$

$$=5\times0.93+0.30+2$$

$$=6.95$$

$$=6+0.95$$

$$=\log10^6+\log8.9$$

$$=\log(10^6\times8.9)$$

$$=\log8900000$$

$\therefore W=8900000$

따라서 5년 후의 중고차의 가격은 890만 원이다.

개념 정리

52~53쪽

01 $\log_a N$, 밑, 로그, 진수 **02** (1) 0, 1 (2) 0

03 4	**04** 1	**05** 2	**06** -2
07 0, 1	**08** +	**09** −	**10** k
11 1, 9	**12** 2, 5	**13** 7, 3	**14** 3, 3
15 $\frac{\log_c b}{\log_c a}$	**16** $\frac{1}{\log_b a}$	**17** 1	**18** $\frac{n}{m}$
19 b	**20** b	**21** 밑	**22** 9.99, 넷째
23 가로줄, 세로줄, 0.7619		**24** 10, 1, 1, 0.3892	
25 2.45, -2, -2, 0.3892			

[24~25] $\log2.45=0.3892$에서

24 $\log24.5=\log(10\times2.45)$

$=\log\boxed{10}+\log2.45$

$=\boxed{1}+0.3892$

이므로 $\log24.5$의 정수 부분은 $\boxed{1}$, 소수 부분은 $\boxed{0.3892}$이다.

25 $\log0.0245=\log(10^{-2}\times2.45)$

$=\log10^{-2}+\log\boxed{2.45}$

$=\boxed{-2}+0.3892$

이므로 $\log0.0245$의 정수 부분은 $\boxed{-2}$, 소수 부분은 $\boxed{0.3892}$이다.

중단원 마무리

54~56쪽

01 ⑤	**02** ①	**03** 1	**04** ④
05 ③	**06** ②	**07** ⑤	**08** 6.5
09 ③	**10** ②	**11** ④	**12** ②
13 ③	**14** ④	**15** ③	**16** 2.1797
17 ①	**18** ⑤	**19** ②	**20** ③
21 7	**22** $\frac{3}{7}$	**23** 3.4549	**24** 54

LEVEL 1

01 $\log_3\{\log_8(\log_5x)\}=-1$에서

$\log_8(\log_5x)=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$\log_5x=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

$\therefore x=5^2=25$

02 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$이므로

$x>3$, $x\neq4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+8x-12>0$이므로

$x^2-8x+12<0$, $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<6$

따라서 정수 x의 개수는 5의 1이다.

03 $\log_{11}2+\log_{11}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{11}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{11}\left(1+\frac{1}{10}\right)$

$=\log_{11}2+\log_{11}\frac{3}{2}+\log_{11}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{11}\frac{11}{10}$

$=\log_{11}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{10}\right)$

$=\log_{11}11=1$

04 $a^x=27$에서 $x=\log_a27$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a27}=\log_{27}a$

$b^y=27$에서 $y=\log_b27$

$\therefore \frac{1}{y}=\frac{1}{\log_b27}=\log_{27}b$

$c^z=27$에서 $z=\log_c27$

$\therefore \frac{1}{z}=\frac{1}{\log_c27}=\log_{27}c$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_{27}a+\log_{27}b+\log_{27}c$

$=\log_{27}abc=\log_{27}9$

$=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}$

다른 풀이 지수법칙을 이용해 보자.

$a^x=27$에서 $a=27^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^y=27$에서 $b=27^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$c^z=27$에서 $c=27^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $27^{\frac{1}{x}}\times27^{\frac{1}{y}}\times27^{\frac{1}{z}}=abc$

이때 $abc=9$이므로 $27^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=9$, $(3^3)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=3^2$

따라서 $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

05 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\times\log_2 b=-3$

$\therefore \log_a\sqrt{2}+\log_{b^2}2=\log_a 2^{\frac{1}{2}}+\log_{b^2}2$

$=\frac{1}{2}\log_a 2+\frac{1}{2}\log_b 2$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2 b+\log_2 a}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

06 $\log\frac{5\sqrt{2}}{3}=\log\frac{10\sqrt{2}}{6}$

$=\log 10\sqrt{2}-\log 6$

$=\log 10+\log\sqrt{2}-\log 6$

$=\log 10+\log 2^{\frac{1}{2}}-(\log 2+\log 3)$

$=1+\frac{1}{2}\log 2-\log 2-\log 3$

$=1-\frac{1}{2}\log 2-\log 3$

$=1-\frac{1}{2}\times0.3010-0.4771=0.3724$

07 $\log x^3$의 소수 부분과 $\log x$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^3-\log\sqrt{x}=3\log x-\log x^{\frac{1}{2}}$

$=3\log x-\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{5}{2}\log x=$(정수)

$1<x<100$에서 $\log 1<\log x<\log 10^2$

$\therefore 0<\log x<2$

즉, $0<\frac{5}{2}\log x<5$이고, $\frac{5}{2}\log x$는 정수이므로

$\frac{5}{2}\log x=1$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=2$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=3$ 또는

$\frac{5}{2}\log x=4$에서

$\log x=\frac{2}{5}$ 또는 $\log x=\frac{4}{5}$ 또는 $\log x=\frac{6}{5}$ 또는 $\log x=\frac{8}{5}$

$\therefore x=10^{\frac{2}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{4}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{6}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{8}{5}}$

따라서 모든 x의 값의 곱은

$10^{\frac{2}{5}}\times10^{\frac{4}{5}}\times10^{\frac{6}{5}}\times10^{\frac{8}{5}}=10^{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{8}{5}}=10^4$

08 두 별 A, B의 절대 등급이 같으므로 두 별의 절대 등급을 M이라 하자.

지구로부터 A별까지의 거리를 l이라 하면 지구로부터 B별까지의 거리는 $20l$이므로

$M-a=5-5\log l$ ……㉠

$M-b=5-5\log 20l$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$b-a=5\log 20l-5\log l=5(\log 20l-\log l)$

$=5\log\frac{20l}{l}=5\log 20=5\log(10\times2)$

$=5(\log 10+\log 2)=5(1+\log 2)$

$=5\times(1+0.3)=6.5$

LEVEL 2

09 $x=\log_3(2+\sqrt{5})$에서 $3^x=2+\sqrt{5}$

$\therefore 3^x-3^{-x}=3^x-\frac{1}{3^x}$

$=2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

$=2+\sqrt{5}-\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$

$=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}=4$

10 $4\log_n 2=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_n 2=\frac{k}{4}$, $n^{\frac{k}{4}}=2$ $\therefore n=2^{\frac{4}{k}}$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 $\frac{4}{k}$도 자연수이어야 한다.

즉, k는 4의 약수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 k의 값은 1, 2, 4이다.

$k=1$일 때, $n=2^4=16$

$k=2$일 때, $n=2^2=4$

$k=4$일 때, $n=2^1=2$

따라서 모든 n의 값의 합은 $2+4+16=22$

참고 자연수 a가 소수일 때, $a^{\frac{q}{p}}$이 자연수가 되려면 q가 p의 배수 (p가 q의 약수)이어야 한다. (단, p, q는 자연수)

11 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(5, \log_2 b)$를 각각 A, B라 하자.

두 점 A, B를 지나는 직선이 원점 O를 지나므로 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.

즉, (직선 OA의 기울기)=(직선 OB의 기울기)이므로

$\frac{\log_4 a-0}{2-0}=\frac{\log_2 b-0}{5-0}$, $\frac{\log_{2^2} a}{2}=\frac{\log_2 b}{5}$

$\frac{\log_2 a}{4}=\frac{\log_2 b}{5}$, $\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{5}{4}$

$\therefore \log_a b=\frac{5}{4}$

참고 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

=(직선 AC의 기울기)

12 $\log_{16} a=\dfrac{1}{\log_b 4}$에서 $\log_{4^2} a=\log_4 b$

$\dfrac{1}{2}\log_4 a=\log_4 b$, $\log_4 a=2\log_4 b$

$\log_4 a=\log_4 b^2$ $\quad\therefore a=b^2$ ……㉠

$\log_6 ab=3$에서 $ab=6^3$

위 식에 ㉠을 대입하면

$b^2\times b=6^3$

$b^3=6^3$ $\quad\therefore b=6$ ($\because b$는 실수)

$b=6$을 ㉠에 대입하면

$a=6^2=36$

$\therefore a+b=36+6=42$

13 $A=\log_{32}(\log_{\sqrt{3}} 81)=\log_{32}(\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4)$

$=\log_{32} 8=\log_{2^5} 2^3=\dfrac{3}{5}$

$B=7^{\log_7 5-\log_7 10}=7^{\log_7 \frac{5}{10}}=7^{\log_7 \frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$C=\log_{64} 6\times\log_{36} 125\times\log_5 16$

$=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 64}\times\dfrac{\log_2 125}{\log_2 36}\times\dfrac{\log_2 16}{\log_2 5}$

$=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 2^6}\times\dfrac{\log_2 5^3}{\log_2 6^2}\times\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 5}$

$=\dfrac{\log_2 6}{6}\times\dfrac{3\log_2 5}{2\log_2 6}\times\dfrac{4}{\log_2 5}=1$

$\therefore B<A<C$

14 $\log_2 5=a$에서 $\log_5 2=\dfrac{1}{a}$

$\therefore \log_7 4\sqrt{5}=\dfrac{\log_5 4\sqrt{5}}{\log_5 7}=\dfrac{\log_5 4+\log_5\sqrt{5}}{\log_5 7}$

$=\dfrac{\log_5 2^2+\log_5 5^{\frac{1}{2}}}{\log_5 7}=\dfrac{2\log_5 2+\frac{1}{2}}{\log_5 7}$

$=\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{2}}{b}=\dfrac{\frac{a+4}{2a}}{b}=\dfrac{a+4}{2ab}$

15 $\log_a b=\dfrac{\log_b c}{9}=\dfrac{\log_c a}{3}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_a b=k$, $\log_b c=9k$, $\log_c a=3k$ ……㉠

이때

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=\dfrac{\log b}{\log a}\times\dfrac{\log c}{\log b}\times\dfrac{\log a}{\log c}=1$

이므로 ㉠에서

$k\times 9k\times 3k=1$, $27k^3=1$

$k^3=\dfrac{1}{27}$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{3}$ ($\because k$는 실수)

$k=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\log_a b=\dfrac{1}{3}$, $\log_b c=9\times\dfrac{1}{3}=3$, $\log_c a=3\times\dfrac{1}{3}=1$

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=\dfrac{1}{3}+3+1=\dfrac{13}{3}$

16 $\log 6.19=0.7917$, $\log 5.97=0.7760$에서

$\log 61.9+\log\sqrt{5.97}=\log(10\times 6.19)+\log 5.97^{\frac{1}{2}}$

$=\log 10+\log 6.19+\dfrac{1}{2}\log 5.97$

$=1+0.7917+\dfrac{1}{2}\times 0.7760$

$=2.1797$

17 (i) $1\le x<10$일 때

$\log 1\le\log x<\log 10$에서 $0\le\log x<1$

즉, $\log x$의 정수 부분이 0이므로 $f(x)=0$

$\therefore f(1)=f(2)=\cdots=f(9)=0$

(ii) $10\le x<100$일 때

$\log 10\le\log x<\log 100$에서 $1\le\log x<2$

즉, $\log x$의 정수 부분이 1이므로 $f(x)=1$

$\therefore f(10)=f(11)=\cdots=f(99)=1$

(iii) $100\le x<1000$일 때

$\log 100\le\log x<\log 1000$에서 $2\le\log x<3$

즉, $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $f(x)=2$

$\therefore f(100)=f(101)=\cdots=f(200)=2$

(i)~(iii)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(200)$

$=0\times 9+1\times 90+2\times 101=292$

18 $\log N$의 정수 부분을 n (n은 정수), 소수 부분을 α ($0\le\alpha<1$)라 하면 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\dfrac{5}{2}$ ……㉠

$n\alpha=\dfrac{k}{2}$ ……㉡

이때 ㉠에서 $n+\alpha=\dfrac{5}{2}=2+\dfrac{1}{2}$이므로

$n=2$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

$2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{k}{2}$ $\quad\therefore k=2$

19 $\log x^4$의 소수 부분과 $\log\dfrac{1}{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x^4+\log\dfrac{1}{x}=\log x^4+\log x^{-1}$

$=4\log x-\log x$

$=3\log x=$(정수)

$\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1<\log x<2$ ($\because \log x\neq$(정수))

즉, $3<3\log x<6$이고, $3\log x$가 정수이므로

$3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$

$\log x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $\log x=\dfrac{5}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{5}{3}}$

따라서 구하는 x의 개수는 2이다.

20 올해의 매출액을 A원, 매출액이 매년 r %씩 증가했다고 하면 10년 후의 매출액이 $2A$원이므로

$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=2A \quad \therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=2$ ……㉠

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=\log 2,\ 10\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 2$

$\therefore \log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 2=\frac{1}{10}\times 0.3=0.03$

이때 $\log 1.07=0.03$이므로 $\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 1.07$

$1+\frac{r}{100}=1.07,\ \frac{r}{100}=0.07 \quad \therefore r=7$

따라서 매년 7 %씩 매출을 증가시켜야 한다.

Lecture

일정하게 증가하거나 감소하는 경우

현재의 양이 A이고

(1) 매년 r %씩 증가할 때, n년 후의 양 ➡ $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

(2) 매년 r %씩 감소할 때, n년 후의 양 ➡ $A\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

서술형

21 밑의 조건에서 $a-1>0,\ a-1\neq 1$이므로

$a>1,\ a\neq 2 \quad \therefore 1<a<2$ 또는 $a>2$ ……㉠ … ❶

진수의 조건에서 $x^2-2ax+5a>0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+5a>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-5a<0,\ a(a-5)<0$

$\therefore 0<a<5$ ……㉡ … ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<a<2$ 또는 $2<a<5$ … ❸

따라서 정수 a의 값은 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 진수의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 **이차부등식이 항상 성립할 조건**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0,\ D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ ➡ $a>0,\ D\leq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0,\ D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ ➡ $a<0,\ D\leq 0$

22 이차방정식 $x^2-12x+8=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=8$ … ❶

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=12^2-2\times 8=128$ … ❷

$\therefore \log_{\alpha^2+\beta^2}\alpha+\log_{\alpha^2+\beta^2}\beta=\log_{\alpha^2+\beta^2}\alpha\beta$

$=\log_{128}8$

$=\log_{2^7}2^3=\frac{3}{7}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 $\log 26.8=\log(10\times 2.68)=\log 10+\log 2.68$

$=1+\log 2.68=1.4281$

이므로 $\log 2.68=0.4281$ … ❶

$\log 2680=\log(10^3\times 2.68)=\log 10^3+\log 2.68$

$=3+\log 2.68=3.4281$

$\therefore a=3.4281$ … ❷

$\log b=-1.5719=-1-0.5719$

$=-2+0.4281$

$=\log 10^{-2}+\log 2.68$

$=\log(10^{-2}\times 2.68)=\log 0.0268$

$\therefore b=0.0268$ … ❸

$\therefore a+b=3.4281+0.0268=3.4549$ … ❹

채점 기준	비율
❶ $\log 2.68$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

24 질량 10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 4 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량이 8 g이므로

$\log\frac{8}{10}=-1+k\log 4,\ \log\frac{8}{10}+1=k\log 4$

$\log\frac{8}{10}+\log 10=k\log 4,\ \log\left(\frac{8}{10}\times 10\right)=k\log 4$

$\therefore k=\frac{\log 8}{\log 4}=\frac{\log 2^3}{\log 2^2}=\frac{3\log 2}{2\log 2}=\frac{3}{2}$ … ❶

질량 20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 9 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량이 x g이므로

$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{3}{2}\log 9,\ \log\frac{x}{20}+1=\frac{3}{2}\log 9$

$\log\frac{x}{20}+\log 10=\frac{3}{2}\log 9,\ \log\left(\frac{x}{20}\times 10\right)=\log 9^{\frac{3}{2}}$

$\log\frac{x}{2}=\log(3^2)^{\frac{3}{2}}$이므로

$\frac{x}{2}=3^3=27 \quad \therefore x=54$ … ❷

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %

3 지수함수

1 지수함수의 뜻과 그래프

개념 확인 58~61쪽

1 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ

2 (1) 125 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\frac{1}{25}$ (4) 1 (5) $\frac{1}{16}$ (6) 4

3 풀이 참조

4 (1) $y=5^{x+2}+1$ (2) $y=-5^{x}$ (3) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ (4) $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

5 풀이 참조

6 (1) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{5}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{0.1}}>\sqrt[4]{0.001}$

7 (1) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{16}$

1 ㄴ. $y=\frac{1}{2^{x}}$에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$이므로 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 지수함수이다.

ㅂ. $y=6^{-2x}$에서 $y=(6^{-2})^{x}=\left(\frac{1}{36}\right)^{x}$이므로 $\frac{1}{36}$을 밑으로 하는 지수함수이다.

ㄷ, ㅁ. 다항함수이다.

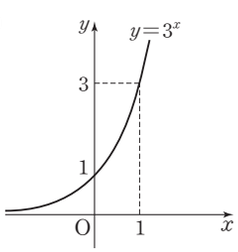
따라서 지수함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

2 (1) $f(3)=5^{3}=125$ (2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

(3) $f(-2)=5^{-2}=\frac{1}{25}$ (4) $g(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$

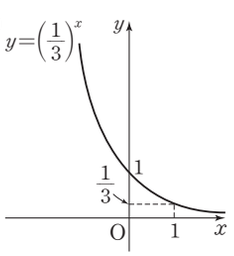
(5) $g(2)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$ (6) $g(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

3 (1)



정의역: 실수 전체의 집합
치역: 양의 실수 전체의 집합
점근선의 방정식: $y=0$

(2)



정의역: 실수 전체의 집합
치역: 양의 실수 전체의 집합
점근선의 방정식: $y=0$

4 (1) $y=5^{x}$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$y-1=5^{x+2}$ $\therefore y=5^{x+2}+1$

(2) $y=5^{x}$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=5^{x}$ $\therefore y=-5^{x}$

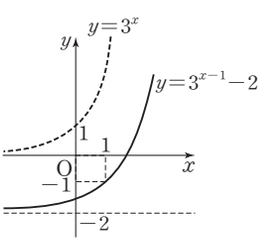
(3) $y=5^{x}$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=5^{-x}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

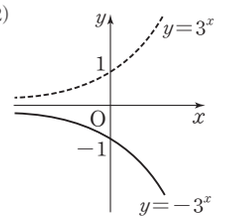
(4) $y=5^{x}$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=5^{-x}$ $\therefore y=-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

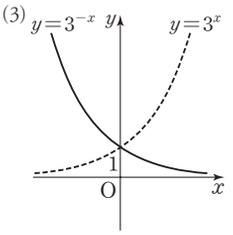
5 (1)



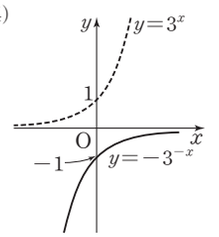
(2)



(3)



(4)



6 (1) $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$

함수 $y=5^{x}$은 밑이 5이고 $5>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$이므로 $5^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{5}<\sqrt{5}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{0.1}}=0.1^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{0.001}=0.1^{\frac{3}{4}}$

함수 $y=0.1^{x}$은 밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $-\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$이므로 $0.1^{-\frac{1}{2}}>0.1^{\frac{3}{4}}$

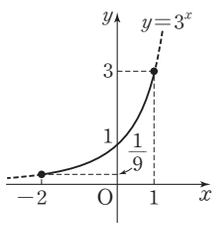
$\therefore \frac{1}{\sqrt{0.1}}>\sqrt[4]{0.001}$

7 (1) 함수 $y=3^{x}$은 밑이 3이고 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서

최댓값은 $x=1$일 때, $y=3^{1}=3$

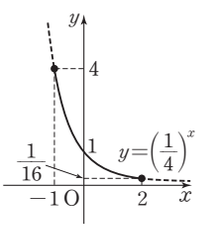
최솟값은 $x=-2$일 때, $y=3^{-2}=\frac{1}{9}$



(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$은 밑이 $\frac{1}{4}$이고 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 따라서

최댓값은 $x=-1$일 때, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

최솟값은 $x=2$일 때, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$



개념 드릴 62쪽

1 (1) $y=6^{x-1}-2$ (2) $y=2^{x+2}+3$

(3) $y=-3^x+2$ (4) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}-3$

2 그래프: 풀이 참조

(1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y|y>2\}$ (3) $y=2$

3 그래프: 풀이 참조

(1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y|y<0\}$ (3) $y=0$

4 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}$ (2) $\frac{1}{49}<7^{-1}<\sqrt{\frac{1}{7}}$

5 (1) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{8}$ (2) 최댓값: 10, 최솟값: $\frac{1}{10}$

1 (1) $y=6^x$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+2$를 대입하면

$y+2=6^{x-1}$ $\therefore y=6^{x-1}-2$

(2) $y=2^x$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하면

$y-3=2^{x+2}$ $\therefore y=2^{x+2}+3$

(3) 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=3^x$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=3^x$ $\therefore y=-3^x$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3^x$에 y 대신 $y-2$를 대입하면

$y-2=-3^x$ $\therefore y=-3^x+2$

(4) 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=4^x$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=4^{-x}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y+3$을 대입하면

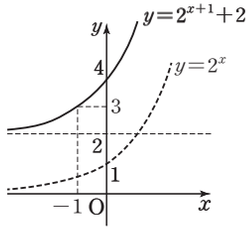
$y+3=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}-3$

2 함수 $y=2^{x+1}+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

(1) 정의역: 실수 전체의 집합

(2) 치역: $\{y|y>2\}$

(3) 점근선의 방정식: $y=2$

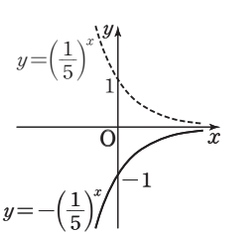


3 함수 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

(1) 정의역: 실수 전체의 집합

(2) 치역: $\{y|y<0\}$

(3) 점근선의 방정식: $y=0$



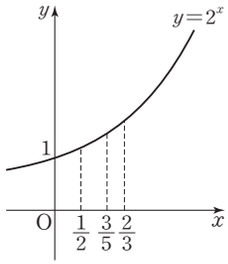
4 (1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$

함수 $y=2^x$은 밑이 2이고 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}$



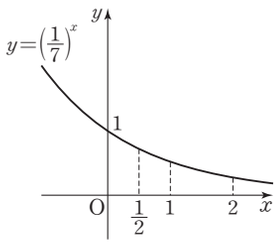
(2) $7^{-1}=\frac{1}{7}$, $\frac{1}{49}=\left(\frac{1}{7}\right)^2$, $\sqrt{\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$은 밑이 $\frac{1}{7}$이고 $0<\frac{1}{7}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $\frac{1}{2}<1<2$이므로

$\left(\frac{1}{7}\right)^2<\frac{1}{7}<\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{1}{49}<7^{-1}<\sqrt{\frac{1}{7}}$

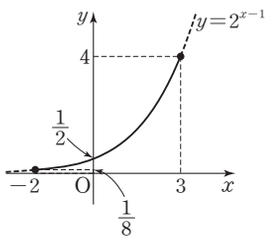


5 (1) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^{x-1}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

최댓값은 $x=3$일 때, $y=2^2=4$

최솟값은 $x=-2$일 때,

$y=2^{-3}=\frac{1}{8}$



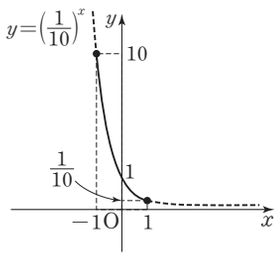
(2) $y=10^{-x}$에서 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $x=-1$일 때,

$y=10^1=10$

최솟값은 $x=1$일 때, $y=10^{-1}=\frac{1}{10}$



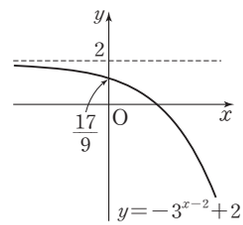
필수 예제 01 지수함수의 그래프 63쪽

01-1 그래프: 풀이 참조, 치역: $\{y|y<2\}$, 점근선의 방정식: $y=2$

|전략| 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-3^{x-2}+2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-3^{x-2}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y|y<2\}$, 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

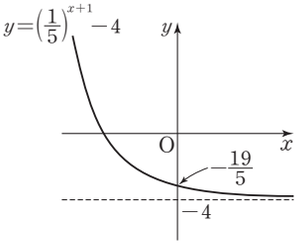


01-2 답 제2, 3, 4사분면

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 평행이동한 것이다.

함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}-4$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.

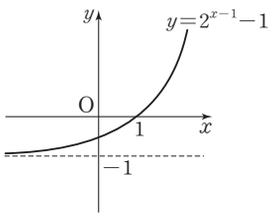


01-3 답 ②

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 것이다.

$y=\frac{1}{2}\times 2^x-1$에서 $y=2^{x-1}-1$

즉, 함수 $y=2^{x-1}-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\frac{1}{2}\times 2^x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 치역은 $\{y|y>-1\}$이다.

② 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지나고 제2사분면을 지나지 않는다.

③ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ $y=\frac{1}{2}\times 2^x-1$에 $x=1$을 대입하면 $y=\frac{1}{2}\times 2^1-1=0$이므로 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

또, 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

필수 예제 02 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 64쪽

02-1 답 7

|전략| 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

함수 $y=5^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=5^{-x}$ $\therefore y=-5^{-x}$ ……㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=-5^{-(x-m)}$ $\therefore y=-5^{-(x-m)}+n$

따라서 $y=-25\times\left(\frac{1}{5}\right)^x+5=-5^{-(x-2)}+5$이고,

함수 $y=-5^{-(x-m)}+n$의 그래프가 함수 $y=-5^{-(x-2)}+5$의 그래프와 일치하므로 $m=2$, $n=5$

$\therefore m+n=2+5=7$

02-2 답 $\frac{3}{2}$

|전략| x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}+1$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로

$k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+3}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

02-3 답 -2

|전략| 주어진 그림에서 함수의 그래프가 원점을 지나고 점근선의 방정식이 $y=-2$임을 이용한다.

함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{-x}$ ……㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=2^{-(x-a)}$ $\therefore y=2^{-(x-a)}+b$

주어진 그림에서 함수 $y=2^{-(x-a)}+b$의 그래프는 원점을 지나므로

$0=2^{-(0-a)}+b$ $\therefore 2^a+b=0$ ……㉡

또, 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-2$이므로 $b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면 $2^a-2=0$, $2^a=2$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$

필수 예제 03 지수함수의 그래프 위의 점 65쪽

03-1 답 -3

|전략| 함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지나면 $n=a^m$이다.

함수 $y=4^x$의 그래프가 점 (a, p)를 지나므로

$p=4^a$

함수 $y=4^x$의 그래프가 점 (b, q)를 지나므로

$q=4^b$

이때 $\frac{p}{q}=\frac{1}{64}$이므로

$\frac{4^a}{4^b}=\frac{1}{64}$, $4^{a-b}=4^{-3}$ $\therefore a-b=-3$

03-2 답 31

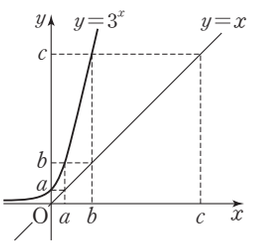
|전략| 함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지나면 $n=a^m$이다.

함수 $y=3^x$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$a=1$

함수 $y=3^x$의 그래프가 점 (a, b), 즉 $(1, b)$를 지나므로

$b=3^1=3$



함수 $y=3^x$의 그래프가 점 (b, c), 즉 $(3, c)$를 지나므로

$c=3^3=27$

$\therefore a+b+c=1+3+27=31$

03-3 답 4

|전략| 함수 $y=a^x\ (a>0, a\neq1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지나면 $n=a^m$이다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 함수 $y=2^x$의 그래프가 점 $(a, 4)$를 지나므로

$2^a=4=2^2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore$ A$(2, 4)$

점 B의 x좌표를 b라 하면 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프가 점 $(b, 4)$를 지나므로

$2^{b-2}=4=2^2,\ b-2=2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore$ B$(4, 4)$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4-2)\times4=4$

필수 예제 04 지수함수를 이용한 수의 대소 비교 66쪽

04-1 답 $3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt{27}$

|전략| (밑)>1이면 지수가 큰 수가 크다.

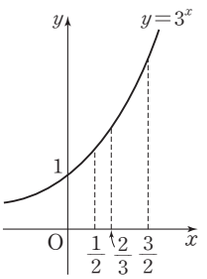
주어진 세 수를 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$3^{0.5}=3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{27}=(3^3)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

이때 함수 $y=3^x$은 밑이 3이고 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



따라서 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이므로

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore 3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt{27}$

04-2 답 $\sqrt[4]{0.2^7}<\sqrt{0.008}<0.2^{\frac{1}{3}}$

|전략| $0<$(밑)<1이면 지수가 작은 수가 크다.

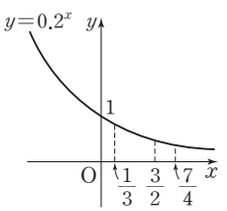
주어진 세 수를 밑이 0.2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$0.2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{0.2^7}=0.2^{\frac{7}{4}}$

$\sqrt{0.008}=(0.2^3)^{\frac{1}{2}}=0.2^{\frac{3}{2}}$

이때 함수 $y=0.2^x$은 밑이 0.2이고 $0<0.2<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



따라서 $\frac{1}{3}<\frac{3}{2}<\frac{7}{4}$이므로

$0.2^{\frac{7}{4}}<0.2^{\frac{3}{2}}<0.2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \sqrt[4]{0.2^7}<\sqrt{0.008}<0.2^{\frac{1}{3}}$

필수 예제 05 지수함수의 최대 · 최소 67쪽

05-1 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: $-\frac{5}{6}$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: $\frac{11}{5}$ (3) 최댓값: 28, 최솟값: $\frac{28}{27}$ (4) 최댓값: $\frac{25}{16}$, 최솟값: 1

|전략| (밑)>1인지 $0<$(밑)<1인지 확인한다.

(1) 함수 $y=6^{x-2}-1$은 밑이 6이고 $6>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=6^{x-2}-1$은 $1\le x\le3$에서

최댓값은 $x=3$일 때,

$y=6^{3-2}-1=6-1=5$

최솟값은 $x=1$일 때,

$y=6^{1-2}-1=\frac{1}{6}-1=-\frac{5}{6}$

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+2$는 밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+2$는 $-2\le x\le0$에서

최댓값은 $x=-2$일 때,

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2+1}+2=5+2=7$

최솟값은 $x=0$일 때,

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{0+1}+2=\frac{1}{5}+2=\frac{11}{5}$

(3) 함수 $y=3^{2-x}+1=3^2\times3^{-x}+1=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$은 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=3^{2-x}+1$은 $-1\le x\le5$에서

최댓값은 $x=-1$일 때,

$y=3^{2-(-1)}+1=27+1=28$

최솟값은 $x=5$일 때,

$y=3^{2-5}+1=\frac{1}{27}+1=\frac{28}{27}$

(4) 함수 $y=5^x\times4^{-x}=5^x\times\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^x$은 밑이 $\frac{5}{4}$이고 $\frac{5}{4}>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=5^x\times4^{-x}$은 $0\le x\le2$에서

최댓값은 $x=2$일 때, $y=5^2\times4^{-2}=\frac{25}{16}$

최솟값은 $x=0$일 때, $y=5^0\times4^0=1$

05-2 답 3

|전략| (밑)>1인지 $0<$(밑)<1인지 확인한다.

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+k$는 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $1\le x\le3$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+k$는

$x=1$일 때, 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3}+k=4+k$를 가지므로

$4+k=7 \qquad \therefore k=3$

필수 예제 06 $y=a^{px^2+qx+r}$ 꼴인 함수의 최대 · 최소 68쪽

06-1 답 (1) 최댓값: 32, 최솟값: 2 (2) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{1}{125}$

| 전략 | 지수가 이차식인 경우에는 지수를 $f(x)$로 놓고 $f(x)$의 값의 범위를 확인한다.

(1) $y=2^{x^2-2x+2}$에서 $f(x)=x^2-2x+2$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+1$

$0\le x\le 3$에서 $f(0)=2$, $f(1)=1$, $f(3)=5$이므로

$1\le f(x)\le 5$

이때 함수 $y=2^{f(x)}$은 밑이 2이고 $2>1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 최대가 되고, $f(x)$가 최소일 때 최소가 된다.

따라서 함수 $y=2^{f(x)}$의

최댓값은 $f(x)=5$, 즉 $x=3$일 때, $y=2^5=32$

최솟값은 $f(x)=1$, 즉 $x=1$일 때, $y=2^1=2$

(2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-4x-1}$에서 $f(x)=-x^2-4x-1$로 놓으면

$f(x)=-(x+2)^2+3$

$-4\le x\le -1$에서 $f(-4)=-1$, $f(-2)=3$, $f(-1)=2$이므로

$-1\le f(x)\le 3$

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$은 밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 최대가 되고, $f(x)$가 최대일 때 최소가 된다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$의

최댓값은 $f(x)=-1$, 즉 $x=-4$일 때, $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$

최솟값은 $f(x)=3$, 즉 $x=-2$일 때, $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{3}=\frac{1}{125}$

Lecture

정의역이 $\{x\mid \alpha\le x\le\beta\}$인 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대 · 최소

(1) $\alpha\le m\le\beta$일 때

➡ $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

(2) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때

➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

06-2 답 2

| 전략 | 지수가 이차식인 경우에는 지수를 $f(x)$로 놓고 $f(x)$의 값의 범위를 확인한다.

$y=a^{-x^2+8x-10}$에서 $f(x)=-x^2+8x-10$으로 놓으면

$f(x)=-(x-4)^2+6$이므로 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 6을 갖는다.

이때 함수 $y=a^{f(x)}$은 밑이 a이고 $a>1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 최대가 된다.

따라서 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=6$, 즉 $x=4$일 때, 최댓값 a^6을 가지므로

$a^6=64=2^6$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>1)$

참고 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서

(1) $a>0$ ➡ $x=m$일 때 최솟값은 n, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$ ➡ $x=m$일 때 최댓값은 n, 최솟값은 없다.

필수 예제 07 a^x 꼴이 반복되는 함수의 최대 · 최소 69쪽

07-1 답 (1) 최댓값: 39, 최솟값: 3 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

| 전략 | (1) $3^x=t\ (t>0)$로 치환하여 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 치환하여 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $y=9^x-2\times 3^{x+1}+12$에서 $y=(3^x)^2-6\times 3^x+12$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서 $3^{-1}\le 3^x\le 3^2$

밑이 3이고 $3>1$이므로 지수가 클수록 크다.

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 9$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$

따라서 $\frac{1}{3}\le t\le 9$에서

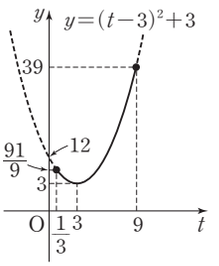
함수 $y=(t-3)^2+3$의

최댓값은 $t=9$일 때,

$y=(9-3)^2+3=39$

최솟값은 $t=3$일 때,

$y=(3-3)^2+3=3$



(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$에서 $y=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 지수가 작을수록 크다.

$\therefore \frac{1}{4}\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le 2$에서

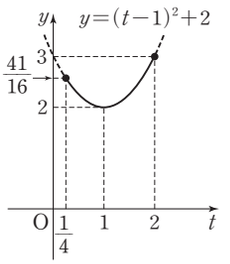
함수 $y=(t-1)^2+2$의

최댓값은 $t=2$일 때,

$y=(2-1)^2+2=3$

최솟값은 $t=1$일 때,

$y=(1-1)^2+2=2$



07-2 답 −3

| 전략 | $2^x=t\ (t>0)$로 치환하여 이차함수의 최대 · 최소를 이용한다.

$y=4^x+k\times 2^{x+1}-1$에서 $y=(2^x)^2+2k\times 2^x-1$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

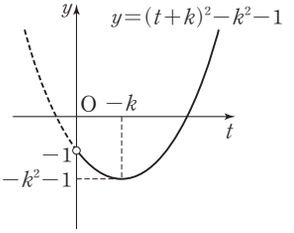
$y=t^2+2kt-1=(t+k)^2-k^2-1$

따라서 함수 $y=(t+k)^2-k^2-1$은 $t=-k$일 때 최솟값 $-k^2-1$을 가지므로 ……㉠

$-k^2-1=-10$, $k^2=9$

$\therefore k=-3$

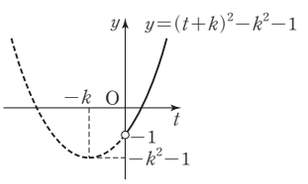
$(\because t>0$에서 $-k>0$이므로 $k<0)$



참고 ㉠에서 $-k\le 0$이면

함수 $y=(t+k)^2-k^2-1$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

함수 $y=(t+k)^2-k^2-1\ (t>0)$은 최솟값을 갖지 않는다.



07-3 답 20

|전략| 함수 $y=a^x+a^{-x}$ 꼴의 최대 • 최소는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$10^{1+x}>0$, $10^{1-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=10^{1+x}+10^{1-x}\geq 2\sqrt{10^{1+x}\times 10^{1-x}}=2\sqrt{10^2}=20$

(단, 등호는 $10^{1+x}=10^{1-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 함수 $y=10^{1+x}+10^{1-x}$의 최솟값은 20이다.

참고 $10^{1+x}=10^{1-x}$의 양변에 10^x을 곱하면

$10^{1+2x}=10$, $10^{2x}=1$

즉, $2x=0$이므로 $x=0$

2 지수함수의 활용

개념 드릴 72쪽

1 (1) $x=3$ (2) $x=2$ (3) $x=-1$ (4) $x=2$ (5) $x=3$
(6) $x=1$ 또는 $x=2$ (7) $x=6$ (8) $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=5$

2 (1) $x\geq 4$ (2) $x\leq -\frac{1}{2}$ (3) $x>1$ (4) $x>\frac{5}{4}$ (5) $x>2$
(6) $-2<x<-1$ (7) $x\geq 1$ (8) $-3\leq x\leq 0$

1 (1) $0.3^x=0.027$에서 $0.3^x=0.3^3$
$\therefore x=3$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}=2$에서 $2^{-(-x+1)}=2^1$
즉, $2^{x-1}=2^1$이므로
$x-1=1$ $\therefore x=2$

(3) $5^{3x+1}=25^x$에서 $5^{3x+1}=(5^2)^x$
즉, $5^{3x+1}=5^{2x}$이므로
$3x+1=2x$ $\therefore x=-1$

(4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x}=7^{x+2}$에서 $(7^{-1})^{-2x}=7^{x+2}$
즉, $7^{2x}=7^{x+2}$이므로
$2x=x+2$ $\therefore x=2$

(5) $(2^x)^2-8\times 2^x=0$
$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-8t=0$, $t(t-8)=0$
$\therefore t=8$ $(\because t>0)$
$t=8$일 때, $2^x=8=2^3$에서 $x=3$

(6) $(3^2)^x-12\times 3^x+27=0$, 즉 $(3^x)^2-12\times 3^x+27=0$
$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$
$\therefore t=3$ 또는 $t=9$
$t=3$일 때, $3^x=3=3^1$에서 $x=1$
$t=9$일 때, $3^x=9=3^2$에서 $x=2$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+6}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x+6}$에서 $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{5}$이므로
$-x+6=0$ $\therefore x=6$

(8) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.
(i) 밑이 같은 경우: $x=5$
(ii) 지수가 0인 경우: $3x-4=0$ $\therefore x=\frac{4}{3}$
(i), (ii)에서 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=5$

2 (1) $5^{x-2}\geq 25$에서 $5^{x-2}\geq 5^2$
밑이 5이고 $5>1$이므로
$x-2\geq 2$ $\therefore x\geq 4$

(2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-4x}\leq\frac{1}{216}$에서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-4x}\leq\left(\frac{1}{6}\right)^3$
밑이 $\frac{1}{6}$이고 $0<\frac{1}{6}<1$이므로
$1-4x\geq 3$ $\therefore x\leq -\frac{1}{2}$

(3) $10^x>\left(\frac{1}{10}\right)^{2x-3}$에서
$10^x>(10^{-1})^{2x-3}$, $10^x>10^{-2x+3}$
밑이 10이고 $10>1$이므로
$x>-2x+3$ $\therefore x>1$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{27}\right)^{-x+2}$에서
$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{-x+2}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+6}$
밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로
$x+1>-3x+6$ $\therefore x>\frac{5}{4}$

(5) $(3^2)^x-9\times 3^x>0$, 즉 $(3^x)^2-9\times 3^x>0$
$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-9t>0$, $t(t-9)>0$ $\therefore t<0$ 또는 $t>9$
그런데 $t>0$이므로 $t>9$
따라서 $3^x>9$이므로 $3^x>3^2$
밑이 3이고 $3>1$이므로 $x>2$

(6) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+8<0$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-6t+8<0$, $(t-2)(t-4)<0$
$\therefore 2<t<4$
따라서 $2<\left(\frac{1}{2}\right)^x<4$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-2<x<-1$

(7) $(5^x)^2-2\times 5^x-15\geq 0$
$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-2t-15\geq 0$, $(t+3)(t-5)\geq 0$
$\therefore t\leq -3$ 또는 $t\geq 5$
그런데 $t>0$이므로 $t\geq 5$
따라서 $5^x\geq 5$이므로 $5^x\geq 5^1$
밑이 5이고 $5>1$이므로 $x\geq 1$

(8) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x-28\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+27\le 0$

즉, $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-28\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+27\le 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-28t+27\le 0$, $(t-1)(t-27)\le 0$

$\therefore\ 1\le t\le 27$

따라서 $1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 27$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $-3\le x\le 0$

필수 예제 01 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 73쪽

01-1 답 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$ (2) $x=-2$ 또는 $x=4$ (3) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ (4) $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$

|전략| 양변의 밑을 같게 하여 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후 방정식 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다.

(1) $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3}$에서 $(2^2)^x=(2^{-1})^{x^2-3}$ $\therefore\ 2^{2x}=2^{-x^2+3}$

따라서 $2x=-x^2+3$이므로

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

(2) $3^{x+5}=(\sqrt{3})^{x^2+2}$에서 $3^{x+5}=(3^{\frac{1}{2}})^{x^2+2}$ $\therefore\ 3^{x+5}=3^{\frac{1}{2}x^2+1}$

따라서 $x+5=\frac{1}{2}x^2+1$이므로 $2x+10=x^2+2$

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

(3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-3x+1}$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right\}^{-3x+1}$

$\therefore\ \left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}$

따라서 $2x^2=3x-1$이므로

$2x^2-3x+1=0$, $(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(4) $8^{x^2}-2^{4-x}=0$에서 $(2^3)^{x^2}=2^{4-x}$ $\therefore\ 2^{3x^2}=2^{4-x}$

따라서 $3x^2=4-x$이므로

$3x^2+x-4=0$, $(3x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$

01-2 답 4

|전략| 양변의 밑을 3으로 같게 한 후 지수가 같아야 함을 이용한다.

$3^{x^2+4x}=9^{x^2-2}$에서 $3^{x^2+4x}=(3^2)^{x^2-2}$ $\therefore\ 3^{x^2+4x}=3^{2x^2-4}$

즉, $x^2+4x=2x^2-4$이므로 $x^2-4x-4=0$

따라서 이차방정식 $x^2-4x-4=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$

필수 예제 02 지수에 미지수를 포함한 방정식 – a^x 꼴이 반복되는 경우 74쪽

02-1 답 (1) $x=2$ (2) $x=3$ (3) $x=0$ (4) $x=0$ 또는 $x=1$

|전략| a^x 꼴이 반복되는 경우는 $a^x=t\,(t>0)$로 치환한 후 t에 대한 방정식을 푼다.

(1) $3^{2x-1}-2\times 3^x-9=0$에서

$3^{2x}\times 3^{-1}-2\times 3^x-9=0$

즉, $\frac{1}{3}\times(3^x)^2-2\times 3^x-9=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$\frac{1}{3}t^2-2t-9=0$, $t^2-6t-27=0$

$(t+3)(t-9)=0$ $\therefore\ t=9\ (\because\ t>0)$

$t=9$일 때, $3^x=9=3^2$에서 $x=2$

(2) $3\times 4^x-11\times 2^{x+1}-16=0$에서

$3\times(2^x)^2-22\times 2^x-16=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$3t^2-22t-16=0$, $(3t+2)(t-8)=0$

$\therefore\ t=8\ (\because\ t>0)$

$t=8$일 때, $2^x=8=2^3$에서 $x=3$

(3) $5^x+5^{-x}=2$에서 $5^x+5^{-x}-2=0$

즉, $5^x+\frac{1}{5^x}-2=0$

$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t+\frac{1}{t}-2=0$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$ $\therefore\ t=1$

$t=1$일 때, $5^x=1=5^0$에서 $x=0$

(4) $2^x+2^{1-x}=3$에서 $2^x+2\times 2^{-x}-3=0$

즉, $2^x+\frac{2}{2^x}-3=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t+\frac{2}{t}-3=0$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

$t=1$일 때, $2^x=1=2^0$에서 $x=0$

$t=2$일 때, $2^x=2=2^1$에서 $x=1$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

02-2 답 2

|전략| 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 $3^x=t\,(t>0)$로 치환하여 얻은 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이다.

$9^x-7\times 3^x+9=0$에서 $(3^x)^2-7\times 3^x+9=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 → $t^2-7t+9=0$에서 $t=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}>0$

$t^2-7t+9=0$ 즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 양의 근을 갖는다.

이때 이 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $3^\alpha\times 3^\beta=9$, 즉 $3^{\alpha+\beta}=3^2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2$

Lecture

a^x 꼴이 반복되는 방정식의 응용 – 두 근의 합

$a>0, a\neq 1$일 때

$pa^{2x}+qa^x+r=0$ (단, $p\neq 0$) ……㉠

㉠에서 $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$pt^2+qt+r=0$ ……㉡

이때 방정식 ㉠의 해가 α, β이면 방정식 ㉡의 해는 a^α, a^β이다.

따라서 이차방정식 ㉡의 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\alpha+a^\beta=-\frac{q}{p}$, $a^\alpha\times a^\beta=\frac{r}{p}$

필수 예제 03 지수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑에 미지수가 있는 경우

75쪽

03-1

답 (1) $x=1$ 또는 $x=4$ (2) $x=1$ 또는 $x=5$

|전략| (1) 양변의 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0일 때로 나누어 푼다.
(2) 양변의 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때로 나누어 푼다.

(1) 지수가 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$x+1=2$ $\therefore x=1$

(ii) 지수가 0일 때

$x-4=0$ $\therefore x=4$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=4$

(2) 밑이 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$5x-2=2x+1$ $\therefore x=1$

(ii) 밑이 1일 때

$x-4=1$ $\therefore x=5$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$

참고 (1) 지수가 같을 경우 $2^0=3^0=1$과 같이 밑이 서로 달라도 지수가 0이면 등식이 성립함을 이용한다.

(2) 밑이 같을 경우 $1^2=1^3=1$과 같이 지수가 서로 달라도 밑이 1이면 등식이 성립함을 이용한다.

03-2

답 1

|전략| 양변의 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때로 나누어 푼다.

밑이 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$-x+12=x^2$에서 $x^2+x-12=0$이므로

$(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>-3$)

(ii) 밑이 1일 때

$x+3=1$ $\therefore x=-2$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=3$이므로 구하는 모든 근의 합은

$-2+3=1$

필수 예제 04 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우

76쪽

04-1

답 (1) $x\geq -6$ (2) $x<4$ (3) $-3\leq x\leq 1$ (4) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

|전략| 밑을 같게 한 후 부등식을 푼다. 이때 (밑)>1이면 부등호의 방향은 그대로이고, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향은 반대가 된다.

(1) $27^{x+2}\geq 3^{2x}$에서

$(3^3)^{x+2}\geq 3^{2x}$, $3^{3x+6}\geq 3^{2x}$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$3x+6\geq 2x$ $\therefore x\geq -6$

(2) $0.2^{x-8}>\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x}$에서

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-8}>\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{2-x}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-8}>\left(\frac{1}{5}\right)^{4-2x}$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$x-8<4-2x$, $3x<12$ $\therefore x<4$

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\geq\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right\}^{2x-3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3}$

밑이 $\frac{2}{3}$이고 $0<\frac{2}{3}<1$이므로

$x^2\leq -2x+3$, $x^2+2x-3\leq 0$

$(x+3)(x-1)\leq 0$ $\therefore -3\leq x\leq 1$

다른 풀이 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$에서

$\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}^{x^2}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-x^2}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$

밑이 $\frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2}>1$이므로

$-x^2\geq 2x-3$, $x^2+2x-3\leq 0$

$(x+3)(x-1)\leq 0$ $\therefore -3\leq x\leq 1$

(4) $(\sqrt{7})^{x^2+x+6}\leq 7^{x^2}$에서

$7^{\frac{1}{2}(x^2+x+6)}\leq 7^{x^2}$

밑이 7이고 $7>1$이므로

$\frac{1}{2}(x^2+x+6)\leq x^2$, $x^2+x+6\leq 2x^2$

$x^2-x-6\geq 0$, $(x+2)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

04-2

답 4

|전략| 밑을 같게 한 후 부등식을 푼다. 이때 (밑)>1이면 부등호의 방향은 그대로이고, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향은 반대가 된다.

$2^{x^2-2x+2}\geq 4^{x^2-x}$에서

$2^{x^2-2x+2}\geq(2^2)^{x^2-x}$, $2^{x^2-2x+2}\geq 2^{2x^2-2x}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x^2-2x+2\geq 2x^2-2x$, $x^2-2\leq 0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\leq 0$ $\therefore -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=2+2=4$

필수 예제 05 지수에 미지수를 포함한 부등식 – a^x 꼴이 반복되는 경우 77쪽

05-1 답 (1) $x\geq 1$ (2) $-2\leq x\leq -1$

|전략| (1) 식을 변형한 후 $3^x=t\ (t>0)$로 치환하여 푼다.

(2) 식을 변형한 후 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 치환하여 푼다.

---

(1) $9^x+2\times 3^{x+1}-27\geq 0$에서 $(3^x)^2+6\times 3^x-27\geq 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+6t-27\geq 0$

$(t+9)(t-3)\geq 0$ $\therefore t\leq -9$ 또는 $t\geq 3$

그런데 $t>0$이므로 $t\geq 3$

따라서 $3^x\geq 3$이므로 $3^x\geq 3^1$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $x\geq 1$

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x-6\times\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+125\leq 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-30\times\left(\frac{1}{5}\right)^x+125\leq 0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-30t+125\leq 0$

$(t-5)(t-25)\leq 0$ $\therefore 5\leq t\leq 25$

따라서 $5\leq\left(\frac{1}{5}\right)^x\leq 25$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\leq\left(\frac{1}{5}\right)^x\leq\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $-2\leq x\leq -1$

05-2 답 1

|전략| 식을 변형한 후 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 치환하여 푼다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+1$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\frac{15}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+\frac{15}{4}t-1>0$

$4t^2+15t-4>0$, $(t+4)(4t-1)>0$ $\therefore t<-4$ 또는 $t>\frac{1}{4}$

그런데 $t>0$이므로 $t>\frac{1}{4}$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x<2$

따라서 정수 x의 최댓값은 1이다.

필수 예제 06 지수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑에 미지수가 있는 경우 78쪽

06-1 답 (1) $1\leq x\leq 2$ (2) $0<x<1$ 또는 $2<x<3$

|전략| 주어진 부등식의 밑이 x이므로 $0<x<1$, $x=1$, $x>1$의 세 가지 경우로 나누어 푼다.

---

(1) (i) $0<x<1$일 때

$2x+1\leq 4x-3$ $\therefore x\geq 2$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(iii) $x>1$일 때

$2x+1\geq 4x-3$ $\therefore x\leq 2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\leq 2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$1\leq x\leq 2$

(2) (i) $0<x<1$일 때

$x^2>5x-6$, $x^2-5x+6>0$

$(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$x^2<5x-6$, $x^2-5x+6<0$

$(x-2)(x-3)<0$ $\therefore 2<x<3$

그런데 $x>1$이므로 $2<x<3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $2<x<3$

필수 예제 07 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용 79쪽

07-1 답 28500년

|전략| 주어진 식에 $f(t)=\frac{5}{16}$, $a=10$을 대입하여 t의 값을 구한다.

처음 이 도자기에 들어 있던 ^{14}C의 양은 10 g이었고, t년이 지난 후 도자기에 남아 있는 ^{14}C의 양은 $\frac{5}{16}$ g이므로

$f(t)=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$에 $f(t)=\frac{5}{16}$, $a=10$을 대입하면

$\frac{5}{16}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}=\frac{1}{32}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\frac{t}{5700}=5$ $\therefore t=28500$

따라서 이 도자기는 28500년 전에 만들어진 것이라고 추측할 수 있다.

07-2 답 5시간

|전략| 처음에 5마리였던 박테리아 A는 2시간 후에 $5\times a^2$마리로 번식한다.

5마리였던 박테리아 A가 2시간 후에 80마리가 되었으므로

$5\times a^2=80$, $a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

5마리의 박테리아 A가 x시간 후에 5120마리 이상이 된다고 하면

$5\times 4^x\geq 5120$, $4^x\geq 1024$

$4^x\geq 4^5$

이때 밑이 4이고 $4>1$이므로

$x \geq 5$

따라서 5마리의 박테리아 A가 처음 5120마리 이상이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후이다.

Lecture

지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용

(1) 처음의 양이 A이고 매시간 일정한 비율 p로 그 양이 변하는 상황이 주어질 때, t시간 후의 양은 Ap^t임을 이용하여 방정식 또는 부등식을 세운다.

(2) 처음의 값이 A이고 일정한 비율 r만큼 n번 증가하는 상황이 주어질 때, n번 증가한 후의 값은 $A(1+r)^n$임을 이용하여 방정식 또는 부등식을 세운다.

개념 정리

80~81쪽

01 양	**02** $1, x$	**03** 증가, 감소	**04** ㉣
05 ㉠	**06** ㉢	**07** ㉡	
08 $n, f(n), m, f(m)$		**09** $m, f(m), n, f(n)$	
10 $=$	**11** $>, >$	**12** $3, 9, 4, 6, 1, -1$	
13 $>, <$	**14** $0, 0$	**15** $9, 1, 9, 9, 0, 2, 0, 2$	

[04~07] 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$의 그래프를

04 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a^{x-m}+n$

05 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^x$, 즉 $y=-a^x$

06 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=a^{-x}$, 즉 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

07 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{-x}$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

12 $2^{x^2+4x}=8^{3x+2}$에서

$2^{x^2+4x}=(2^{\boxed{3}})^{3x+2}$

$\therefore 2^{x^2+4x}=2^{\boxed{9}x+6}$

따라서 $x^2+\boxed{4}x=9x+6$이므로

$x^2-5x-\boxed{6}=0$, $(x+\boxed{1})(x-6)=0$

$\therefore x=\boxed{-1}$ 또는 $x=6$

15 $9^x-10\times 3^x+9<0$에서

$(3^x)^2-10\times 3^x+9<0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+9<0$, $(t-1)(t-\boxed{9})<0$

$\therefore \boxed{1}<t<\boxed{9}$

따라서 $1<3^x<\boxed{9}$이므로 $3^{\boxed{0}}<3^x<3^{\boxed{2}}$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $\boxed{0}<x<\boxed{2}$

중단원 마무리

82~84쪽

01 ③	**02** ⑤	**03** ②	**04** ①
05 ③	**06** ②	**07** ③	**08** ②
09 ④	**10** ④	**11** ①	**12** ③
13 ⑤	**14** ⑤	**15** ②	**16** ①
17 ④	**18** ③	**19** ④	**20** ⑤
21 6	**22** 2	**23** 21	**24** 3

LEVEL 1

01 주어진 그림에서 함수 $y=3^{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-3$이므로

$b=-3$

또, 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=3^{3-a}-3$, $3^{3-a}=3^1$

$3-a=1$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

02 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, 1)$, $(b, 4)$라 하면

$\frac{2^a}{5}=1$에서 $2^a=5$

$\frac{2^b}{5}=4$에서 $2^b=20$

이때 $\frac{2^b}{2^a}=\frac{20}{5}=4$이므로

$2^{b-a}=2^2$ $\therefore b-a=2$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{4-1}{b-a}=\frac{3}{2}$

다른 풀이 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, 1)$, $(b, 4)$라 하면

$\frac{2^a}{5}=1$에서 $2^a=5$이므로 $a=\log_2 5$

$\frac{2^b}{5}=4$에서 $2^b=20$이므로 $b=\log_2 20$

$\therefore b-a=\log_2 20-\log_2 5=\log_2 \frac{20}{5}$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{4-1}{b-a}=\frac{3}{2}$

03 주어진 세 수를 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$A=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

$B=\sqrt[3]{81}=(3^4)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$

$C=\sqrt{9\sqrt{3}}=(3^2\times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$=(3^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{4}}$

이때 함수 $y=3^x$은 밑이 3이고 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{2}{3}<\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$이므로

$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{5}{4}}<3^{\frac{4}{3}}$ $\therefore A<C<B$

04 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$에서 $f(x)=x^2-2x+3$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+2$이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값 2를 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 최대가 된다.

따라서 $f(x)=2$, 즉 $x=1$일 때, 최댓값은 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로

$a=1,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

05 $4^x-9\times2^x+k=0$에서

$(2^2)^x-9\times2^x+k=0$

즉, $(2^x)^2-9\times2^x+k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+k=0$ ……㉠

α, β가 주어진 방정식의 두 근이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\times2^\beta=k$, $2^{\alpha+\beta}=k$

이때 $\alpha+\beta=4$이므로

$k=2^4=16$

06 $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\le12$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^x-12\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+t-12\le0$, $(t+4)(t-3)\le0$ $\therefore -4\le t\le3$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le3$

즉, $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le3$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x\ge-1$

따라서 구하는 x의 최솟값은 -1이다.

07 (i) $0<x<1$일 때

$5x-8\ge3x-2$, $2x\ge6$ $\therefore x\ge3$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식은 성립한다.

(iii) $x>1$일 때

$5x-8\le3x-2$, $2x\le6$ $\therefore x\le3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le3$

(i)~(iii)에서 $1\le x\le3$이므로 구하는 정수 x의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

08 처음 100만 원을 투자하면 t년 후에 121만 원이 되므로

$f(t)=P\times\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}$에 $P=100$, $f(t)=121$을 대입하면

$121=100\times\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}$

$\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}=\frac{121}{100}$, $\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}=\left(\frac{11}{10}\right)^2$

$\frac{t}{3}=2$ $\therefore t=6$

LEVEL 2

09 ㄱ. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{-x}$

즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=5^{2x}=25^x$

즉, 함수 $y=5^{2x}$은 함수 $y=5^x$과 밑이 다르므로 함수 $y=5^{2x}$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=25\times5^x=5^{x+2}$

즉, 함수 $y=25\times5^x$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-5\times\left(\frac{1}{5}\right)^x+3=-5^{1-x}+3=-5^{-(x-1)}+3$

즉, 함수 $y=-5\times\left(\frac{1}{5}\right)^x+3$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=5^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

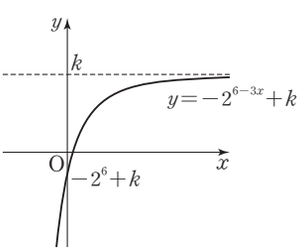
10 $y=-2^{6-3x}+k=-2^{-3(x-2)}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}+k$

즉, 함수 $y=-2^{6-3x}+k$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$-2^6+k\le0$ $\therefore k\le64$

따라서 k의 최댓값은 64이다.



11 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$이므로 $x=-2$

즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=9$가 만나는 점의 x좌표는 -2이므로 A$(-2,\ 9)$

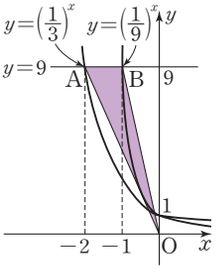
$\left(\frac{1}{9}\right)^x=9$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$이므로

$x=-1$

즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=9$가 만나는 점의 x좌표는 -1이므로 $\mathrm{B}(-1, 9)$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{-1-(-2)\}\times 9=\frac{9}{2}$



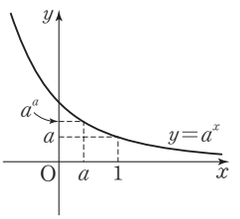
12 함수 $y=3^x$은 밑이 3이고 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

또, 함수 $y=a^x$은 밑이 a이고 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $0<a<1$이므로

$a^0>a^a>a^1$, 즉 $a<a^a<1$

$\therefore 3^a<3^{a^a}<3$



13 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$는 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$는 $x=2$일 때 최소이고 최솟값이 $\frac{3}{2}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}+k=\frac{3}{2}$ $\therefore k=1$

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$은 $x=-1$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}+1=2^2+1=5$

14 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

한편, 4^x+4^{-x}을 t에 대한 식으로 나타내면

$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2$

$=t^2-2$

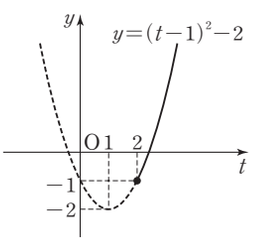
이므로 주어진 함수는

$y=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+1$

$=t^2-2-2t+1=t^2-2t-1$

$=(t-1)^2-2$

따라서 $t\ge 2$일 때 함수 $y=(t-1)^2-2$는 $t=2$에서 최솟값 -1을 갖는다.



참고 $2^x=2^{-x}$에서 $2^{2x}=1$

$2x=0$ $\therefore x=0$

Lecture

공통부분이 a^x+a^{-x} 꼴인 함수의 최대 · 최소

(i) $a^x+a^{-x}=t$로 놓으면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $t=a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $a^x=a^{-x}$일 때 성립)
이므로 $t\ge 2$임을 이용한다.

(ii) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수를 t에 대한 식으로 변형하여 함수의 최대 · 최소를 구한다.

15 $\begin{cases}3^x+3^y=30\\3^{x+y-1}=27\end{cases}$에서 $\begin{cases}3^x+3^y=30\\\frac{1}{3}\times 3^x\times 3^y=27\end{cases}$

$3^x=X$, $3^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=30 & \cdots\cdots ㉠\\\frac{1}{3}XY=27 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=30-X$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{3}X(30-X)=27$

$X^2-30X+81=0$, $(X-3)(X-27)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=27$

㉢에서 $X=3$일 때 $Y=27$, $X=27$일 때 $Y=3$

즉, $3^x=3=3^1$, $3^y=27=3^3$ 또는 $3^x=27=3^3$, $3^y=3=3^1$이므로 $x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$이다.

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=3^2+1^2=10$

Lecture

지수에 미지수를 포함한 방정식 – 연립방정식

(i) $a^x=X$, $a^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓고 X, Y에 대한 연립방정식을 세운다.

(ii) X, Y에 대한 연립방정식을 푼다.

(iii) $a^x=X$, $a^y=Y$에서 x, y의 값을 구한다.

16 지수가 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$x^2-2x+7=10$에서 $x^2-2x-3=0$이므로

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) 지수가 0일 때

$x-2=0$ $\therefore x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 구하는 모든 근의 곱은

$-1\times 2\times 3=-6$

17 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$에서 $(5^x)^2-5\times 5^x+k=0$

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2-5t+k=0$ $\cdots\cdots ㉠$

이때 $t>0$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$D=(-5)^2-4k>0$ $\therefore k<\frac{25}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합) >0이어야 하므로 $5>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 곱) >0이어야 하므로 $k>0$

(i)~(iii)에서 $0<k<\frac{25}{4}$

따라서 정수 k의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6이다.

Lecture

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 두 근이 모두 양수이다. $\Longleftrightarrow D\geq 0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

(2) 두 근이 모두 음수이다. $\Longleftrightarrow D\geq 0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호이다. $\Longleftrightarrow \frac{c}{a}<0$

18 $(2^x-8)\left(\frac{1}{3^x}-9\right)\geq 0$에서 → $AB\geq 0$이면 $A\geq 0,\ B\geq 0$ 또는 $A\leq 0,\ B\leq 0$

(i) $2^x-8\geq 0,\ \frac{1}{3^x}-9\geq 0$일 때

$2^x-8\geq 0$에서 $2^x\geq 2^3$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x\geq 3$ ……㉠

$\frac{1}{3^x}-9\geq 0$에서 $3^{-x}\geq 3^2$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$-x\geq 2$ $\therefore x\leq -2$ ……㉡

그런데 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2^x-8\leq 0,\ \frac{1}{3^x}-9\leq 0$일 때

$2^x-8\leq 0$에서 $2^x\leq 2^3$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x\leq 3$ ……㉢

$\frac{1}{3^x}-9\leq 0$에서 $3^{-x}\leq 3^2$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$-x\leq 2$ $\therefore x\geq -2$ ……㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2\leq x\leq 3$

(i), (ii)에서 $-2\leq x\leq 3$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=3$이므로 $\alpha+\beta=-2+3=1$

19 $4^x-3\times 2^{x+1}+k\geq 0$에서 $(2^x)^2-6\times 2^x+k\geq 0$

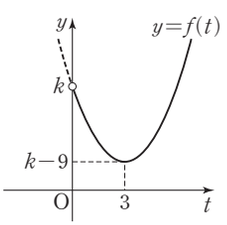
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+k\geq 0$

이때 $f(t)=t^2-6t+k$라 하면

$f(t)=(t-3)^2+k-9$

$t>0$에서 $f(t)$의 최솟값은 $k-9$이므로 부등식 $f(t)\geq 0$이 항상 성립하려면

$k-9\geq 0$ $\therefore k\geq 9$



참고 모든 실수 x에 대하여 부등식 $pa^{2x}+qa^x+r\geq 0$이 성립하려면 $a^x=t\ (t>0)$라 할 때 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r\geq 0$이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

20 수면에서의 빛의 세기가 a W/m^{2}이고, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 $L(d)$ W/m^{2}이므로 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{32}$ 이하가 되려면

$L(d)\leq \frac{1}{32}a$를 만족시켜야 한다.

즉, $a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{4}}\leq\frac{1}{32}a$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{4}}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^5\ (\because a>0)$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{d}{4}\geq 5$ $\therefore d\geq 20$

따라서 d의 최솟값은 20이다.

서술형

21 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-a^x$ ……㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-a^{x-1}+b$ ……㉡ … ❶

㉡의 그래프가 점 (2, 1)을 지나므로

$1=-a^{2-1}+b$ $\therefore -a+b=1$ ……㉢

또, 점근선의 방정식이 $y=3$이므로 $b=3$

$b=3$을 ㉢에 대입하면

$-a+3=1$ $\therefore a=2$ … ❷

$\therefore ab=2\times 3=6$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=a^x$의 그래프를 대칭이동, 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-2^{-x+3}+9$에서

$y=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+9$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-3\leq x\leq 0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^0\leq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\therefore 1\leq t\leq 8$ … ❶

→ 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 지수가 작을수록 크다.

이때 주어진 함수는

$y=t^2-8t+9=(t-4)^2-7$

따라서 $1\leq t\leq 8$에서 함수 $y=(t-4)^2-7$의 최댓값은 $t=8$일 때,

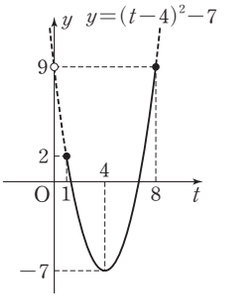
$y=(8-4)^2-7=9$

최솟값은 $t=4$일 때,

$y=(4-4)^2-7=-7$ … ❷

$M=9,\ m=-7$이므로

$M+m=9+(-7)=2$ … ❸



채점 기준	비율
❶ $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 $\frac{1}{9^x}-5\times\frac{1}{3^x}+2=0$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-5\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+2=0$

즉, $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-5\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+2=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-5t+2=0$ ……㉠ … ❶

주어진 방정식의 두 실근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$, $\left(\frac{1}{3}\right)^\beta$이다.

즉, t에 대한 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^\beta=5$, $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha\times\left(\frac{1}{3}\right)^\beta=2$ … ❷

$\therefore\ 9^{-\alpha}+9^{-\beta}=\left(\frac{1}{9}\right)^\alpha+\left(\frac{1}{9}\right)^\beta$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha\right\}^2+\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^\beta\right\}^2$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^\beta\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha\times\left(\frac{1}{3}\right)^\beta$

$=5^2-2\times2=21$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^\beta$, $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha\times\left(\frac{1}{3}\right)^\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $9^{-\alpha}+9^{-\beta}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

24 (i) $0<x<1$일 때

$1+x>x^2-1$, $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore\ -1<x<2$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$ … ❶

(ii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다. … ❷

(iii) $x>1$일 때

$1+x<x^2-1$, $x^2-x-2>0$

$(x+1)(x-2)>0$ $\therefore\ x<-1$ 또는 $x>2$

그런데 $x>1$이므로 $x>2$ … ❸

(i)~(iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>2$이므로 구하는 정수 x의 최솟값은 3이다. … ❹

채점 기준	비율
❶ $0<x<1$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x=1$일 때 부등식이 성립하는지 확인할 수 있다.	20 %
❸ $x>1$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

4 로그함수

1 로그함수의 뜻과 그래프

개념 확인 86~89쪽

1 ㄴ, ㄹ, ㅂ

2 (1) $y=\log_9 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

3 (1) 1 (2) 4 (3) -2 (4) 0 (5) 2 (6) -3

4 풀이 참조

5 (1) $y=\log_5(x+1)+2$ (2) $y=-\log_5 x$
(3) $y=\log_5(-x)$ (4) $y=-\log_5(-x)$ (5) $y=5^x$

6 풀이 참조

7 (1) $\log_{\sqrt{5}}\frac{3}{2}<\log_{\sqrt{5}}4$ (2) $\log_{0.1}7>\log_{0.1}\sqrt{50}$

8 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -1 (2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

1 ㄱ. 다항함수이다.

ㄷ. $y=\log_3 9=\log_3 3^2=2$이므로 상수함수이다.

ㅁ. $y=\log_7 5^x=x\log_7 5$이므로 다항함수이다.

따라서 로그함수인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

2 (1) $y=9^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_9 y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_9 x$

(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_{\frac{1}{4}} y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

3 (1) $f(2)=\log_2 2=1$

(2) $f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

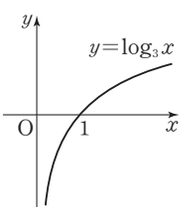
(3) $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(4) $g(1)=\log_{\frac{1}{3}} 1=0$

(5) $g\left(\frac{1}{9}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$

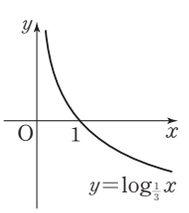
(6) $g(27)=\log_{\frac{1}{3}} 27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3$

4 (1)



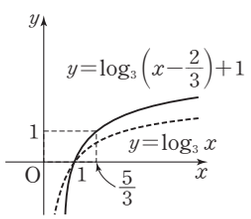
정의역: 양의 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합
점근선의 방정식: $x=0$

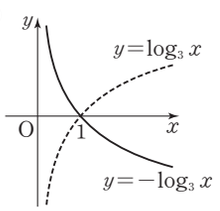
(2)

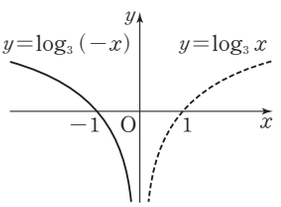


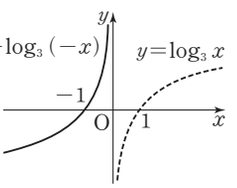
정의역: 양의 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합
점근선의 방정식: $x=0$

5 (1) $y=\log_5 x$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$y-2=\log_5(x+1)$ $\therefore y=\log_5(x+1)+2$
(2) $y=\log_5 x$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\log_5 x$ $\therefore y=-\log_5 x$
(3) $y=\log_5 x$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=\log_5(-x)$
(4) $y=\log_5 x$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\log_5(-x)$ $\therefore y=-\log_5(-x)$
(5) $y=\log_5 x$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면
$x=\log_5 y$ $\therefore y=5^x$

6 (1)


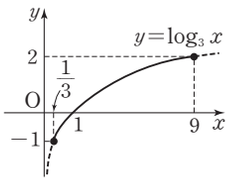
(2)


(3)


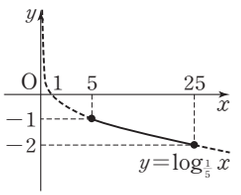
(4)


7 (1) 함수 $y=\log_{\sqrt{5}} x$는 밑이 $\sqrt{5}$이고 $\sqrt{5}>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $\frac{3}{2}<4$이므로 $\log_{\sqrt{5}}\frac{3}{2}<\log_{\sqrt{5}} 4$이다.
(2) 함수 $y=\log_{0.1} x$는 밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $7<\sqrt{50}$이므로 $\log_{0.1} 7>\log_{0.1}\sqrt{50}$이다.

8 (1) 함수 $y=\log_3 x$는 밑이 3이고 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 따라서
최댓값은 $x=9$일 때,
$y=\log_3 9=\log_3 3^2=2$
최솟값은 $x=\frac{1}{3}$일 때,
$y=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$



(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 따라서
최댓값은 $x=5$일 때,
$y=\log_{\frac{1}{5}} 5=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=-1$
최솟값은 $x=25$일 때,
$y=\log_{\frac{1}{5}} 25=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=-2$

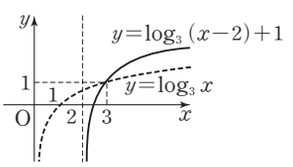


개념 드릴 90쪽

1 (1) $y=\log_2(x+1)+3$ (2) $y=\log_{\frac{1}{10}}(x-2)-4$
(3) $y=\log_4(-x)$ (4) $y=-\log_5 x+1$
2 그래프: 풀이 참조
(1) $\{x|x>2\}$ (2) 실수 전체의 집합 (3) $x=2$
3 그래프: 풀이 참조
(1) $\{x|x>1\}$ (2) 실수 전체의 집합 (3) $x=1$
4 (1) $-\log_6 3<\log_6 5<3\log_6 2$
(2) $\log_{\frac{1}{5}} 9<2\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{7}<-\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$
5 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

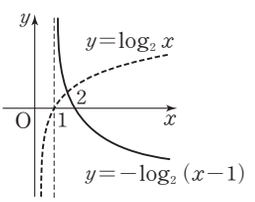
1 (1) $y=\log_2 x$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-3$을 대입하면
$y-3=\log_2(x+1)$ $\therefore y=\log_2(x+1)+3$
(2) $y=\log_{\frac{1}{10}} x$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+4$를 대입하면
$y+4=\log_{\frac{1}{10}}(x-2)$ $\therefore y=\log_{\frac{1}{10}}(x-2)-4$
(3) $y=\log_4 x$에 x 대신 $-x$를 대입하면 $y=\log_4(-x)$
(4) 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\log_5 x$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\log_5 x$ $\therefore y=-\log_5 x$
이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\log_5 x$에 y 대신 $y-1$을 대입하면
$y-1=-\log_5 x$ $\therefore y=-\log_5 x+1$

2 함수 $y=\log_3(x-2)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



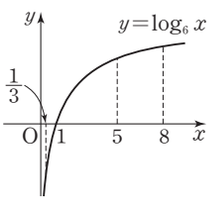
(1) 정의역: $\{x|x>2\}$ (2) 치역: 실수 전체의 집합
(3) 점근선의 방정식: $x=2$

3 함수 $y=-\log_2(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(1) 정의역: $\{x|x>1\}$
(2) 치역: 실수 전체의 집합 (3) 점근선의 방정식: $x=1$

4 (1) $-\log_6 3=\log_6 3^{-1}=\log_6\frac{1}{3}$
$3\log_6 2=\log_6 2^3=\log_6 8$
함수 $y=\log_6 x$는 밑이 6이고 $6>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $\frac{1}{3}<5<8$이므로
$-\log_6 3<\log_6 5<3\log_6 2$이다.



(2) $2\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{7}=\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{7})^2=\log_{\frac{1}{5}}7$

$-\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{5}}4$

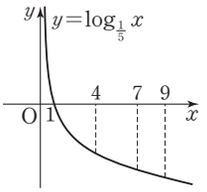
함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$는 밑이 $\frac{1}{5}$이고

$0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면

y의 값은 감소한다.

따라서 $4<7<9$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}9<2\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{7}<-\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$이다.



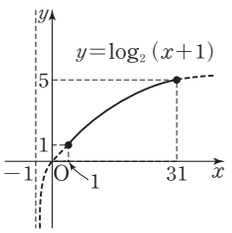
5 (1) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2(x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

최댓값은 $x=31$일 때,

$y=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

최솟값은 $x=1$일 때,

$y=\log_2 2=1$



(2) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

최댓값은 $x=\frac{1}{3}$일 때,

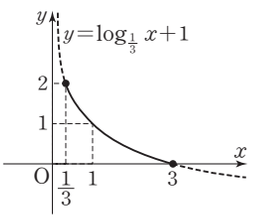
$y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}+1$

$=1+1=2$

최솟값은 $x=3$일 때,

$y=\log_{\frac{1}{3}}3+1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1$

$=-1+1=0$



필수 예제 01 지수함수와 로그함수의 역함수 91쪽

01-1 (1) $y=\log_2\frac{x}{3}+1$ (2) $y=2^x-1$

|전략| 로그의 정의를 이용하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다.

(1) $y=3\times2^{x-1}$에서 $\frac{y}{3}=2^{x-1}$

로그의 정의에 의하여

$\log_2\frac{y}{3}=x-1$

$\therefore x=\log_2\frac{y}{3}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_2\frac{x}{3}+1$

(2) $y=\log_2(x+1)$에서 로그의 정의에 의하여

$2^y=x+1$

$\therefore x=2^y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2^x-1$

01-2 4

|전략| 로그의 정의를 이용하여 역함수를 구한 후 주어진 식과 비교한다.

$y=3^{x-4}+3$에서 $y-3=3^{x-4}$

로그의 정의에 의하여

$\log_3(y-3)=x-4$ $\therefore x=\log_3(y-3)+4$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\log_3(x-3)+4$

따라서 $a=3$, $b=-3$, $c=4$이므로

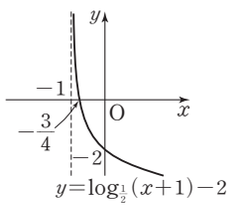
$a+b+c=3+(-3)+4=4$

필수 예제 02 로그함수의 그래프 92쪽

02-1 그래프: 풀이 참조, 정의역: $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식: $x=-1$

|전략| 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 정의역은 $\{x|x>m\}$, 점근선의 방정식은 $x=m$이다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-2$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 진수는 양수이어야 하므로

$x+1>0$ $\therefore x>-1$

따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.

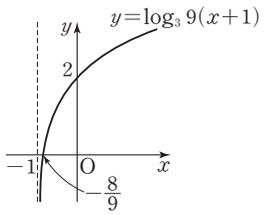
02-2 제4사분면

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동한 것이다.

$y=\log_3 9(x+1)=\log_3 3^2+\log_3(x+1)$

$=\log_3(x+1)+2$

함수 $y=\log_3 9(x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



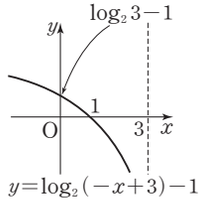
따라서 함수 $y=\log_3 9(x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

02-3 ④

|전략| 함수 $y=\log_2(-x+m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

①, ⑤ $y=\log_2(-x+3)-1=\log_2\{-(x-3)\}-1$

함수 $y=\log_2(-x+3)-1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=3$이다.



② 진수는 양수이어야 하므로
$-x+3>0$ $\therefore x<3$
즉, 정의역은 $\{x|x<3\}$, 치역은 $\{y|y$는 실수$\}$이다.
③ $y=\log_2(-x+3)-1$에 $x=-1$을 대입하면
$y=\log_2 4-1=\log_2 2^2-1=2-1=1$
즉, 그래프는 점 $(-1, 1)$을 지난다.
④ 그래프는 위의 그림과 같으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

필수 예제 03 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 93쪽

03-1 답 5

|전략| y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를 대입하고, x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\log_2(-x)$ ……㉠
㉠의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-n=\log_2\{-(x-m)\}$
$\therefore y=\log_2(-x+m)+n$ ……㉡
한편,
$y=-\log_{\frac{1}{2}}8(2-x)=\log_2 8(2-x)$
$=\log_2 8+\log_2(2-x)$
$=\log_2(2-x)+3$
이고, ㉡의 그래프가 함수 $y=\log_2(2-x)+3$의 그래프와 일치하므로
$m=2$, $n=3$
$\therefore m+n=2+3=5$

03-2 답 6

|전략| 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하고, x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-a$, y 대신 $y+1$을 대입한다.

함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\log_4(-x)$
$\therefore y=-\log_4(-x)$ ……㉠
㉠의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y+1=-\log_4\{-(x-a)\}$
$\therefore y=-\log_4(-x+a)-1$
이때 $y=-\log_4(-x+a)-1$의 그래프가 점 $(2, -2)$를 지나므로
$-2=-\log_4(-2+a)-1$, $\log_4(a-2)=1$
로그의 정의에 의하여
$a-2=4$ $\therefore a=6$

03-3 답 −12

|전략| x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

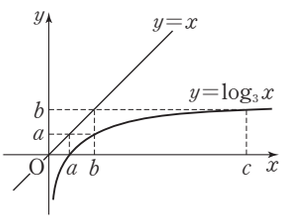
함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-n=\log_3(x-m)$ $\therefore y=\log_3(x-m)+n$
주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$이므로
$m=-3$
함수 $y=\log_3(x+3)+n$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로
$5=\log_3 3+n$ $\therefore n=5-1=4$
$\therefore mn=-3\times 4=-12$

필수 예제 04 로그함수의 그래프 위의 점 94쪽

04-1 답 −2

|전략| $\log_3 a=0$이고 직선 $y=x$ 위의 점은 (x좌표)=(y좌표)임을 이용하여 a, b, c의 값을 차례로 구한다.

오른쪽 그림에서 $\log_3 a=0$이므로
$a=1$
또, $\log_3 b=1$에서 $b=3$
$\log_3 c=3$에서 $c=3^3=27$
$\therefore \log_3\frac{ab}{c}=\log_3\frac{1\times 3}{27}$
$=\log_3\frac{1}{9}$
$=\log_3 3^{-2}=-2$



04-2 답 8

|전략| $\overline{AB}$=(두 점 A, B의 y좌표의 차)임을 이용한다.

$A(k, 1+\log_2 k)$, $B(k, \log_4 k)$이고 $k>1$이므로
$\overline{AB}=1+\log_2 k-\log_4 k$
$=1+\log_2 k-\log_{2^2} k$
$=1+\log_2 k-\frac{1}{2}\log_2 k$
$=1+\frac{1}{2}\log_2 k$
이때 $\overline{AB}=\frac{5}{2}$이므로
$1+\frac{1}{2}\log_2 k=\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\log_2 k=\frac{3}{2}$
$\log_2 k=3$ $\therefore k=2^3=8$

04-3 답 $\log_3 24$

|전략| $\overline{CD}=3$이므로 점 D의 y좌표가 3임을 이용한다.

사각형 ABCD는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로
$\overline{CD}=3$이고, 점 C의 x좌표를 t라 하면
$\log_3 t=3$ $\therefore t=3^3=27$
$\overline{BC}=3$이므로 점 B의 x좌표는 $27-3=24$
$\therefore \overline{BE}=\log_3 24$

필수 예제 05 로그함수를 이용한 수의 대소 비교 95쪽

05-1 답 $\log_{25} 16 < 2\log_5 3 < 2$

|전략| 세 수를 밑이 5인 로그로 나타낸 후 진수의 크기를 비교한다.

$\log_{25} 16$과 2를 밑이 5인 로그로 나타내면

$\log_{25} 16 = \log_{5^2} 4^2 = \log_5 4$

$2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$

또, $2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$

이때 함수 $y = \log_5 x$는 밑이 5이고 $5 > 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $4 < 9 < 25$이므로

$\log_5 4 < \log_5 9 < \log_5 25$

$\therefore \log_{25} 16 < 2\log_5 3 < 2$

05-2 답 $-3 < \log_{\frac{1}{2}} 7 < \log_{\frac{1}{4}} 9$

|전략| 세 수를 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타낸 후 진수의 크기를 비교한다.

-3과 $\log_{\frac{1}{4}} 9$를 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타내면

$-3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{2}} 8$

$\log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 3^2 = \log_{\frac{1}{2}} 3$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$는 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $3 < 7 < 8$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 7 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

$\therefore -3 < \log_{\frac{1}{2}} 7 < \log_{\frac{1}{4}} 9$

필수 예제 06 로그함수의 최대 · 최소 96쪽

06-1 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -3 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 1
(3) 최댓값: -1, 최솟값: -2 (4) 최댓값: 2, 최솟값: -1

|전략| 로그함수 $y = \log_a (px+q)$에서 $a > 1$인지 $0 < a < 1$인지 확인한다.

(1) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$은 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$은 $2 \le x \le 9$에서
최댓값은 $x = 2$일 때, $y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
최솟값은 $x = 9$일 때, $y = \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

(2) $y = -\log_{\frac{1}{10}} (x+1) = \log_{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}} (x+1) = \log_{10} (x+1)$
함수 $y = \log_{10} (x+1)$은 밑이 10이고 $10 > 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $y = \log_{10} (x+1)$은 $9 \le x \le 999$에서
최댓값은 $x = 999$일 때, $y = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$
최솟값은 $x = 9$일 때, $y = \log_{10} 10 = 1$

(3) 함수 $y = \log_5 (x+6) - 3$은 밑이 5이고 $5 > 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $y = \log_5 (x+6) - 3$은 $-1 \le x \le 19$에서
최댓값은 $x = 19$일 때,
$y = \log_5 25 - 3 = \log_5 5^2 - 3 = 2 - 3 = -1$
최솟값은 $x = -1$일 때, $y = \log_5 5 - 3 = 1 - 3 = -2$

(4) 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} (3x-2) + 2$는 밑이 $\frac{1}{4}$이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} (3x-2) + 2$는 $1 \le x \le 22$에서
최댓값은 $x = 1$일 때, $y = \log_{\frac{1}{4}} 1 + 2 = 0 + 2 = 2$
최솟값은 $x = 22$일 때,
$y = \log_{\frac{1}{4}} 64 + 2 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} + 2 = -3 + 2 = -1$

06-2 답 -2

|전략| 로그함수 $y = \log_a (px+q)$에서 $a > 1$인지 $0 < a < 1$인지 확인한다.

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+k) + 1$은 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $4 \le x \le 11$에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+k) + 1$은
$x = 11$일 때, 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} (11+k) + 1$을 가지므로
$\log_{\frac{1}{3}} (11+k) + 1 = -1$, $\log_{\frac{1}{3}} (11+k) = -2$
$11 + k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\therefore k = 9 - 11 = -2$

필수 예제 07 $y = \log_a (px^2+qx+r)$ 꼴인 함수의 최대 · 최소 97쪽

07-1 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -2 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

|전략| 진수가 이차식인 경우 진수를 $f(x)$로 놓고 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x^2+6x-4)$에서
$f(x) = -x^2+6x-4$로 놓으면 $f(x) = -(x-3)^2+5$
$4 \le x \le 5$에서 $f(4) = 4$, $f(5) = 1$이므로 $1 \le f(x) \le 4$
이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$는 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로
$f(x)$가 최소일 때 최대가 되고, $f(x)$가 최대일 때 최소가 된다.
따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$의
최댓값은 $f(x) = 1$, 즉 $x = 5$일 때, $y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
최솟값은 $f(x) = 4$, 즉 $x = 4$일 때,
$y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

(2) 함수 $y = \log_3 (2x^2-4x+3)$에서
$f(x) = 2x^2-4x+3$으로 놓으면 $f(x) = 2(x-1)^2+1$
$0 \le x \le 3$에서 $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(3) = 9$이므로
$1 \le f(x) \le 9$
이때 함수 $y = \log_3 f(x)$는 밑이 3이고 $3 > 1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 최대가 되고, $f(x)$가 최소일 때 최소가 된다.
따라서 함수 $y = \log_3 f(x)$의
최댓값은 $f(x) = 9$, 즉 $x = 3$일 때, $y = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
최솟값은 $f(x) = 1$, 즉 $x = 1$일 때, $y = \log_3 1 = 0$

07-2 답 1

|전략| 진수가 이차식인 경우 진수를 $f(x)$로 놓고 최댓값과 최솟값을 구한다.

함수 $y=\log_5(x^2-4x+9)$에서 $f(x)=x^2-4x+9$로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2+5$이므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 5를 갖는다.
이때 함수 $y=\log_5 f(x)$는 밑이 5이고 $5>1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 최소가 된다.
따라서 함수 $y=\log_5 f(x)$는 $f(x)=5$, 즉 $x=2$일 때, 최솟값 $\log_5 5=1$을 가지므로
$a=2,\ b=1$
$\therefore\ a-b=2-1=1$

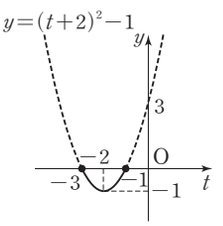
참고 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서
(1) $a>0$ ➡ $x=m$일 때 최솟값은 n, 최댓값은 없다.
(2) $a<0$ ➡ $x=m$일 때 최댓값은 n, 최솟값은 없다.

필수 예제 08 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 함수의 최대 · 최소 98쪽

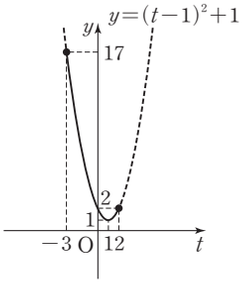
08-1 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 17, 최솟값: 1

|전략| $\log_a x=t$로 치환한 후 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $y=(\log_2 x)^2-4\log_{\frac{1}{2}} x+3$에서
$y=(\log_2 x)^2+4\log_2 x+3$
$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{8}\le x\le\frac{1}{2}$에서
$\log_2\frac{1}{8}\le\log_2 x\le\log_2\frac{1}{2}$ ← 밑이 2이고 $2>1$이므로 진수가 클수록 크다.
$\therefore\ -3\le t\le -1$
이때 주어진 함수는
$y=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$
따라서 $-3\le t\le -1$에서
함수 $y=(t+2)^2-1$의
최댓값은 $t=-3$ 또는 $t=-1$일 때,
$y=(-3+2)^2-1=(-1+2)^2-1=0$
최솟값은 $t=-2$일 때,
$y=(-2+2)^2-1=-1$



(2) $y=(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x^2+2$에서
$y=(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-2\log_{\frac{1}{3}} x+2$
$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $\frac{1}{9}\le x\le 27$에서
$\log_{\frac{1}{3}} 27\le\log_{\frac{1}{3}} x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$ ← 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 진수가 작을수록 크다.
$\therefore\ -3\le t\le 2$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$
따라서 $-3\le t\le 2$에서
함수 $y=(t-1)^2+1$의
최댓값은 $t=-3$일 때,
$y=(-3-1)^2+1=17$
최솟값은 $t=1$일 때,
$y=(1-1)^2+1=1$



08-2 답 5

|전략| 함수 $y=\log_a x+\log_x a$ ($\log_a x>0,\ \log_x a>0$) 꼴의 최대 · 최소는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$y=\log_5 125x+\log_x 5=\log_5 125+\log_5 x+\log_x 5$
$=\log_5 5^3+\log_5 x+\log_x 5=3+\log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}$

$x>1$에서 $\log_5 x>0,\ \frac{1}{\log_5 x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$y=3+\log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}\ge 3+2\sqrt{\log_5 x\times\frac{1}{\log_5 x}}=3+2=5$
$\left(\text{단, 등호는 } \log_5 x=\frac{1}{\log_5 x},\ \text{즉 } x=5\text{일 때 성립}\right)$
따라서 함수 $y=\log_5 125x+\log_x 5$의 최솟값은 5이다.

참고 $\log_5 x=\frac{1}{\log_5 x}$에서 $(\log_5 x)^2=1$
$x>1$에서 $\log_5 x>0$이므로
$\log_5 x=1$ $\therefore\ x=5$

2 로그함수의 활용

개념 드릴 101쪽

1 (1) $x=11$ (2) $x=4$ (3) $x=5$ (4) $x=2$
(5) $x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=4$ (6) $x=2$
(7) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$ (8) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

2 (1) $x\ge 3$ (2) $x>\frac{5}{9}$ (3) $3<x<4$
(4) $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le 3$ (5) $-3<x<-1$ 또는 $0<x<2$
(6) $0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>9$ (7) $\frac{1}{2}<x<32$ (8) $\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$

1 (1) 진수의 조건에서 $x-2>0$ $\therefore\ x>2$ ……㉠
로그의 정의에 의하여 $x-2=3^2=9$
$\therefore\ x=11$
따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=11$

(2) 진수의 조건에서 $3x+4>0$ $\therefore\ x>-\frac{4}{3}$ ……㉠
로그의 정의에 의하여 $3x+4=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$
$3x=12$ $\therefore\ x=4$
따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=4$

(3) 진수의 조건에서 $x+2>0,\ 2x-3>0$이므로
$x>\frac{3}{2}$ ……㉠
밑이 같으므로 $x+2=2x-3$
$\therefore\ x=5$
따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

(4) 진수의 조건에서 $x-1>0,\ 7-3x>0$이므로
$1<x<\frac{7}{3}$ ……㉠

밑이 같으므로 $x-1=7-3x$

$4x=8$ $\therefore x=2$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$

(5) 진수의 조건에서 $2x-4>0$ $\therefore x>2$ ……㉠

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$이므로

$1<x<2$ 또는 $x>2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x>2$ ……㉢

(i) 밑이 같은 경우: $x-1=3$ $\therefore x=4$

$x=4$는 ㉢을 만족시킨다.

(ii) 진수가 1인 경우: $2x-4=1$ $\therefore x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$는 ㉢을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=4$

(6) 진수의 조건에서 $x+5>0$ $\therefore x>-5$ ……㉠

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0<x<1$ 또는 $x>1$ ……㉢

(i) 밑이 같은 경우: $x=2$

$x=2$는 ㉢을 만족시킨다.

(ii) 진수가 1인 경우: $x+5=1$ $\therefore x=-4$

$x=-4$는 ㉢을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=2$

(7) $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4=0$, $(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$일 때, $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$t=2$일 때, $\log_2 x=2$에서 $x=2^2=4$

따라서 구하는 해는 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

(8) $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

$t=-1$일 때, $\log_3 x=-1$에서 $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$t=4$일 때, $\log_3 x=4$에서 $x=3^4=81$

따라서 구하는 해는 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

2 (1) 진수의 조건에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$ ……㉠

$\log_2(x+1)\geq2$에서 $\log_2(x+1)\geq\log_2 4$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $x+1\geq4$ $\therefore x\geq3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq3$

(2) 진수의 조건에서 $2x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $2x-1>\frac{1}{9}$

$2x>\frac{10}{9}$ $\therefore x>\frac{5}{9}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac{5}{9}$

(3) 진수의 조건에서 $5-x>0$, $x-3>0$이므로

$3<x<5$ ……㉠

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $5-x>x-3$

$2x<8$ $\therefore x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$

(4) 진수의 조건에서 $x^2-2x>0$, $x(x-2)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ ……㉠

밑이 5이고 $5>1$이므로 $x^2-2x\leq3$

$x^2-2x-3\leq0$, $(x+1)(x-3)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1\leq x<0$ 또는 $2<x\leq3$

(5) 진수의 조건에서 $x^2+x>0$, $x(x+1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>0$ ……㉠

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x^2+x<6$

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<-1$ 또는 $0<x<2$

(6) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2>0$

$(t+1)(t-2)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>2$

따라서 $\log_3 x<-1$ 또는 $\log_3 x>2$이므로

$\log_3 x<\log_3\frac{1}{3}$ 또는 $\log_3 x>\log_3 9$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>9$

(7) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-5<4t$

$t^2-4t-5<0$, $(t+1)(t-5)<0$ $\therefore -1<t<5$

따라서 $-1<\log_2 x<5$이므로

$\log_2\frac{1}{2}<\log_2 x<\log_2 32$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\frac{1}{2}<x<32$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<32$

(8) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $t^2+2\leq3t$

$t^2-3t+2\leq0$, $(t-1)(t-2)\leq0$ $\therefore 1\leq t\leq2$

따라서 $1\leq\log_{\frac{1}{2}} x\leq2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\leq\log_{\frac{1}{2}} x\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}$

필수 예제 01 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 102쪽

01-1 답 (1) $x=6$ (2) $x=1$

|전략| $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0, a\neq1)$ 꼴로 변형한 후 $f(x)=g(x)$ $(f(x)>0, g(x)>0)$임을 이용한다.

(1) 진수의 조건에서 $x^2-2x-15>0$, $x-3>0$이므로

(i) $x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$

(ii) $x-3>0$에서 $x>3$

(i), (ii)에서 $x>5$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x-15)+1=-\log_3(x-3)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x-15)+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}(x^2-2x-15)=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

밑이 같으므로

$\frac{1}{3}(x^2-2x-15)=x-3$

$x^2-2x-15=3(x-3)$

$x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=6$

(2) 진수의 조건에서 $x+3>0$이므로 $x>-3$ ……㉠

$\log_2(x+3)=\log_4(x+3)+1$에서

$\log_2(x+3)=\log_4(x+3)+\log_4 4$

$\log_2(x+3)=\log_{2^2}4(x+3)$

$\log_2(x+3)=\frac{1}{2}\log_2 4(x+3)$

$2\log_2(x+3)=\log_2 4(x+3)$

$\log_2(x+3)^2=\log_2 4(x+3)$

밑이 같으므로 $(x+3)^2=4(x+3)$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=1$

01-2 답 $x=2$ 또는 $x=3$

|전략| $\log_a f(x)=\log_b f(x)$이면 $a=b$ 또는 $f(x)=1$임을 이용한다.

(단, $a>0, a\neq1, b>0, b\neq1, f(x)>0$)

진수의 조건에서 $x-1>0$ $\therefore x>1$ ……㉠

밑의 조건에서

$3x-2>0$, $3x-2\neq1$, $x+4>0$, $x+4\neq1$

$\therefore \frac{2}{3}<x<1$ 또는 $x>1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$ ……㉢

(i) 밑이 같은 경우: $3x-2=x+4$ $\therefore x=3$

$x=3$은 ㉢을 만족시킨다.

(ii) 진수가 1인 경우: $x-1=1$ $\therefore x=2$

$x=2$는 ㉢을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

필수 예제 02 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 103쪽

02-1 답 (1) $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=16$ (2) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

|전략| $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(1) $(\log_{\frac{1}{4}}x)^2=\log_{\frac{1}{4}}x+6$에서 $(\log_{\frac{1}{4}}x)^2-\log_{\frac{1}{4}}x-6=0$

$\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면 $t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$t=-2$일 때, $\log_{\frac{1}{4}}x=-2$에서 $x=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

$t=3$일 때, $\log_{\frac{1}{4}}x=3$에서 $x=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

따라서 구하는 해는

$x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=16$

(2) $\log_5 x=2\log_x 5+1$, 즉 $\log_5 x=\frac{2}{\log_5 x}+1$에서

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t=\frac{2}{t}+1$, $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log_5 x=-1$에서 $x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

$t=2$일 때, $\log_5 x=2$에서 $x=5^2=25$

따라서 구하는 해는

$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

02-2 답 27

|전략| 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 $\log_3 x=t$로 치환하여 얻은 방정식의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

$(\log_3 x)^2=3\log_3 x+6$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-6=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=3$, $\log_3\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha\beta=3^3=27$

참고 $\log_3 x=t$에서 $x=3^t$

이때 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $x=3^t>0$이다.

따라서 진수의 조건을 만족시킨다.

필수 예제 03 지수에 로그가 있는 방정식 104쪽

03-1 답 (1) $x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$ (2) $x=5$

|전략| (1) 주어진 식의 양변에 상용로그를 취한다.

(2) 주어진 식을 변형하여 $3^{\log_3 x}=t$로 치환한다.

(1) $x^{\log x}=\frac{1000}{x^2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{1000}{x^2}$

$\log x\times\log x=\log 1000-\log x^2$

$(\log x)^2+2\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

$t=-3$일 때, $\log x=-3$에서 $x=10^{-3}=\frac{1}{1000}$

$t=1$일 때, $\log x=1$에서 $x=10$

따라서 구하는 해는

$x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$

(2) 로그의 성질에 의하여 $x^{\log_5 3}=3^{\log_5 x}$이므로 주어진 방정식은

$3^{\log_5 x}\times 3^{\log_5 x}-3^{\log_5 x}-6=0$

$(3^{\log_5 x})^2-3^{\log_5 x}-6=0$

$3^{\log_5 x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

$t=3$일 때, $3^{\log_5 x}=3$에서

$\log_5 x=1$ $\quad\therefore\ x=5$

따라서 구하는 해는 $x=5$

필수 예제 04 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – 밑을 같게 할 수 있는 경우 105쪽

04-1 답 (1) $3<x\le 4$ (2) $x\ge 2$

|전략| $a>1$일 때 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$이면 $0<f(x)<g(x)$이고, $0<a<1$일 때 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$이면 $f(x)>g(x)>0$임을 이용한다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-3>0$이므로

$x>3$ ……㉠

$\log_{\frac12} x+\log_{\frac12}(x-3)\ge -2$에서

$\log_{\frac12} x(x-3)\ge \log_{\frac12} 4$

밑이 $\frac12$이고 $0<\frac12<1$이므로

$x(x-3)\le 4$, $x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore\ -1\le x\le 4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x\le 4$

(2) 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x>0$이므로

$x>0$ ……㉠

$\log_4(x+2)\le \log_2 x$에서

$\log_{2^2}(x+2)\le \log_2 x$

$\frac12\log_2(x+2)\le \log_2 x$

$\log_2(x+2)\le 2\log_2 x$

$\log_2(x+2)\le \log_2 x^2$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x+2\le x^2$, $x^2-x-2\ge 0$

$(x+1)(x-2)\ge 0$ $\quad\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\ge 2$

04-2 답 2

|전략| 밑을 같게 한 후 진수에 대한 부등식을 세운다. 이때 (밑)>1이면 부등호의 방향은 그대로이고, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향은 반대가 된다.

진수의 조건에서 $5x>0$, 즉 $x>0$이고, $\log_2 5x>0$

$\log_2 5x>0$에서 $\log_2 5x>\log_2 1$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $5x>1$ $\quad\therefore\ x>\frac15$ ……㉠

$\log_{\frac13}(\log_2 5x)<-1$에서

$\log_{\frac13}(\log_2 5x)<\log_{\frac13} 3$

밑이 $\frac13$이고 $0<\frac13<1$이므로 $\log_2 5x>3$

$\therefore\ \log_2 5x>\log_2 8$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$5x>8$ $\quad\therefore\ x>\frac85$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac85$

따라서 정수 x의 최솟값은 2이다.

필수 예제 05 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식 – $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 106쪽

05-1 답 (1) $\frac{1}{27}<x<\sqrt3$ (2) $\frac{1}{64}\le x\le 2$

|전략| $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$2(\log_3 x)^2+5\log_3 x-3<0$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면

$2t^2+5t-3<0$, $(t+3)(2t-1)<0$ $\quad\therefore\ -3<t<\frac12$

따라서 $-3<\log_3 x<\frac12$이므로

$\log_3\frac{1}{27}<\log_3 x<\log_3\sqrt3$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $\frac{1}{27}<x<\sqrt3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27}<x<\sqrt3$

(2) 진수의 조건에서 $4x>0$, $8x>0$이므로 $x>0$ ……㉠

$\log_{\frac12} 4x\times\log_{\frac12} 8x\le 12$에서

$(\log_{\frac12} 4+\log_{\frac12} x)(\log_{\frac12} 8+\log_{\frac12} x)\le 12$

$(\log_{\frac12} x-2)(\log_{\frac12} x-3)\le 12$

$(\log_{\frac12} x)^2-5\log_{\frac12} x-6\le 0$

$\log_{\frac12} x=t$로 놓으면

$t^2-5t-6\le 0$, $(t+1)(t-6)\le 0$ $\quad\therefore\ -1\le t\le 6$

따라서 $-1\le\log_{\frac12} x\le 6$이므로

$\log_{\frac12} 2\le\log_{\frac12} x\le\log_{\frac12}\frac{1}{64}$

밑이 $\frac12$이고 $0<\frac12<1$이므로 $\frac{1}{64}\le x\le 2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{64}\le x\le 2$

05-2 답 8

|전략| 주어진 부등식의 좌변을 $\log_2 x$ 꼴이 반복되는 형태로 변형하여 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$(3+\log_{\frac{1}{2}} x)\times\log_2 x+4\geq 0$에서

$(3-\log_2 x)\times\log_2 x+4\geq 0$

$-(\log_2 x)^2+3\log_2 x+4\geq 0$

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4\leq 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4\leq 0$, $(t+1)(t-4)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq t\leq 4$

따라서 $-1\leq\log_2 x\leq 4$이므로

$\log_2\frac{1}{2}\leq\log_2 x\leq\log_2 16$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\frac{1}{2}\leq x\leq 16$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}\leq x\leq 16$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=16$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{2}\times 16=8$

필수 예제 06 지수에 로그가 있는 부등식 107쪽

06-1 답 (1) $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ (2) $0<x<1$ 또는 $x>1000$

|전략| (1) 주어진 부등식의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취한다.

(2) 주어진 부등식을 변형하여 $3^{\log x}=t$로 치환한다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x}>4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x}<\log_{\frac{1}{2}} 4x^3$

$\log_{\frac{1}{2}} x\times\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} 4+\log_{\frac{1}{2}} x^3$

$\log_{\frac{1}{2}} x\times\log_{\frac{1}{2}} x<-2+3\log_{\frac{1}{2}} x$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-3\log_{\frac{1}{2}} x+2<0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore\ 1<t<2$

따라서 $1<\log_{\frac{1}{2}} x<2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

로그의 성질에 의하여 $x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 주어진 부등식은

$3^{\log x}\times 3^{\log x}-28\times 3^{\log x}+27>0$

$(3^{\log x})^2-28\times 3^{\log x}+27>0$

$3^{\log x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-28t+27>0$, $(t-1)(t-27)>0$

$\therefore\ 0<t<1$ 또는 $t>27$ ($\because\ t>0$)

$3^{\log x}=t$에서 $0<3^{\log x}<1$ 또는 $3^{\log x}>27$이므로

$3^{\log x}<3^0$ 또는 $3^{\log x}>3^3$

지수의 밑이 3이고 $3>1$이므로

$\log x<0$ 또는 $\log x>3$

따라서 $\log x<\log 1$ 또는 $\log x>\log 1000$에서

로그의 밑이 10이고 $10>1$이므로

$x<1$ 또는 $x>1000$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>1000$

필수 예제 07 로그를 포함한 부등식이 항상 성립할 조건 108쪽

07-1 답 $0<k\leq\frac{1}{4}$

|전략| 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면 $a>0$이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

진수의 조건에서 $k>0$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 x가 모든 양수이므로 t는 모든 실수이고,

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-4\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_{\frac{1}{2}} k\geq 0$에서

$t^2-4t+2\log_{\frac{1}{2}} k\geq 0$ ……㉡

모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 하므로 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+2\log_{\frac{1}{2}} k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(-2)^2-2\log_{\frac{1}{2}} k\leq 0$에서 $2-\log_{\frac{1}{2}} k\leq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} k\geq 2$, $\log_{\frac{1}{2}} k\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $k\leq\frac{1}{4}$ ……㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $0<k\leq\frac{1}{4}$

Lecture

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ ➡ $a>0$, $D\leq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ ➡ $a<0$, $D\leq 0$

07-2 답 4

|전략| 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a>0$이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

$(\log_3 x)^2>\log_3\frac{x^2}{k}$에서 $(\log_3 x)^2>\log_3 x^2-\log_3 k$

$(\log_3 x)^2>2\log_3 x-\log_3 k$

$\therefore\ (\log_3 x)^2-2\log_3 x+\log_3 k>0$

진수의 조건에서 $k>0$ ……㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 x가 모든 양수이므로 t는 모든 실수이고,
$(\log_3 x)^2-2\log_3 x+\log_3 k>0$에서
$t^2-2t+\log_3 k>0$ ……㉡
모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 하므로 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+\log_3 k=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.
즉, $\frac{D}{4}=(-1)^2-\log_3 k<0$에서 $1-\log_3 k<0$
$\log_3 k>1$, $\log_3 k>\log_3 3$
밑이 3이고 $3>1$이므로 $k>3$ ……㉢
㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $k>3$
따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

필수 예제 08 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식의 실생활에의 활용 109쪽

08-1 답 $10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$

|전략| 주어진 관계식에 알맞은 문자 또는 값을 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 방정식을 푼다.

지하철의 소리의 크기가 140 dB일 때 지하철의 소리의 세기가 $100\ \mathrm{W/m^2}$이므로
$140=k\log\frac{100}{10^{-12}}$, $140=k\log 10^{14}$
$14k=140$ $\therefore k=10$
대화하는 소리의 크기가 60 dB일 때, 대화하는 소리의 세기를 $I\ \mathrm{W/m^2}$이라 하면
$60=10\log\frac{I}{10^{-12}}$, $60=10(\log I-\log 10^{-12})$
$\log I+12=6$, $\log I=-6$
$\log I=\log 10^{-6}$ $\therefore I=10^{-6}$
따라서 대화하는 소리의 세기는 $10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$이다.

08-2 답 6시간

|전략| 처음 실내오염도를 A라 할 때, 1시간마다 실내오염도의 a %가 줄어들면 1시간 후의 실내오염도는 $A\times\left(1-\frac{a}{100}\right)$이다.

처음 실내오염도를 A라 하면 공기청정기를 가동한 지 x시간 후의 실내오염도는 $A\times\left(1-\frac{20}{100}\right)^x$, 즉 $A\times\left(\frac{8}{10}\right)^x$이다.
공기청정기를 가동한 지 x시간 후에 실내오염도가 처음 실내오염도의 $\frac{1}{4}$ 이하가 된다고 하면
$A\times\left(\frac{8}{10}\right)^x\le\frac{1}{4}A$, $\left(\frac{8}{10}\right)^x\le\frac{1}{4}$
양변에 상용로그를 취하면
$\log\left(\frac{8}{10}\right)^x\le\log\frac{1}{4}$, $x(\log 8-1)\le-\log 4$
$x(3\log 2-1)\le-2\log 2$, $x(0.9-1)\le-0.6$
$-0.1x\le-0.6$ $\therefore x\ge6$
따라서 실내오염도가 처음 실내오염도의 $\frac{1}{4}$ 이하가 되는 것은 공기청정기를 가동한 지 6시간 후부터이다.

개념 정리 110~111쪽

01 양 **02** $1, y$ **03** 증가, 감소 **04** ㉣
05 ㉠ **06** ㉢ **07** ㉡
08 $n, f(n), m, f(m)$ **09** $m, f(m), n, f(n)$
10 a^b **11** $=, >, >$ **12** $-\frac{1}{2}$, 7, 22, 11, $-\frac{11}{2}$, 2
13 $f(x), g(x), g(x), f(x)$ **14** 로그
15 $2, -2, -2, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

12 진수의 조건에서 $x+3>0$, $2x+1>0$이므로
$x>\boxed{-\frac{1}{2}}$ ……㉠
$\log_5(x+3)+\log_5(2x+1)=2$에서
$\log_5(x+3)(2x+1)=2$
$\log_5(2x^2+\boxed{7}x+3)=\log_5 25$
밑이 같으므로 $2x^2+7x+3=25$
$2x^2+7x-\boxed{22}=0$, $(2x+\boxed{11})(x-2)=0$
$\therefore x=\boxed{-\frac{11}{2}}$ 또는 $x=2$
따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\boxed{2}$

15 $(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\le0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2+t-2\le0$, $(t+\boxed{2})(t-1)\le0$
$\therefore \boxed{-2}\le t\le1$
따라서 $\boxed{-2}\le\log_2 x\le1$이므로
$\log_2\boxed{\frac{1}{4}}\le\log_2 x\le\log_2 2$
밑이 2이고 $2>1$이므로 $\boxed{\frac{1}{4}}\le x\le2$

중단원 마무리 112~114쪽

01 ⑤ **02** ② **03** ③ **04** ④
05 ④ **06** ① **07** ① **08** ③
09 ③ **10** ⑤ **11** ③ **12** ④
13 ③ **14** ④ **15** ① **16** ④
17 ② **18** ② **19** ① **20** ③
21 $\frac{1}{4}$ **22** 6 **23** $x=-1$ **24** $\frac{1}{1000}$

LEVEL 1

01 함수 $f(x)=3\log_2(x+3)-1$의 역함수가 $g(x)$이므로
$g(8)=a$라 하면 $f(a)=8$
$3\log_2(a+3)-1=8$이므로 $\log_2(a+3)=3$
$a+3=2^3=8$ $\therefore a=5$
$\therefore g(8)=5$

다른 풀이 함수 $f(x)=3\log_2(x+3)-1$의 정의역은 $\{x|x>-3\}$, 치역은 실수 전체의 집합이다.

$y=3\log_2(x+3)-1$이라 하면

$3\log_2(x+3)=y+1$, $\log_2(x+3)=\frac{y+1}{3}$

$x+3=2^{\frac{y+1}{3}}$ $\therefore x=2^{\frac{y+1}{3}}-3$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=3\log_2(x+3)-1$의 역함수는

$y=2^{\frac{x+1}{3}}-3$

따라서 $g(x)=2^{\frac{x+1}{3}}-3$이므로

$g(8)=2^3-3=8-3=5$

Lecture

로그함수의 역함수

(1) 함수 $f(x)=\log_a(x-p)+q$ $(a>0, a\neq1)$의 역함수

➡ $f^{-1}(x)=a^{x-q}+p$

(2) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때

$f(p)=q \Longleftrightarrow g(q)=p$

02 $b=\log_2 16$이므로

$b=\log_2 2^4=4$

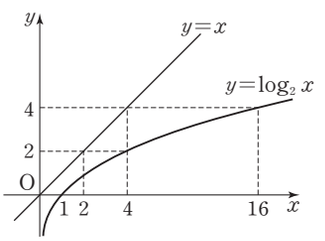
또, $a=\log_2 b$이므로

$a=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$=2^2=4$



03 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=\log(x-a)$ $\therefore y=\log(x-a)+b$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(5, b)$를 지나므로

$b=\log(5-a)+b$, $\log(5-a)=0$

$5-a=1$ $\therefore a=4$

즉, 함수 $y=\log(x-4)+b$의 그래프가 점 $(14, 11)$을 지나므로

$11=\log(14-4)+b$ $\therefore b=11-1=10$

$\therefore a+b=4+10=14$

04 $B=-2=\log_{\frac{1}{3}}9$

$C=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}36=\log_{\frac{1}{3}}6$

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $5<6<9$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}9<\log_{\frac{1}{3}}6<\log_{\frac{1}{3}}5$ $\therefore B<C<A$

05 함수 $y=\log_a(x^2+2x+10)$에서

$f(x)=x^2+2x+10$으로 놓으면 $f(x)=(x+1)^2+9$

$-2\le x\le1$에서 $f(-2)=10$, $f(-1)=9$, $f(1)=13$이므로

$9\le f(x)\le13$

이때 함수 $y=\log_a f(x)$는 밑이 a이고 $0<a<1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 최대가 된다.

따라서 함수 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=9$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $\log_a 9$를 가지므로

$\log_a 9=-2$에서 $a^{-2}=9$

$a^2=\frac{1}{9}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ $(\because 0<a<1)$

06 $(\log_2 4x)(\log_4 8x)=6$에서

$\frac{1}{2}(\log_2 4+\log_2 x)(\log_2 8+\log_2 x)=6$

$(\log_2 x+2)(\log_2 x+3)=12$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$(t+2)(t+3)=12$, $t^2+5t-6=0$

$(t+6)(t-1)=0$ $\therefore t=-6$ 또는 $t=1$

$t=-6$일 때, $\log_2 x=-6$에서 $x=2^{-6}=\frac{1}{64}$

$t=1$일 때, $\log_2 x=1$에서 $x=2$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 $\frac{1}{64}\times2=\frac{1}{32}$

07 진수의 조건에서 $x-2>0$, $14-x>0$이므로

$2<x<14$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x-2)<\log_{\frac{1}{25}}(14-x)$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(x-2)<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}}(14-x)$

$2\log_{\frac{1}{5}}(x-2)<\log_{\frac{1}{5}}(14-x)$

$\log_{\frac{1}{5}}(x-2)^2<\log_{\frac{1}{5}}(14-x)$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$(x-2)^2>14-x$, $x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x<14$

따라서 정수 x의 개수는 6, 7, 8, …, 13의 8이다.

08 약물을 주입하기 시작한 지 30분 후 정맥에서의 약물 농도가 4이므로

$\log(10-4)=1-30k$

$30k=1-\log6$, $30k=\log\frac{5}{3}$

$\therefore k=\frac{1}{30}\log\frac{5}{3}$

약물을 주입하기 시작한 지 60분 후 정맥에서의 약물 농도를 C라 하면

$\log(10-C)=1-60\times\frac{1}{30}\log\frac{5}{3}$

$=1-2\log\frac{5}{3}=1-\log\frac{25}{9}$

$=\log\frac{10}{\frac{25}{9}}=\log\frac{18}{5}$

$10-C=\frac{18}{5}$ $\therefore C=\frac{32}{5}=6.4$

LEVEL 2

09 함수 $y=a\log_3(x+b)+c$의 그래프가 함수 $y=3^{x-1}+2$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=a\log_3(x+b)+c$는 함수 $y=3^{x-1}+2$의 역함수이다.

$y=3^{x-1}+2$에서 $3^{x-1}=y-2$

$x-1=\log_3(y-2)$

$\therefore x=\log_3(y-2)+1$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=3^{x-1}+2$의 역함수는

$y=\log_3(x-2)+1$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=1+(-2)+1=0$

10 ① 함수 $y=\log_2(x-5)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

② 진수는 양수이어야 하므로

$x-5>0$ $\therefore x>5$

즉, 정의역은 $\{x|x>5\}$, 치역은 $\{y|y$는 실수$\}$이다.

③ $y=\log_2(x-5)-3$에 $x=6$을 대입하면

$y=\log_2 1-3=0-3=-3$

즉, 그래프는 점 $(6, -3)$을 지난다.

④ 밑이 2이고 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x-5=0$, 즉 $x=5$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

11 $y=\log_3 9x$

$=\log_3 3^2+\log_3 x$

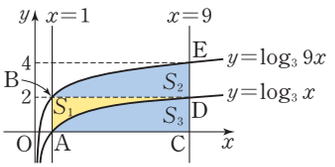
$=\log_3 x+2$

함수 $y=\log_3 9x$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉, 오른쪽 그림에서

$S_2=S_3$

$S_1+S_2=S_1+S_3$이므로 구하는 넓이는 직사각형 ACDB의 넓이와 같다.



A$(1, 0)$이고

$\log_3 9=2$이므로 B$(1, 2)$

따라서 구하는 넓이는

$(9-1)\times 2=8\times 2=16$

Lecture

로그함수의 그래프와 도형의 넓이

평행이동 또는 대칭이동한 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이

➡ 넓이가 같은 부분을 찾는다.

12 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면 $0<a<1$이므로

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$ $\therefore 0<\log_a b<1$ ……㉠

$a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면 $0<b<1$이므로

$\log_b a>\log_b b>\log_b 1$ $\therefore 0<1<\log_b a$

한편, $\log_a \frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이고

㉠에 의하여 $\log_a b-1<0$이므로 $\log_a \frac{b}{a}<0$

따라서 $\log_a \frac{b}{a}<0<\log_a b<1<\log_b a$이므로

$C<A<B$

13 진수의 조건에서 $4-x>0$, $x+6>0$

$\therefore -6<x<4$ ……㉠

$y=\log_5(4-x)+\log_5(x+6)$

$=\log_5(4-x)(x+6)$

$=\log_5(-x^2-2x+24)$

함수 $y=\log_5(-x^2-2x+24)$에서

$f(x)=-x^2-2x+24$로 놓으면 $f(x)=-(x+1)^2+25$

$-6<x<4$에서 $f(-6)=0$, $f(-1)=25$, $f(4)=0$이므로

$0<f(x)\le 25$

이때 함수 $y=\log_5 f(x)$는 밑이 5이고 $5>1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 최대가 된다.

따라서 함수 $y=\log_5 f(x)$는 $f(x)=25$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $\log_5 25=\log_5 5^2=2$를 가지므로

$a=-1$, $b=2$ $\therefore ab=-1\times 2=-2$

14 $a>1$, $b>1$에서 $(\log_a b)^2>0$, $(\log_b a^4)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(\log_a b)^2+(\log_b a^4)^2=(\log_a b)^2+\left(\frac{4}{\log_a b}\right)^2$$
$$\ge 2\sqrt{(\log_a b)^2\times\left(\frac{4}{\log_a b}\right)^2}$$
$$=2\times 4=8$$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=(\log_b a^4)^2$, 즉 $a^2=b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

참고 $a>1$, $b>1$이므로 $\log_a b>0$, $\log_b a>0$

$(\log_a b)^2=(\log_b a^4)^2$, 즉 $(\log_a b)^2=\left(\frac{4}{\log_a b}\right)^2$에서

$(\log_a b)^4=16=2^4$이므로 $\log_a b=2$ ($\because \log_a b>0$)

$\therefore a^2=b$

15 $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \log_{16} x\times\log_9 y=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \frac{1}{4}\log_2 x\times\frac{1}{2}\log_3 y=-1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \log_2 x\times\log_3 y=-8\end{cases}$

$\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=2\\ XY=-8\end{cases}$ ……㉡

㉠에서 $Y=2-X$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $X(2-X)=-8$

$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

㉢에서 $X=-2$일 때 $Y=4$, $X=4$일 때 $Y=-2$

즉, $\log_2 x=-2$, $\log_3 y=4$ 또는

$\log_2 x=4$, $\log_3 y=-2$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $y=3^4=81$ 또는 $x=2^4=16$, $y=3^{-2}=\frac{1}{9}$

따라서 $\alpha>\beta$에서 $\alpha=16$, $\beta=\frac{1}{9}$이므로

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{16}{\frac{1}{9}}=144$

Lecture

로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식 – 연립방정식

(i) $\log_a x=X$, $\log_b y=Y$로 치환하여 X, Y에 대한 연립방정식을 세운다.

(ii) X, Y에 대한 연립방정식을 푼다.

(iii) $\log_a x=X$, $\log_b y=Y$에서 x, y의 값을 구한다.

16 $x^{3-\log x}=\frac{x^2}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{3-\log x}=\log \frac{x^2}{100}$

$(3-\log x)\log x=2\log x-2$

$(\log x)^2-\log x-2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log x=-1$에서 $x=10^{-1}=\frac{1}{10}$

$t=2$일 때, $\log x=2$에서 $x=10^2=100$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 $\frac{1}{10}\times 100=10$

17 진수의 조건에서 $8x>0$, $\frac{x}{4}>0$이므로 $x>0$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}} 8x\times\log_2 \frac{x}{4}>0$에서 $-\log_2 8x\times\log_2 \frac{x}{4}>0$

$\log_2 8x\times\log_2 \frac{x}{4}<0$

$(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 4)<0$

$(\log_2 x+3)(\log_2 x-2)<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$(t+3)(t-2)<0$ $\therefore -3<t<2$

따라서 $-3<\log_2 x<2$이므로

$\log_2 \frac{1}{8}<\log_2 x<\log_2 4$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\frac{1}{8}<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8}<x<4$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=\frac{1}{8}+4=\frac{33}{8}$

18 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$3^{\log_3 x}\times x^{\log_3 3}-(3^{\log_3 x}+x^{\log_3 3})-3\le 0$에서

$3^{\log_3 x}=x^{\log_3 3}$이므로

$3^{\log_3 x}\times 3^{\log_3 x}-(3^{\log_3 x}+3^{\log_3 x})-3\le 0$

$(3^{\log_3 x})^2-2\times 3^{\log_3 x}-3\le 0$

$3^{\log_3 x}=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-3\le 0$

$(t+1)(t-3)\le 0$ $\therefore 0<t\le 3$ $(\because t>0)$

$3^{\log_3 x}=t$에서 $0<3^{\log_3 x}\le 3$이므로 $3^{\log_3 x}\le 3^1$

지수의 밑이 3이고 $3>1$이므로 $\log_3 x\le 1$

즉, $\log_5 x\le\log_5 5$에서 로그의 밑이 5이고 $5>1$이므로

$x\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le 5$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

19 진수의 조건에서 $a>0$ ……㉠

이차방정식 $x^2-2x\log_3 a+\log_3 a+6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-\log_3 a)^2-(\log_3 a+6)>0$

$(\log_3 a)^2-\log_3 a-6>0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $t^2-t-6>0$

$(t+2)(t-3)>0$ $\therefore t<-2$ 또는 $t>3$

즉, $\log_3 a<-2$ 또는 $\log_3 a>3$이므로

$\log_3 a<\log_3 \frac{1}{9}$ 또는 $\log_3 a>\log_3 27$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$a<\frac{1}{9}$ 또는 $a>27$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<\frac{1}{9}$ 또는 $a>27$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

Lecture

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D>0$

(2) 중근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D=0$

(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D<0$

20 초기 온도가 20 ℃인 어떤 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도가 370 ℃이므로

$370=20+k\log\left(8\times\frac{9}{8}+1\right)$ $\therefore k=370-20=350$

이 화재실에서 화재가 발생한 지 x분 후부터 온도가 720 ℃ 이상이 된다고 하면

$20+350\log(8x+1)\ge 720$

$350\log(8x+1)\geq 700$

$\log(8x+1)\geq 2$, $\log(8x+1)\geq\log 100$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$8x+1\geq 100$ $\quad\therefore x\geq\frac{99}{8}$

따라서 온도가 720 ℃ 이상이 되는 것은 화재가 발생한 지 $\frac{99}{8}$분 후부터이다.

서술형

21 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$의 그래프는 모두 점 $(1, 0)$을 지나므로

$A(1, 0)$ … ❶

$y=\log_2 x$에서 $x=4$일 때 $y=\log_2 4=\log_2 2^2=2$이므로

$B(4, 2)$

$y=\log_a x$에서 $x=4$일 때 $y=\log_a 4$이므로

$C(4, \log_a 4)$ … ❷

이때 삼각형 ACB의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)=\frac{9}{2}$, $\log_a 4=-1$

$a^{-1}=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

22 $y=(\log_3 x)^2+a\log_9 x+2$에서

$y=(\log_3 x)^2+\frac{a}{2}\log_3 x+2$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $y=t^2+\frac{a}{2}t+2$ …… ㉠ … ❶

이때 $x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$에서 최솟값 b를 갖고, t^2의 계수가 1인 이차함수는

$y=(t+2)^2+b=t^2+4t+4+b$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{2}=4$, $2=4+b$이므로 $a=8$, $b=-2$

$\therefore a+b=8+(-2)=6$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\log_3 x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 t에 대한 이차함수의 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 ㉠에서 $y=t^2+\frac{a}{2}t+2=\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}+2$

주어진 함수는 $t=-\frac{a}{4}$일 때, 최솟값 $-\frac{a^2}{16}+2$를 가지므로

$-\frac{a}{4}=\log_3\frac{1}{9}=-2$에서 $a=8$

$-\frac{a^2}{16}+2=b$에서 $b=-\frac{8^2}{16}+2=-4+2=-2$

23 밑의 조건에서 $x^2-6x+9>0$, $x^2-6x+9\neq 1$

즉, $(x-3)^2>0$이고, $(x-3)^2\neq 1$에서

$x^2-6x+8\neq 0$, $(x-2)(x-4)\neq 0$

$\therefore x\neq 2$, $x\neq 3$, $x\neq 4$ …… ㉠

또, 진수의 조건에서 $4-x>0$이므로

$x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x<2$ 또는 $2<x<3$ 또는 $3<x<4$ …… ㉢ … ❶

$\log_{x^2-6x+9}(4-x)=\log_{16}(4-x)$에서

(i) 밑이 같은 경우: $x^2-6x+9=16$

$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

㉢에 의하여 $x=-1$ … ❷

(ii) 진수가 1인 경우: $4-x=1$

$\therefore x=3$

$x=3$은 ㉢을 만족시키지 않는다. … ❸

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 밑이 같은 경우에 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 진수가 1인 경우에 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

24 $(\log x)^2-2\log 10x\geq\log k$에서

$(\log x)^2-2(\log 10+\log x)-\log k\geq 0$

$(\log x)^2-2-2\log x-\log k\geq 0$

$\therefore (\log x)^2-2\log x-(\log k+2)\geq 0$

진수의 조건에서 $k>0$ …… ㉠

$\log x=t$로 놓으면 x가 모든 양수이므로 t는 모든 실수이고,

$(\log x)^2-2\log x-(\log k+2)\geq 0$에서

$t^2-2t-(\log k+2)\geq 0$ …… ㉡ … ❶

모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 하므로 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-(\log k+2)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(-1)^2+(\log k+2)\leq 0$에서

$1+\log k+2\leq 0$, $\log k\leq -3$, $\log k\leq\log\frac{1}{1000}$

밑이 10이고 $10>1$이므로 $k\leq\frac{1}{1000}$ …… ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $0<k\leq\frac{1}{1000}$ … ❷

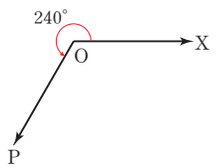
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{1000}$이다. … ❸

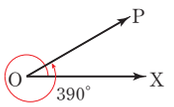
채점 기준	비율
❶ $\log x=t$로 놓고 주어진 부등식을 t에 대한 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

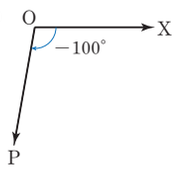
5 삼각함수

1 일반각

개념 확인 116~119쪽

1 (1)


(2)


(3)


2 (1) $360^\circ\times n+85^\circ$ (2) $360^\circ\times n+240^\circ$

3 (1) $360^\circ\times n+330^\circ$ (2) $360^\circ\times n+150^\circ$

4 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면 (3) 제4사분면 (4) 제1사분면

5 (1) 180 (2) 180 (3) 90

2 (1) $85^\circ=360^\circ\times 0+85^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+85^\circ$

(2) $-120^\circ=360^\circ\times(-1)+240^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+240^\circ$

3 (1) $330^\circ=360^\circ\times 0+330^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+330^\circ$

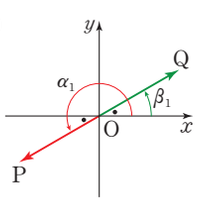
(2) $-570^\circ=360^\circ\times(-2)+150^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+150^\circ$

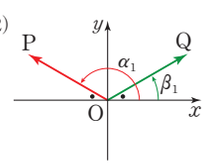
4 (1) $500^\circ=360^\circ\times 1+140^\circ$이므로 500°는 제2사분면의 각이다.

(2) $1290^\circ=360^\circ\times 3+210^\circ$이므로 1290°는 제3사분면의 각이다.

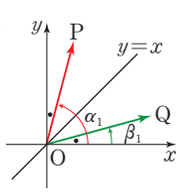
(3) $-420^\circ=360^\circ\times(-2)+300^\circ$이므로 -420°는 제4사분면의 각이다.

(4) $-695^\circ=360^\circ\times(-2)+25^\circ$이므로 -695°는 제1사분면의 각이다.

5 (1)


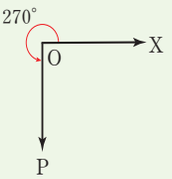
(2)


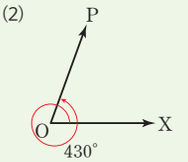
$\alpha-\beta=360^\circ\times n+\boxed{180}^\circ$ $\alpha+\beta=360^\circ\times n+\boxed{180}^\circ$

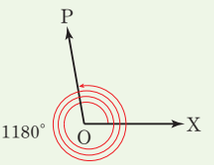
(3)


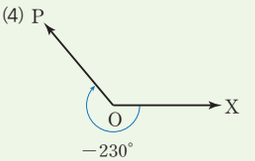
$\alpha+\beta=360^\circ\times n+\boxed{90}^\circ$

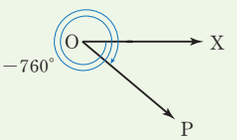
개념 드릴 120쪽

1 (1)


(2)


(3)


(4)


(5)


2 (1) $360^\circ\times n+40^\circ$ (2) $360^\circ\times n+210^\circ$
(3) $360^\circ\times n+100^\circ$ (4) $360^\circ\times n+280^\circ$

3 (1) 제1사분면 (2) 제4사분면
(3) 제2사분면 (4) 제3사분면

2 (1) $400^\circ=360^\circ\times 1+40^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+40^\circ$

(2) $570^\circ=360^\circ\times 1+210^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+210^\circ$

(3) $-260^\circ=360^\circ\times(-1)+100^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+100^\circ$

(4) $-800^\circ=360^\circ\times(-3)+280^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ\times n+280^\circ$

3 (1) $755^\circ=360^\circ\times 2+35^\circ$이므로 755°는 제1사분면의 각이다.

(2) $1760^\circ=360^\circ\times 4+320^\circ$이므로 1760°는 제4사분면의 각이다.

(3) $-225^\circ=360^\circ\times(-1)+135^\circ$이므로 -225°는 제2사분면의 각이다.

(4) $-880^\circ=360^\circ\times(-3)+200^\circ$이므로 -880°는 제3사분면의 각이다.

필수 예제 01 사분면의 각 121쪽

01-1 답 제2사분면 또는 제4사분면

|전략| 각 2θ가 제4사분면의 각임을 이용하여 각 θ의 값의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 2θ가 제4사분면의 각이므로
$360^\circ\times n+270^\circ<2\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore\ 360^\circ\times\frac{n}{2}+135^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{2}+180^\circ$ ……㉠

㉠에서 $n=2k$, $n=2k+1$ (k는 정수)
인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+135^\circ<\theta<360^\circ\times k+180^\circ$

이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+315^\circ<\theta<360^\circ\times k+360^\circ$

이므로 각 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ를 나타내는 동경이 위치할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

참고 각 θ를 나타내는 동경이 위치한 사분면에 따른 θ의 값의 범위 (단, n은 정수)

(1) 제1사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$

(2) 제2사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$

(3) 제3사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$

(4) 제4사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$

01-2 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면

|전략| 각 3θ가 제2사분면의 각임을 이용하여 각 θ의 값의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 3θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<3\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{3}+30^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{3}+60^\circ$ ……㉠

㉠에서 $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$ (k는 정수)

인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+30^\circ<\theta<360^\circ\times k+60^\circ$

이므로 각 θ는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+150^\circ<\theta<360^\circ\times k+180^\circ$

이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+300^\circ$

이므로 각 θ는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 θ를 나타내는 동경이 위치할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면이다.

필수 예제 02 두 동경의 위치 관계 122쪽

02-1 225°

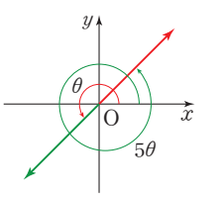
|전략| 두 동경의 위치에 따른 두 각 사이의 관계식을 구한다.

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore \theta=90^\circ\times n+45^\circ$



이때 $180^\circ<\theta<270^\circ$이므로 $180^\circ<90^\circ\times n+45^\circ<270^\circ$

$135^\circ<90^\circ\times n<225^\circ$ $\therefore \frac{3}{2}<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=90^\circ\times 2+45^\circ=225^\circ$

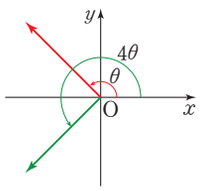
02-2 144°

|전략| 두 동경의 위치에 따른 두 각 사이의 관계식을 구한다.

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360^\circ\times n$ (단, n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n$ $\therefore \theta=72^\circ\times n$



이때 $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$90^\circ<72^\circ\times n<180^\circ$ $\therefore \frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=72^\circ\times 2=144^\circ$

02-3 15° 또는 75° 또는 135°

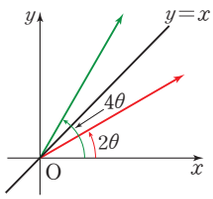
|전략| 두 동경의 위치에 따른 두 각 사이의 관계식을 구한다.

각 2θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$2\theta+4\theta=360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n+90^\circ$

$\therefore \theta=60^\circ\times n+15^\circ$



이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$0^\circ<60^\circ\times n+15^\circ<180^\circ$

$-15^\circ<60^\circ\times n<165^\circ$ $\therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

$\therefore \theta=60^\circ\times 0+15^\circ=15^\circ$ 또는 $\theta=60^\circ\times 1+15^\circ=75^\circ$

또는 $\theta=60^\circ\times 2+15^\circ=135^\circ$

2 호도법

개념 확인 123~125쪽

1 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{4}{3}\pi$ (3) 126° (4) 320°

2 (1) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (2) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$

3 (1) 2π (2) 8π

4 180, 6, 6, 2, 3, 6, $\frac{3}{4}$

1 (1) $45^\circ=45\times 1^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

(2) $240^\circ=240\times 1^\circ=240\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi$

(3) $\frac{7}{10}\pi=\frac{7}{10}\pi\times 1=\frac{7}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=126^\circ$

(4) $\frac{16}{9}\pi=\frac{16}{9}\pi\times 1=\frac{16}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=320^\circ$

2 (1) $\frac{7}{3}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{3}$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

(2) $-\frac{11}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{\pi}{6}$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{6}$

3 (1) $l=8\times\frac{\pi}{4}=2\pi$

(2) $S=\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{\pi}{4}=8\pi$

개념 드릴 126쪽

1 (1) $\frac{3}{5}\pi$ (2) $\frac{36}{5}\pi$ (3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) $-\frac{7}{6}\pi$

2 (1) 36° (2) 400° (3) -315° (4) -960°

3 (1) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ (2) $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (3) $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (4) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

4 (1) 4π (2) 10π (3) $\frac{75}{2}\pi$ (4) $\frac{25}{4}\pi$

1 (1) $108^\circ=108\times1^\circ=108\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{5}\pi$

(2) $1296^\circ=1296\times1^\circ=1296\times\frac{\pi}{180}=\frac{36}{5}\pi$

(3) $-60^\circ=-60\times1^\circ=-60\times\frac{\pi}{180}=-\frac{\pi}{3}$

(4) $-210^\circ=-210\times1^\circ=-210\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$

2 (1) $\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}\times1=\frac{\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=36^\circ$

(2) $\frac{20}{9}\pi=\frac{20}{9}\pi\times1=\frac{20}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=400^\circ$

(3) $-\frac{7}{4}\pi=-\frac{7}{4}\pi\times1=-\frac{7}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-315^\circ$

(4) $-\frac{16}{3}\pi=-\frac{16}{3}\pi\times1=-\frac{16}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-960^\circ$

3 (1) $\frac{13}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{6}$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{14}{3}\pi=2\pi\times2+\frac{2}{3}\pi$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

(3) $-\frac{5}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{3}{4}\pi$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$

(4) $-\frac{11}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{3}$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

4 (1) 부채꼴의 호의 길이는 $6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$

(2) $150^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$이므로

부채꼴의 호의 길이는 $12\times\frac{5}{6}\pi=10\pi$

(3) 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{75}{2}\pi$

(4) $90^\circ=90\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$이므로

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{25}{4}\pi$

필수 예제 01 호도법과 육십분법 사이의 관계 127쪽

01-1 답 ⑤

| 전략 | $1^\circ=\frac{\pi}{180}$라디안, 1라디안$=\frac{180^\circ}{\pi}$임을 이용한다.

① $75^\circ=75\times1^\circ=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$

② $-288^\circ=-288\times1^\circ=-288\times\frac{\pi}{180}=-\frac{8}{5}\pi$

③ $\frac{5}{18}\pi=\frac{5}{18}\pi\times1=\frac{5}{18}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=50^\circ$

④ $-\frac{9}{10}\pi=-\frac{9}{10}\pi\times1=-\frac{9}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-162^\circ$

⑤ $\frac{11}{12}\pi=\frac{11}{12}\pi\times1=\frac{11}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=165^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

01-2 답 ⑤

| 전략 | 주어진 각들을 일반각 꼴로 변형한다.

② $790^\circ=360^\circ\times2+70^\circ$

③ $-1010^\circ=360^\circ\times(-3)+70^\circ$

④ $\frac{7}{18}\pi=\frac{7}{18}\pi\times1=\frac{7}{18}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=70^\circ$

⑤ $-\frac{43}{18}\pi=-\frac{43}{18}\pi\times1=-\frac{43}{18}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-430^\circ$
$=360^\circ\times(-2)+290^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

01-3 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

| 전략 | 각 θ가 제4사분면의 각이면 $360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$임을 이용한다.

ㄱ. $-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

ㄴ. $910^\circ=360^\circ\times2+190^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

ㄷ. $\frac{13}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{6}$이므로 제1사분면의 각이다.
$\frac{\pi}{6}\times\frac{180^\circ}{\pi}=30^\circ$

ㄹ. $\frac{19}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{9}{5}\pi$이므로 제4사분면의 각이다.
$\frac{9}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=324^\circ$

ㅁ. $-\frac{25}{4}\pi=2\pi\times(-4)+\frac{7}{4}\pi$이므로 제4사분면의 각이다.
$\frac{7}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=315^\circ$

따라서 제4사분면의 각은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

필수 예제 02 부채꼴의 호의 길이와 넓이 128쪽

02-1 답 반지름의 길이: 4, 중심각의 크기: $\frac{\pi}{2}$

| 전략 | 부채꼴의 호의 길이와 넓이 사이의 관계를 이용한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times r\times2\pi=4\pi$ $\therefore r=4$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $4\theta=2\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

02-2 답 부채꼴의 넓이의 최댓값: 400, 반지름의 길이: 20

|전략| 부채꼴의 넓이를 반지름의 길이에 대한 이차함수로 나타낸다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=80-2r$ (단, $0<r<40$)

부채꼴의 넓이를 S라 하면 → $r>0$, $80-2r>0$에서 $0<r<40$

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(80-2r)$

$=-r^2+40r=-(r-20)^2+400$

따라서 부채꼴의 넓이 S의 최댓값은 $r=20$일 때, 400이다.

3 삼각함수

개념 확인 129~132쪽

1 $\sin C=\frac{12}{13}$, $\cos C=\frac{5}{13}$, $\tan C=\frac{12}{5}$

2 $\sqrt{3}$

3 36

4 (1) $\sin\theta=\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\tan\theta=4$

(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

5 (1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 (1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

(2) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

(3) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

(4) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

7 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면

8 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

9 $-\frac{3}{8}$

1 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

$\therefore \sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{12}{13}$

$\cos C=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{5}{13}$

$\tan C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{12}{5}$

2 $\sin 30^\circ-\cos 60^\circ+\tan 60^\circ=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$

3 직각삼각형 ABD에서

$\cos 45^\circ=\frac{x}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore x=3\sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서

$\sin 30^\circ=\frac{x}{y}=\frac{3\sqrt{2}}{y}=\frac{1}{2}$ $\therefore y=6\sqrt{2}$

$\therefore xy=3\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=36$

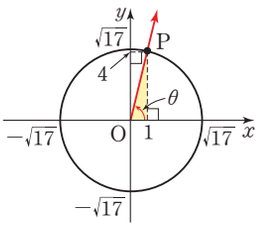
4 (1) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\tan\theta=\frac{4}{1}=4$



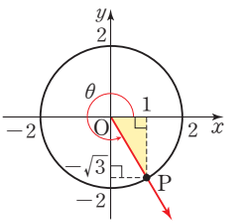
(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$



5 (1) $\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

이때 점 P가 제3사분면 위의 점이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(2) $\sin\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$

(3) $\cos\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\tan\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 (1) $430^\circ=360^\circ\times 1+70^\circ$는 제1사분면의 각이므로 모두 양수이다.

(2) $\frac{26}{5}\pi=2\pi\times 2+\frac{6}{5}\pi$는 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta$만 양수이다.

(3) $-970^\circ=360^\circ\times(-3)+110^\circ$는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta$만 양수이다.

(4) $-\frac{9}{4}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{7}{4}\pi$는 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta$만 양수이다.

7 (1) $\sin\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다. 따라서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 따라서 각 θ는 제4사분면의 각이다.

8 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

9 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

개념드릴

133쪽

1 (1) $\sin\theta=-\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\tan\theta=\frac{5}{4}$

(2) $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta=-2$

(3) $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta=-\frac{2}{3}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

2 (1) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

(2) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

(3) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

(4) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

3 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면 (3) 제2사분면 또는 제4사분면

(4) 제1사분면 또는 제2사분면

4 (1) $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{15}}{15}$ (2) $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

(3) $\sin\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\tan\theta=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

1 (1) 오른쪽 그림에서

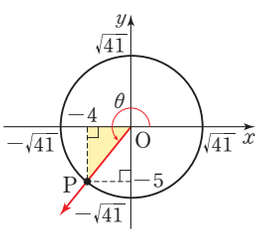
$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$

이므로

$\sin\theta=\frac{-5}{\sqrt{41}}=-\frac{5\sqrt{41}}{41}$

$\cos\theta=\frac{-4}{\sqrt{41}}=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$

$\tan\theta=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$



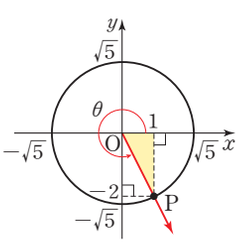
(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\frac{-2}{1}=-2$



(3) 오른쪽 그림에서

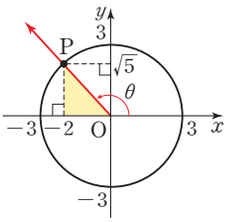
$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+(\sqrt{5})^2}=3$

이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\theta=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{-2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$



2 (1) $560^\circ=360^\circ\times1+200^\circ$는 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta$만 양수이다.

(2) $\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$는 제1사분면의 각이므로 모두 양수이다.

(3) $-25^\circ=360^\circ\times(-1)+335^\circ$는 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta$만 양수이다.

(4) $-\frac{7}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{5}{6}\pi$는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta$만 양수이다.

3 (1) $\sin\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\tan\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 각 θ는 제3사분면의 각이다.

(3) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(4) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

4 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

이때 각 θ가 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\frac{1}{4}\div\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 각 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}$

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{2}{7}\right)^2=\frac{45}{49}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$, 즉 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{45}{49}}=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

필수 예제 01 삼각함수의 값 134쪽

01-1 답 -7

|전략| 선분 OP의 길이를 구한 후 삼각함수의 값을 구한다.

오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

이므로

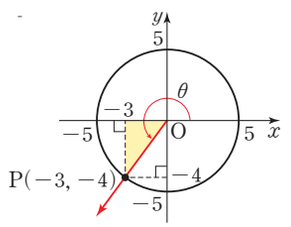
$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{4}{3}$

$\therefore 5\cos\theta-3\tan\theta$

$=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)-3\times\frac{4}{3}$

$=-7$



참고 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $P(x, y)$라 하면

① $r=\overline{OP}=x^2+y^2$

② $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$

01-2 답 $\frac{3}{4}$

|전략| 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{5}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 POH에서

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

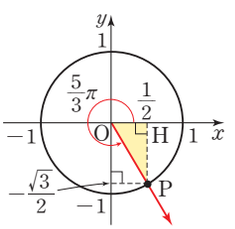
$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 점 P가 제4사분면 위의 점이므로

$P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$ 이므로

$(\sin\theta-\tan\theta)^2=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\sqrt{3})\right\}^2=\frac{3}{4}$



01-3 답 3

|전략| 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 각 $-\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 POH에서

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

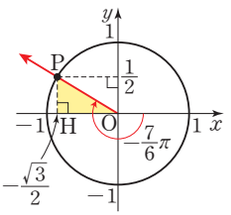
$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

이때 점 P가 제2사분면 위의 점이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=3$



필수 예제 02 삼각함수의 값의 부호 135쪽

02-1 답 제2사분면

|전략| 각각의 조건을 만족시키는 각 θ가 제몇 사분면의 각인지 구한 후 두 조건을 동시에 만족시키는 경우를 찾는다.

$\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이므로 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

또, $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

이므로 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

02-2 답 $2\sin\theta$

|전략| 주어진 조건을 만족시키는 각 θ가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

이때 $\sin\theta-\tan\theta>0$, 즉 $\sin\theta>\tan\theta$이므로

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$

즉, 각 θ는 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\cos\theta+\tan\theta)^2}+\sqrt{(\tan\theta-\sin\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\cos\theta+\tan\theta|+|\tan\theta-\sin\theta|$

$=\sin\theta-\cos\theta+(\cos\theta+\tan\theta)-(\tan\theta-\sin\theta)$

$=2\sin\theta$

필수 예제 03 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식 간단히 하기 136쪽

03-1 답 1

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}&\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\left(1-\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\right)\cos^2\theta\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\times\cos^2\theta\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1\end{aligned}$$

03-2 답 $\frac{1}{\tan\theta}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}&=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\\&=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}-1}-\frac{1}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{(1-\cos^2\theta)-(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{-\cos^2\theta+\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

03-3 답 1

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)\\&=\left\{\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\right\}\left\{\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)\right\}\\&=\left(1-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=\frac{\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}\times\frac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}\\&=\frac{-(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}\times\frac{-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\&=\frac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1\end{aligned}$$

필수 예제 04 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1) 137쪽

04-1 답 $\sqrt{5}-2$

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\frac{2}{\cos\theta}+4\tan\theta$의 값을 구한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$

이때 각 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\div\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2}{\cos\theta}+4\tan\theta=\frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}-2$

04-2 답 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}&=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{\cos^2\theta}=12$이므로 $\cos^2\theta=\frac{1}{6}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

04-3 답 $-\frac{7}{5}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구한다.

$4\sin\theta=3\cos\theta$에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1,\ \frac{25}{16}\cos^2\theta=1$ $\therefore\ \cos^2\theta=\frac{16}{25}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$이므로

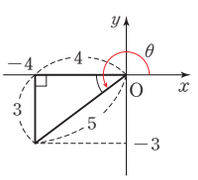
$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{7}{5}$

다른 풀이 $4\sin\theta=3\cos\theta$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$ $\therefore\ \tan\theta=\frac{3}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 오른쪽 그림에서

$\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{7}{5}$



필수 예제 05 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2) 138쪽

05-1 답 (1) $\frac{13}{27}$ (2) $\frac{49}{81}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ ……㉠

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$

(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1^2-2\times\left(\frac{4}{9}\right)^2$ ($\because$ ㉠)

$=1-\frac{32}{81}=\frac{49}{81}$

참고 곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

05-2 답 $-\frac{3\sqrt{6}}{8}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3-3\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{6}}{8}$

05-3 답 $-\frac{8}{3}$

|전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$

필수 예제 06 삼각함수와 이차방정식 139쪽

06-1 답 $\frac{7}{6}$

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $3x^2+5x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-\frac{5}{3}$ ……㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\frac{k}{3}$ ……㉡

㉠에서 $2\sin\theta=-\frac{5}{3}$ $\therefore \sin\theta=-\frac{5}{6}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1$

즉, $2\sin^2\theta-1=\frac{k}{3}$이므로 $\sin\theta=-\frac{5}{6}$를 대입하면

$2\times\left(-\frac{5}{6}\right)^2-1=\frac{k}{3}$ $\therefore k=\frac{7}{6}$

06-2 답 8

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=a$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=a$에서 $a=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2(\sin\theta+\cos\theta)$

$\therefore a^2=4(\sin\theta+\cos\theta)^2=4(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=4(1+2\sin\theta\cos\theta)=4\left(1+2\times\frac{1}{2}\right)=8$

06-3 답 $\frac{\sqrt{34}}{5}$

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $5x^2-4x+a=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{5}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$에서

$\frac{16}{25}=1-2\times\left(-\frac{a}{5}\right)$, $16=25+10a$ $\therefore a=-\frac{9}{10}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{50}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{9}{50}=\frac{34}{25}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

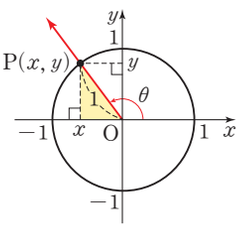
$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{34}{25}}=\frac{\sqrt{34}}{5}$

개념 정리

140~141쪽

01 시초선, 동경		**02** 양, 음	**03** 360°
04 ㉢	**05** ㉣	**06** ㉠	**07** ㉡
08 라디안, 호도법		**09** 180°, 180	**10** θ
11 r, l	**12** r	**13** x	**14** y
15 양수	**16** $<$	**17** $<$, $>$	**18** $>$, $<$
19 $\cos\theta$	**20** 1		

[19~20] 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면
$\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$



19 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

20 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 단위원 위의 점이므로

$x^2+y^2=1$ $\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=$ 1

중단원 마무리

142~144쪽

01 ⑤	**02** ③	**03** $1200\pi\ \mathrm{cm}^2$	**04** ②
05 ④	**06** ③	**07** ②	**08** ④
09 ④	**10** ②	**11** 25	**12** ⑤
13 $100\ \mathrm{m}^2$	**14** ①	**15** 14	**16** ②
17 ③	**18** ②	**19** ⑤	**20** ③
21 제1사분면	**22** 2	**23** 1	**24** $-6\sqrt{5}$

LEVEL 1

01 ① $-460^\circ=360^\circ\times(-2)+260^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

② $945^\circ=360^\circ\times2+225^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

③ $-\frac{14}{5}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{6}{5}\pi$이므로 제3사분면의 각이다.

④ $\frac{10}{3}\pi=2\pi\times1+\frac{4}{3}\pi$이므로 제3사분면의 각이다.

⑤ $\frac{29}{6}\pi=2\pi\times2+\frac{5}{6}\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

따라서 동경이 위치한 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

참고 각 θ를 나타내는 동경이 위치한 사분면에 따른 각 θ의 값의 범위 (단, n은 정수)

(1) 제1사분면의 각 ➡ $2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$

(2) 제2사분면의 각 ➡ $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$

(3) 제3사분면의 각 ➡ $2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

(4) 제4사분면의 각 ➡ $2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$

02 각 θ를 나타내는 동경과 각 11θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$11\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$10\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{n}{5}\pi$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$0<\frac{n}{5}\pi<\pi$ $\therefore 0<n<5$

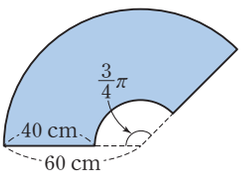
n은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{5}$ 또는 $\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{5}$, $\beta=\frac{4}{5}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{5}+\frac{4}{5}\pi=\pi$

03 와이퍼의 고무판이 $\frac{3}{4}\pi$만큼 회전하면서 닦는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



반지름의 길이가 60 cm이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times60^2\times\frac{3}{4}\pi=1350\pi(\mathrm{cm}^2)$

반지름의 길이가 20 cm이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times20^2\times\frac{3}{4}\pi=150\pi(\mathrm{cm}^2)$

따라서 와이퍼의 고무판이 회전하면서 닦는 부분의 넓이는

$1350\pi-150\pi=1200\pi(\mathrm{cm}^2)$

04 (i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로

각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로

$\sqrt{(\tan\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{\tan^2\theta}-|\sin\theta-\cos\theta|+\sin\theta$

$=|\tan\theta+\cos\theta|+|\tan\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|+\sin\theta$

$=-(\tan\theta+\cos\theta)-\tan\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+\sin\theta$

$=-\tan\theta-\cos\theta-\tan\theta-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$

$=-2\tan\theta$

05 $\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta(1-2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$\quad+\cos^2\theta(1+2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=2\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$

06 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)-\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}$$

즉, $\frac{2(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}=4$이므로

$1-\sin^2\theta=2\sin^2\theta$, $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

07 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{6}}$$

$=-4\sqrt{3}$

08 이차방정식 $x^2+ax+\frac{2}{9}=0$의 두 근이 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=-a$ ……㉠

$\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{2}{9}$ ……㉡

㉠에서 $-a=1$ $\therefore a=-1$

또, 이차방정식 $x^2+bx+1=0$의 두 근이 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-b$

이때 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$-b=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ $\therefore b^2=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{9}{2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore 2(a^2+b^2)=2\left(1+\frac{9}{2}\right)=11$

LEVEL 2

09 ㄱ. $84^\circ=84\times1^\circ=84\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{15}\pi$ (참)

ㄴ. $-\frac{12}{7}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{7}\pi$이므로 제1사분면의 각이다. (거짓)

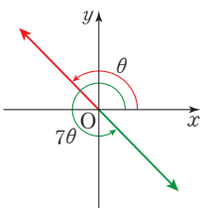
ㄷ. $75^\circ=75\times1^\circ=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$

$\frac{29}{12}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{12}\pi$

즉, 75°와 $\frac{29}{12}\pi$를 나타내는 동경은 일치한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로



$7\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ……㉠

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$

$3<2n+1<6$ $\therefore 1<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

11 각 θ를 나타내는 동경과 각 99θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$99\theta+\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

$100\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{100}\pi$ ……㉠

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{2n+1}{100}\pi<\frac{\pi}{2}$

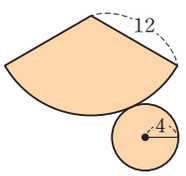
$0<2n+1<50$ $\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{49}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, \cdots, 24$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{1}{100}\pi, \frac{3}{100}\pi, \cdots, \frac{49}{100}\pi$

따라서 조건을 만족시키는 각 θ의 개수는 25이다.

12 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times4=8\pi$

즉, 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times8\pi=48\pi$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이) $=48\pi+\pi\times4^2=64\pi$

13 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면

$l=40-2r$ (단, $0<r<20$) → $r>0$, $40-2r>0$에서 $0<r<20$

부채꼴의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(40-2r)$

$=-r^2+20r=-(r-10)^2+100$

따라서 S의 최댓값은 $r=10$일 때, 100이므로 화단의 넓이의 최대값은 $100\ \mathrm{m}^2$이다.

다른 풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m, 넓이를 $S\ \mathrm{m}^2$라 하면

$2r+l=40$이고 $2r>0$, $l>0$이므로

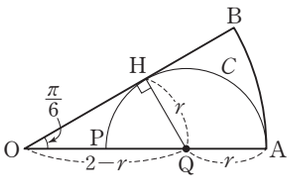
$40=2r+l\geq 2\sqrt{2r\times l}$ (단, 등호는 $2r=l$일 때 성립)

$=2\sqrt{4\times\frac{1}{2}rl}=2\sqrt{4S}=4\sqrt{S}$

즉, $4\sqrt{S}\leq 40$에서 $S\leq 100$

따라서 S의 최댓값이 100이므로 화단의 넓이의 최대값은 $100\ \mathrm{m}^2$이다.

14



반원 C의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=2-r$이다.

선분 OB와 반원 C의 접점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{QH}}=r$이므로 직각삼각형 OQH에서

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{r}{2-r}=\frac{1}{2}$

$2r=2-r$, $3r=2$ $\quad\therefore r=\frac{2}{3}$

따라서

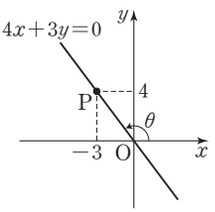
$S_1=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2}{9}\pi$

이므로

$S_1+S_2=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{9}\pi=\frac{5}{9}\pi$

15

오른쪽 그림과 같이 직선 $4x+3y=0$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x$ 위에 있는 제2사분면 위의 한 점을 $\mathrm{P}(-3, 4)$라 하면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

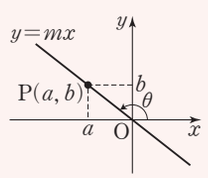
따라서 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$10(\sin\theta-\cos\theta)=10\times\left\{\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right\}=14$

Lecture

동경 OP가 원점을 지나는 직선의 방정식으로 주어진 경우의 삼각함수

직선 $y=mx$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 원점 O를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 θ라 하면



(1) $\mathrm{P}(a, ma)$

(2) $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$

(3) $\sin\theta=\frac{b}{\overline{\mathrm{OP}}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\overline{\mathrm{OP}}}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}=m$

16

$\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta\tan\theta}$에서

$\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$ ($\because \sin\theta\cos\theta\neq 0$)

즉, 각 θ는 제4사분면의 각이므로

$\cos\theta>0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\cos\theta+(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\sin\theta$

참고 **음수의 제곱근의 성질**

실수 a, b에 대하여 $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ ← $a<0$, $b<0$일 때를 제외하면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ ← $a>0$, $b<0$일 때를 제외하면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

17

① $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$

② $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sin\theta\cos\theta$

③ $\frac{\cos\theta-\sin\theta\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$=\frac{\cos\theta-\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\sin\theta+\cos\theta$

④ $(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-2\cos\theta)^2$

$=4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$+\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$

$=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=5$

⑤ $\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta\right)$

$=\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

18

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos\theta(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(2-2\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$

즉, $\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=-1$이므로

$\sin\theta=-2\cos\theta$ ……㉠

㉠을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$4\cos^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \cos^2\theta=\frac{1}{5}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

19 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4},\ 2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\frac{7}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}$

20 이차방정식 $5x^2+kx+4=0$의 두 근이 $\cos\theta,\ \tan\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\cos\theta+\tan\theta=-\frac{k}{5}$ ……㉠

$\cos\theta\tan\theta=\frac{4}{5}$ ……㉡

㉡에서 $\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{5}$이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 $\sin\theta=\frac{4}{5}$를 대입하면

$\frac{16}{25}+\cos^2\theta=1,\ \cos^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$을 ㉡에 대입하면

$-\frac{3}{5}\tan\theta=\frac{4}{5}$ $\therefore \tan\theta=-\frac{4}{3}$

따라서 ㉠에서

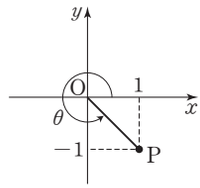
$-\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{k}{5}$ $\therefore k=\frac{29}{3}$

서술형

21 각 θ가 제4사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi$ ……㉠ … ❶



㉠에서 $n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$ (k는 정수)인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{2}{3}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다. … ❷

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{7}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{4}{3}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다. … ❸

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{11}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+2\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다. … ❹

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 위치할 수 없는 사분면은 제1사분면이다. … ❺

채점 기준	비율
❶ 각 $\frac{\theta}{3}$의 값의 범위를 일반각으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n=3k$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	20 %
❸ $n=3k+1$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	20 %
❹ $n=3k+2$일 때, 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	20 %
❺ 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 위치할 수 없는 사분면을 구할 수 있다.	20 %

22 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm라 하면

$l=8-2r$ (단, $0<r<4$) → $r>0,\ 8-2r>0$에서 $0<r<4$ … ❶

부채꼴의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)=-r^2+4r=-(r-2)^2+4$

즉, S는 $r=2$일 때, 최댓값을 갖는다. … ❷

이때 $l=8-2r$에 $r=2$를 대입하면

$l=8-2\times2=4$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$l=r\theta$이므로

$4=2\theta$ $\therefore \theta=2$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 호의 길이를 반지름의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	40 %

Lecture

둘레의 길이가 a로 일정한 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기가 2일 때 항상 최댓값을 갖는다.

➡ 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l+2r=a \quad \therefore l=a-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(a-2r)$

$=-r^2+\frac{a}{2}r=-\left(r-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{16}$

따라서 $r=\frac{a}{4}$일 때 부채꼴의 넓이가 최대가 되고, 이때의 호의 길이는

$l=a-2\times\frac{a}{4}=\frac{a}{2}$

이므로 중심각의 크기를 θ라 하면 $l=r\theta$에서

$\frac{a}{2}=\frac{a}{4}\times\theta \quad \therefore \theta=2$

23 $\tan\theta=\frac{5}{12}$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{12} \quad \therefore \sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\left(\frac{5}{12}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$

$\frac{169}{144}\cos^2\theta=1 \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{144}{169}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$ … ❶

$\therefore \sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta=\frac{5}{12}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{5}{13}$ … ❷

$\therefore \frac{26\sin\theta}{13\cos\theta+2}=\frac{26\times\left(-\frac{5}{13}\right)}{13\times\left(-\frac{12}{13}\right)+2}=\frac{-10}{-10}=1$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

24 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{5}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{5}{9} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{9}$ … ❶

이때 이차방정식 $9x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{b}{9}$

따라서 $-\frac{a}{9}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$에서 $a=3\sqrt{5}$, $\frac{b}{9}=-\frac{2}{9}$에서 $b=-2$ … ❷

$\therefore ab=3\sqrt{5}\times(-2)=-6\sqrt{5}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

6 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 그래프

개념 확인 146~152쪽

1 2

2 -6

3 (1) 치역: $\left\{y\middle|-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$, 주기: 2π, 그래프: 풀이 참조

(2) 치역: $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 그래프: 풀이 참조

(3) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: π, 그래프: 풀이 참조

4 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: π, 그래프: 풀이 참조

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: π, 그래프: 풀이 참조

(3) 최댓값: 없다, 최솟값: 없다, 주기: $\frac{\pi}{2}$, 그래프: 풀이 참조

1 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{1}{2}$이면 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$이므로

$f(6)=f\left(\frac{11}{2}\right)=f(5)=\cdots=f(2)=2$

2 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x-2)$가 성립하므로

$x-2=t$라 하면 $x=t+2$에서 $f(t+4)=f(t)$

$f(19)=f(15)=f(11)=\cdots=f(-1)=-3$

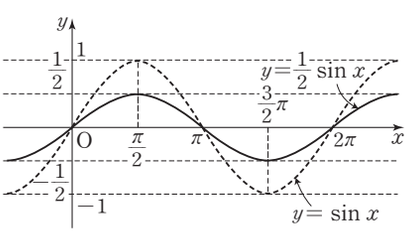
$f(27)=f(23)=f(19)=\cdots=f(-1)=-3$

$\therefore f(19)+f(27)=-3+(-3)=-6$

3 (1) $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}$이므로 치역은 $\left\{y\middle|-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$,

주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이다.

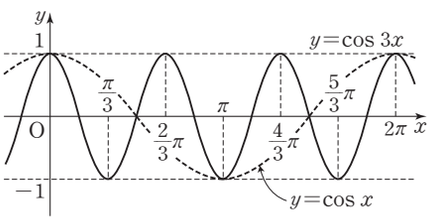
따라서 함수 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $-1\le\cos 3x\le 1$이므로 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$,

주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.

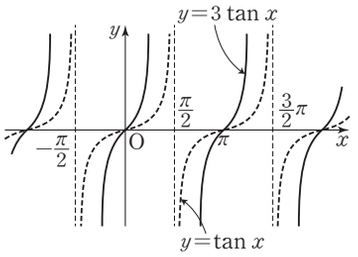
따라서 함수 $y=\cos 3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) 치역은 실수 전체의 집합,

주기는 $\frac{\pi}{1}=\pi$이다.

따라서 함수 $y=3\tan x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

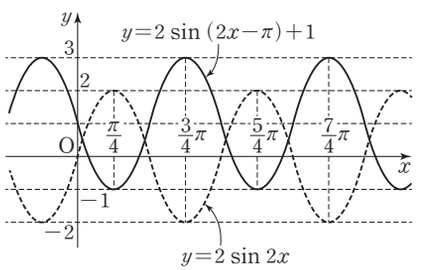


4 (1) 함수 $y=2\sin(2x-\pi)+1=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$,

주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

따라서 함수 $y=2\sin(2x-\pi)+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.

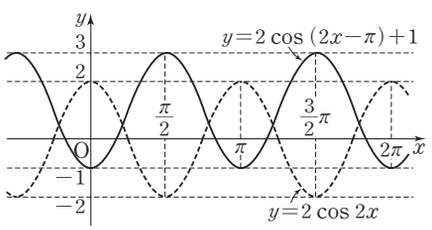


(2) 함수 $y=2\cos(2x-\pi)+1=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$,

주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

따라서 함수 $y=2\cos(2x-\pi)+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) 함수 $y=2\tan(2x-\pi)+1=2\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=2\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

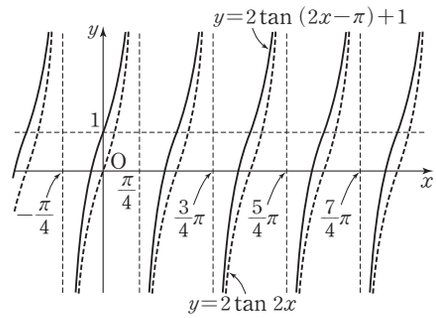
이때 최댓값, 최솟값은 없고,

주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

또, 점근선의 방정식은 $2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서

$x=\frac{2n+3}{4}\pi$ (단, n은 정수)

따라서 함수 $y=2\tan(2x-\pi)+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 삼각함수의 그래프를

① x축의 방향으로 평행이동하면 최댓값, 최솟값, 주기는 모두 변하지 않는다.

② y축의 방향으로 평행이동하면 최댓값, 최솟값은 변하지만 주기는 변하지 않는다.

개념 드릴

153쪽

1 그래프: 풀이 참조

(1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y\mid -2\le y\le 2\}$

(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2 (4) $\frac{2}{3}\pi$

2 그래프: 풀이 참조

(1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y\mid -3\le y\le 3\}$

(3) 최댓값: 3, 최솟값: -3 (4) π

3 그래프: 풀이 참조

(1) $\frac{n+1}{3}\pi$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합

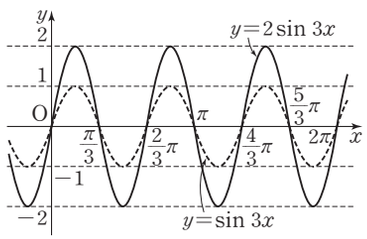
(2) $x=\frac{n+1}{3}\pi$ (단, n은 정수) (3) $\frac{\pi}{3}$

4 그래프: 풀이 참조

(1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y\mid 0\le y\le 3\}$

(3) 최댓값: 3, 최솟값: 0 (4) π

1 함수 $y=2\sin 3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

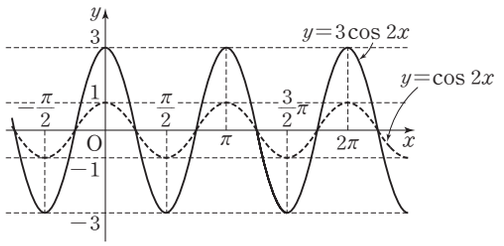
(2) 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$이다.

(3) 함수의 치역이 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$이므로

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(4) 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.

2 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



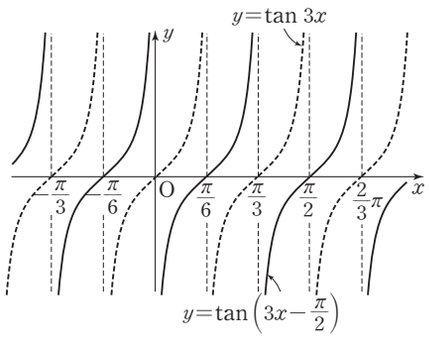
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$이다.

(3) 함수의 치역이 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.

(4) 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다.

3 함수 $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\tan 3\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



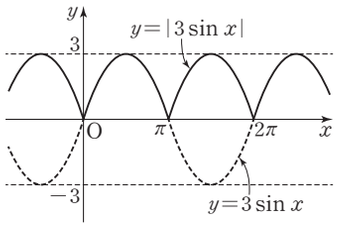
(1) $3x-\dfrac{\pi}{2}=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$에서 $x=\dfrac{n+1}{3}\pi$ (단, n은 정수)

즉, 정의역은 $\dfrac{n+1}{3}\pi$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이다.

(2) 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{n+1}{3}\pi$ (n은 정수)이다.

(3) 주기는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

4 함수 $y=|3\sin x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 $\{y\,|\,0\le y\le 3\}$이다.

(3) 함수의 치역이 $\{y\,|\,0\le y\le 3\}$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 0이다.

(4) 주기는 π이다.

필수 예제 01 삼각함수의 그래프 154쪽

01-1 답 (1) 그래프: 풀이 참조, 최댓값: $\dfrac{1}{2}$, 최솟값: $-\dfrac{1}{2}$, 주기: 2π

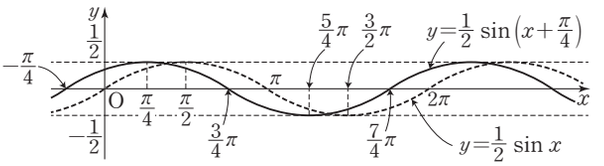
(2) 그래프: 풀이 참조, 최댓값: 5, 최솟값: -1, 주기: 6π

(3) 그래프: 풀이 참조, 최댓값: 없다, 최솟값: 없다, 주기: π

|전략| 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$의 최댓값은 $|a|+d$, 최솟값은 $-|a|+d$, 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$임을 이용한다.

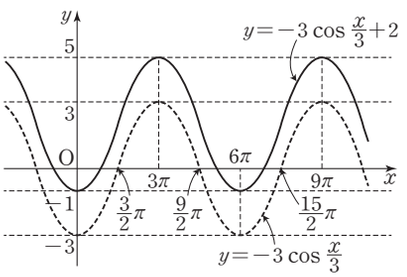
또, 함수 $y=a\tan(bx+c)+d$의 최댓값, 최솟값은 없고 주기는 $\dfrac{\pi}{|b|}$임을 이용한다.

(1) 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



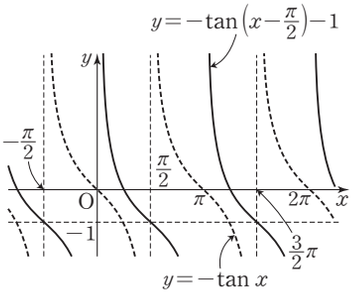
따라서 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$, 주기는 $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$이다.

(2) 함수 $y=-3\cos\dfrac{x}{3}+2$의 그래프는 함수 $y=-3\cos\dfrac{x}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=-3\cos\dfrac{x}{3}+2$의 최댓값은 5, 최솟값은 -1, 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$이다.

(3) 함수 $y=-\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1$의 그래프는 함수 $y=-\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$의 최댓값과 최솟값은 없고,

주기는 $\frac{\pi}{1}=\pi$이다.

01-2 답 $\frac{1}{4}$

|전략| 함수 $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프의 점근선의 방정식은 $bx+c=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이고, 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$임을 이용한다.

점근선의 방정식은 $2x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서

$x=\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수) $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

필수 예제 02 삼각함수의 미정계수의 결정 – 조건이 주어진 경우 155쪽

02-1 답 12

|전략| 함수 $y=a\tan bx$에서 b는 주기를 이용하여 구하고, a는 함숫값을 이용하여 구한다.

주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore |b|=3$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

또, $f(x)=a\tan 3x$에서 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=4$이므로

$a\tan\frac{\pi}{4}=4$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore ab=4\times3=12$

02-2 답 3

|전략| 함수 $y=a\cos bx+c$에서 a, c는 최댓값과 최솟값을, b는 주기를 결정한다.

주어진 함수의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ $\quad\therefore |b|=2$

이때 $b>0$이므로 $b=2$

또, $a>0$이고 최댓값이 5, 최솟값이 -1이므로

$a+c=5$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $c=2$

$\therefore a-b+c=3-2+2=3$

02-3 답 -48

|전략| 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프에서 a, d는 최댓값과 최솟값을, b는 주기를 결정한다.

주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore |b|=4$

이때 $b>0$이므로 $b=4$

$a<0$이고 최댓값이 7이므로 $-a+c=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)=a\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=1$이므로

$a\sin\frac{\pi}{2}+c=1$ $\quad\therefore a+c=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $c=4$

$\therefore abc=-3\times4\times4=-48$

필수 예제 03 삼각함수의 미정계수의 결정 – 그래프가 주어진 경우 156쪽

03-1 답 4

|전략| 그래프에서 일정하게 반복되는 구간을 찾아 주기를 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

이때 $b>0$이므로 $b=2$

또, $a>0$이고 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

$\therefore abc=2\times2\times1=4$

03-2 답 3

|전략| 그래프에서 일정하게 반복되는 구간을 찾아 주기를 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{3}$에서 $|b|=3$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=a\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+c$이고

그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$을 지나므로

$a\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+c=-1$ $\quad\therefore c=-1$

또, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$을 지나므로

$a\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)-1=0$, $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

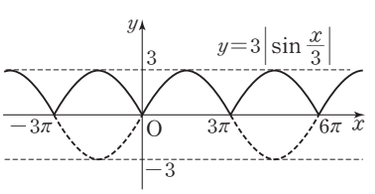
$\therefore a+b+c=1+3+(-1)=3$

필수 예제 04 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프 157쪽

04-1 답 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: 3π

|전략| 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y=3\left|\sin\frac{x}{3}\right|$의 그래프는 함수 $y=3\sin\frac{x}{3}$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

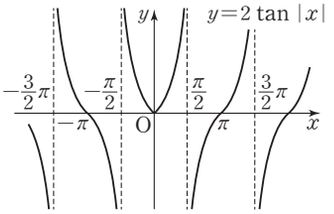


따라서 최댓값은 3, 최솟값은 0, 주기는 3π이다.

04-2 답 ㄴ, ㄹ

|전략| 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y=2\tan|x|$의 그래프는 함수 $y=2\tan x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 주기함수가 아니다. (거짓)

ㄴ. 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 최솟값은 없다. (거짓)

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

04-3 답 3

|전략| 함수 $y=|\cos ax|$의 주기는 함수 $y=\cos ax$의 주기의 $\frac{1}{2}$임을 이용한다.

함수 $f(x)=2|\cos ax|+b$의 그래프는 함수 $f(x)=2|\cos ax|$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=2|\cos ax|$의 주기는 $y=2\cos ax$의 주기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}$에서 $|a|=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

또, $0\leq|\cos 2x|\leq 1$이고 최댓값이 3이므로

$2+b=3 \quad \therefore b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

Lecture

절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

(1) $y=|\sin x|$의 주기: π ➡ $y=|\sin ax|$의 주기: $\frac{\pi}{|a|}$

(2) $y=|\cos x|$의 주기: π ➡ $y=|\cos ax|$의 주기: $\frac{\pi}{|a|}$

(3) $y=|\tan x|$의 주기: π ➡ $y=|\tan ax|$의 주기: $\frac{\pi}{|a|}$

2 삼각함수의 성질

개념 확인 158~160쪽

1 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1

1 (1) $\sin 315^\circ=\sin(90^\circ\times 3+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{13}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

개념 드릴 161쪽

1 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) -1

3 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $-\sqrt{3}$

4 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$

1 (1) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{19}{3}\pi=\cos\left(2\pi\times 3+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{7}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(4) $\tan\frac{25}{6}\pi=\tan\left(2\pi\times 2+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(3) $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(2\pi\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(4) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=-\tan\frac{9}{4}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

3 (1) $\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

4 (1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

필수 예제 01 여러 가지 각의 삼각함수 162쪽

01-1 답 (1) -1 (2) $\frac{15}{4}$

|전략| 삼각함수의 성질을 이용한다.

(1) $\sin\frac{29}{6}\pi=\sin\left(2\pi\times 2+\frac{5}{6}\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\frac{4}{3}\pi$$
$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{15}{4}\pi=\tan\left(2\pi\times2-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\therefore\ \sin\frac{29}{6}\pi+\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+\tan\frac{15}{4}\pi$$
$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)=-1$$

(2) $\tan780^\circ=\tan(360^\circ\times2+60^\circ)=\tan60^\circ=\sqrt{3}$
$$\sin(-660^\circ)=-\sin660^\circ=-\sin(360^\circ\times2-60^\circ)$$
$$=-(-\sin60^\circ)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos570^\circ=\cos(360^\circ+210^\circ)=\cos210^\circ$$
$$=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\ \tan^2780^\circ-\sin(-660^\circ)\times\cos570^\circ$$
$$=(\sqrt{3})^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{15}{4}$$

01-2 답 0

|전략| 삼각함수의 성질을 이용한다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\cos\theta+(-\cos\theta)+(-\sin\theta)-(-\sin\theta)$
$=0$

01-3 답 0

|전략| 삼각함수의 성질을 이용한다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(3\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\cos\theta(-\cos\theta)}{-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(-\sin\theta)}{\sin\theta}$
$=\cos\theta-\cos\theta=0$

필수 예제 02 여러 가지 각의 삼각함수 – 각의 통일 163쪽

02-1 답 $\frac{89}{2}$

|전략| 두 각의 크기의 합이 90°인 것끼리 묶고, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

$\cos89^\circ=\cos(90^\circ-1^\circ)=\sin1^\circ$,
$\cos88^\circ=\cos(90^\circ-2^\circ)=\sin2^\circ$, …,
$\cos46^\circ=\cos(90^\circ-44^\circ)=\sin44^\circ$이므로
(주어진 식)
$=(\cos^21^\circ+\cos^289^\circ)+(\cos^22^\circ+\cos^288^\circ)$
$+\cdots+(\cos^244^\circ+\cos^246^\circ)+\cos^245^\circ+\cos^290^\circ$
$=(\cos^21^\circ+\sin^21^\circ)+(\cos^22^\circ+\sin^22^\circ)$
$+\cdots+(\cos^244^\circ+\sin^244^\circ)+\cos^245^\circ+\cos^290^\circ$
$=1\times44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0=\frac{89}{2}$

02-2 답 1

|전략| 두 각의 크기의 합이 90°인 것끼리 묶고, $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$임을 이용한다.

$\tan89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan1^\circ}$,
$\tan88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan2^\circ}$, …,
$\tan46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan44^\circ}$이므로
(주어진 식)
$=(\tan1^\circ\times\tan89^\circ)\times(\tan2^\circ\times\tan88^\circ)$
$\times\cdots\times(\tan44^\circ\times\tan46^\circ)\times\tan45^\circ$
$=\left(\tan1^\circ\times\frac{1}{\tan1^\circ}\right)\times\left(\tan2^\circ\times\frac{1}{\tan2^\circ}\right)$
$\times\cdots\times\left(\tan44^\circ\times\frac{1}{\tan44^\circ}\right)\times\tan45^\circ$
$=1$

02-3 답 1

|전략| $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$임을 이용한다.

$A=\frac{\pi}{3}-\theta$, $B=\frac{\pi}{6}+\theta$라 하면
$A+B=\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 $B=\frac{\pi}{2}-A$
$\therefore\ \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sin^2A+\sin^2B$
$=\sin^2A+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$
$=\sin^2A+\cos^2A$
$=1$

필수 예제 03 삼각함수를 포함한 식의 최대 · 최소 – 일차식 꼴 164쪽

03-1 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 9, 최솟값: 5

|전략| (1) 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 함수를 $\sin x$에 대한 식으로 나타낸다.
(2) $\cos x=t$로 놓고 절댓값 기호를 풀어 t에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로
$y=4\sin x-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$
$=4\sin x-\sin x+2$
$=3\sin x+2$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-3\le3\sin x\le3$ $\therefore -1\le3\sin x+2\le5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 -1이다.

(2) $y=|-2\cos x-2|+5$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$-1\le t\le1$이고

$y=|-2t-2|+5=|2t+2|+5=2|t+1|+5$

$t\ge-1$일 때,

$y=2(t+1)+5=2t+7$

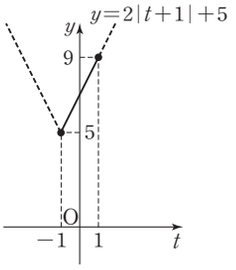
$t<-1$일 때,

$y=-2(t+1)+5=-2t+3$

$-1\le t\le1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 9,

$t=-1$일 때 최솟값은 5이다.



다른 풀이 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-2\le-2\cos x\le2$, $-4\le-2\cos x-2\le0$

$0\le|-2\cos x-2|\le4$ $\therefore 5\le|-2\cos x-2|+5\le9$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 9, 최솟값은 5이다.

Lecture

삼각함수의 최대·최소 – 절댓값 기호를 포함한 일차식 꼴

(i) 삼각함수의 성질을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) 삼각함수를 t로 치환한 후 t의 값의 범위를 구한다.

(iii) t에 대한 함수의 그래프를 그려서 t의 값의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

03-2 답 1

|전략| $\sin x=t$로 놓고 절댓값 기호를 풀어 t에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낸다.

$y=|3\sin x-1|+k$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$-1\le t\le1$이고

$y=|3t-1|+k=3\left|t-\frac{1}{3}\right|+k$

$t\ge\frac{1}{3}$일 때,

$y=3\left(t-\frac{1}{3}\right)+k=3t-1+k$

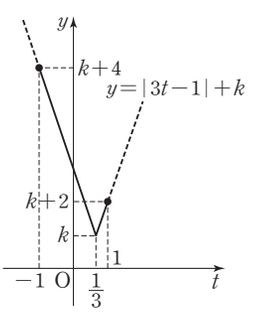
$t<\frac{1}{3}$일 때,

$y=-3\left(t-\frac{1}{3}\right)+k=-3t+1+k$

$-1\le t\le1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $k+4$,

$t=\frac{1}{3}$일 때 최솟값은 k이다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$(k+4)+k=6$, $2k=2$ $\therefore k=1$

다른 풀이 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-3\le3\sin x\le3$, $-4\le3\sin x-1\le2$

$0\le|3\sin x-1|\le4$ $\therefore k\le|3\sin x-1|+k\le4+k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $4+k$, 최솟값은 k이므로

$(k+4)+k=6$, $2k=2$ $\therefore k=1$

필수 예제 04 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소 – 유리식, 이차식 꼴 165쪽

04-1 답 (1) 최댓값: $\frac{7}{3}$, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 7, 최솟값: -2

|전략| (1) $\cos x=t$로 놓고 t에 대한 유리함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(2) $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 주어진 함수를 $\sin x$에 대한 이차식으로 나타낸다.

(1) $y=\frac{3\cos x-4}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

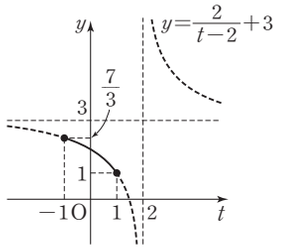
$y=\frac{3t-4}{t-2}=\frac{3(t-2)+2}{t-2}$

$=\frac{2}{t-2}+3$

$-1\le t\le1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{7}{3}$,

$t=1$일 때 최솟값은 1이다.



다른 풀이 $y=\frac{3\cos x-4}{\cos x-2}=\frac{2}{\cos x-2}+3$에서

$-3\le\cos x-2\le-1$이므로

$-1\le\frac{1}{\cos x-2}\le-\frac{1}{3}$, $-2\le\frac{2}{\cos x-2}\le-\frac{2}{3}$

$\therefore 1\le\frac{2}{\cos x-2}+3\le\frac{7}{3}$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{7}{3}$, 최솟값은 1이다.

(2) $\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$y=-4\cos^2x+4\sin x+3$

$=-4(1-\sin^2x)+4\sin x+3$

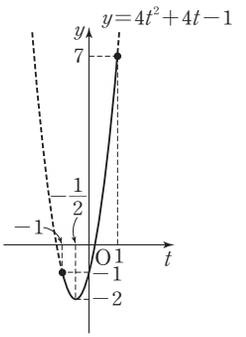
$=4\sin^2x+4\sin x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=4t^2+4t-1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2$

$-1\le t\le1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 7, $t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 -2이다.



04-2 답 최댓값: 3, 최솟값: 2

|전략| $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$임을 이용하여 주어진 함수를 $\tan x$에 대한 이차식으로 나타낸다.

$\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$이므로

$y=\tan^2(\pi+x)+2\tan(\pi-x)+3$

$=\tan^2x-2\tan x+3$

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

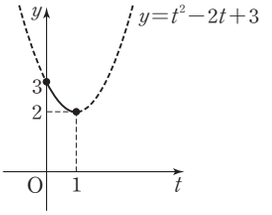
$0\le t\le1$이고

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

$0\le t\le1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=0$일 때 최댓값은 3,

$t=1$일 때 최솟값은 2이다.



3 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

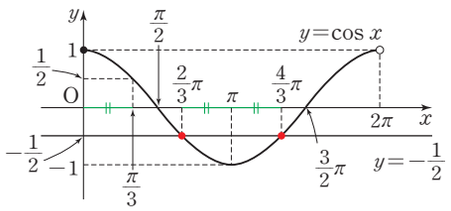
개념 확인 166~167쪽

1 (1) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

2 (1) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

(2) $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

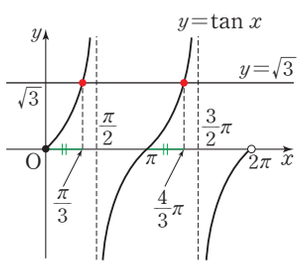
1 (1) 함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

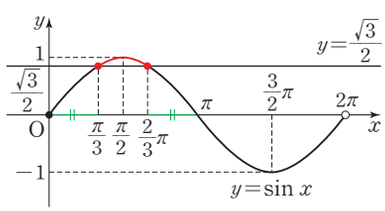
(2) 함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

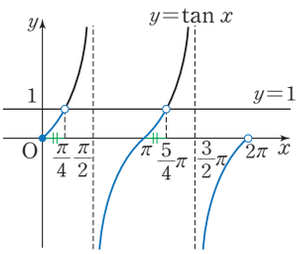
2 (1) 함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

(2) 함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

개념 드릴 168쪽

1 (1) $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

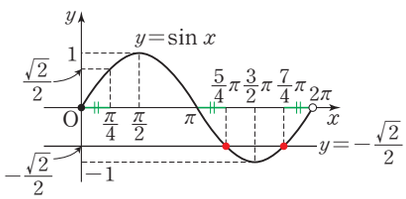
2 (1) $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

(2) $0\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

(3) $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

1 (1) $2\sin x+\sqrt{2}=0$에서 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.

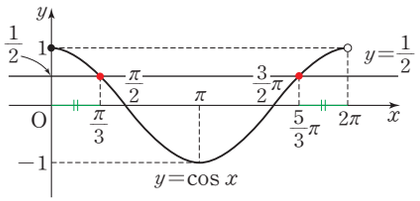


따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(2) $2\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.

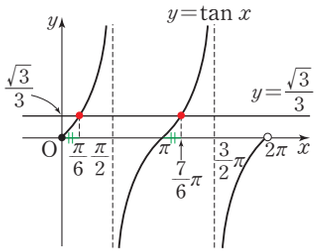


따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

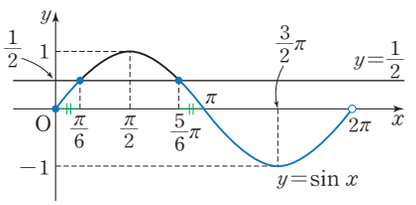
(3) $3\tan x-\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

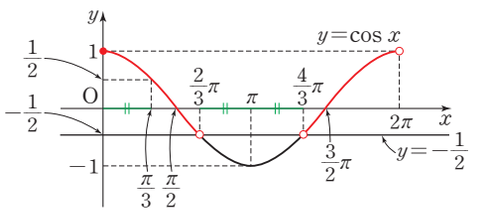
2 (1) 함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

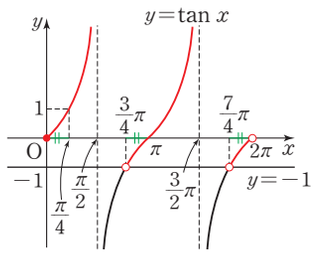
(2) 함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

(3) 함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-1$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

필수 예제 01 삼각함수를 포함한 방정식 – 일차식 꼴 169쪽

01-1 답 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

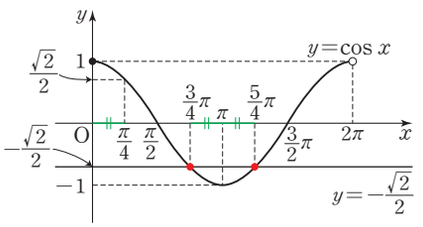
|전략| 삼각함수의 성질을 이용하여 좌변을 $\cos x$에 대한 식으로 변형한다.

$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로

$\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}$에서

$-\cos x-\cos x=\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

01-2 답 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

|전략| $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓고 t의 값의 범위에서 방정식 $\tan t=k$를 푼다.

$x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

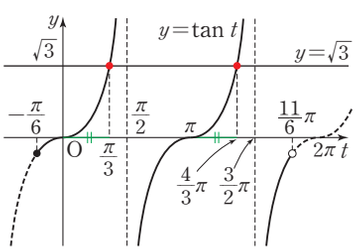
$\therefore\ -\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$

$\sqrt{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3$에서

$\sqrt{3}\tan t=3$ $\quad\therefore\ \tan t=\sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$에서 방정식 $\tan t=\sqrt{3}$의 해는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$



따라서 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

01-3 답 $\frac{14}{3}\pi$

|전략| $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$로 놓고 t의 값의 범위에서 방정식 $\sin t=k$를 푼다.

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $\pi<x<3\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\pi$

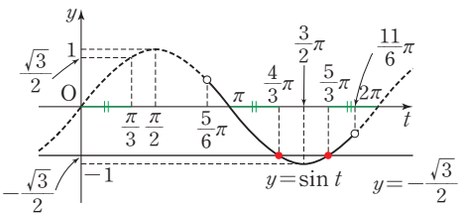
$\frac{5}{6}\pi<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{11}{6}\pi$ $\quad\therefore\ \frac{5}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$

$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$에서

$2\sin t+\sqrt{3}=0$ $\quad\therefore\ \sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$에서 방정식 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$



즉, $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=2\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$2\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$

필수 예제 02 삼각함수를 포함한 방정식 – 이차식 꼴 170쪽

02-1 답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (3) $x=\frac{3}{4}\pi$

|전략| (1), (2) $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 방정식을 푼다.

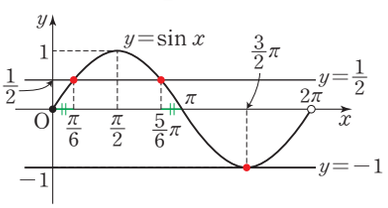
(3) 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리한 후 방정식을 푼다.

(1) $\cos^2x=1-\sin^2x$이므로 $2\cos^2x-\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2x)-\sin x-1=0$, $2\sin^2x+\sin x-1=0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$



(i) $\sin x=-1$일 때, $x=\frac{3}{2}\pi$

(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(2) $\sin^2x=1-\cos^2x$이므로

$2\sin^2x+3\sqrt{3}\cos x-5=0$에서

$2(1-\cos^2x)+3\sqrt{3}\cos x-5=0$

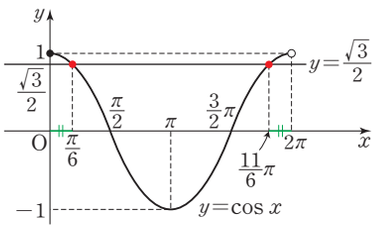
$2\cos^2x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$

$(2\cos x-\sqrt{3})(\cos x-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos x=\sqrt{3}$

그런데 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le\cos x\le1$이므로

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$



따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $0<x<\pi$에서 $\tan x\neq0$이므로 주어진 식의 양변에 $\tan x$를 곱하면

$\tan^2x+1=-2\tan x$

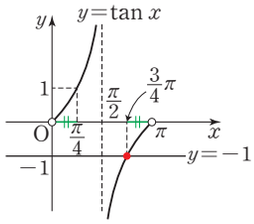
$\tan^2x+2\tan x+1=0$

$(\tan x+1)^2=0$

$\therefore\ \tan x=-1$

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{3}{4}\pi$



02-2 답 4π

|전략| 삼각함수의 성질과 $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 방정식을 푼다.

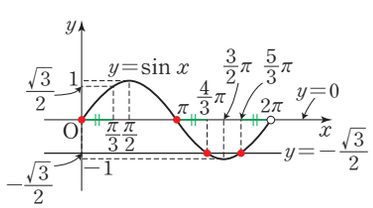
$\cos^2x=1-\sin^2x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$2\cos^2x+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2=0$에서

$2(1-\sin^2x)-\sqrt{3}\sin x-2=0$

$2\sin^2x+\sqrt{3}\sin x=0$, $\sin x(2\sin x+\sqrt{3})=0$

$\therefore\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin x=0$



(i) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ii) $\sin x=0$일 때, $x=0$ 또는 $x=\pi$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$0+\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=4\pi$

필수 예제 03 삼각함수를 포함한 부등식 – 일차식 꼴 171쪽

03-1 답 $\frac{2}{3}\pi < x \le \pi$

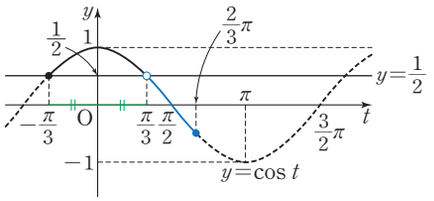
|전략| $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓고 t의 값의 범위에서 부등식 $\cos t < \frac{1}{2}$을 푼다.

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0 \le x \le \pi$에서

$-\frac{\pi}{3} \le x-\frac{\pi}{3} \le \frac{2}{3}\pi$ $\therefore -\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2}{3}\pi$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$에서 $\cos t < \frac{1}{2}$

함수 $y=\cos t\left(-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2}{3}\pi\right)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 t좌표는 $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$이다.



$-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2}{3}\pi$에서 부등식 $\cos t < \frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3} < t \le \frac{2}{3}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{3} < x-\frac{\pi}{3} \le \frac{2}{3}\pi$이므로

주어진 부등식의 해는

$\frac{2}{3}\pi < x \le \pi$

03-2 답 $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3}$

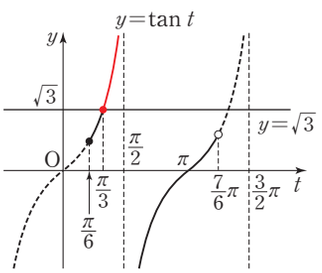
|전략| $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓고 t의 값의 범위에서 부등식 $\tan t \ge \sqrt{3}$을 푼다.

$x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0 \le x < \pi$에서

$\frac{\pi}{6} \le x+\frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{6} \le t < \frac{7}{6}\pi$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \ge \sqrt{3}$에서 $\tan t \ge \sqrt{3}$

함수 $y=\tan t\left(\frac{\pi}{6} \le t < \frac{7}{6}\pi\right)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 t좌표는 $\frac{\pi}{3}$이다.



$\frac{\pi}{6} \le t < \frac{7}{6}\pi$에서 부등식 $\tan t \ge \sqrt{3}$의 해는

$\frac{\pi}{3} \le t < \frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\pi}{3} \le x+\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$이므로

주어진 부등식의 해는

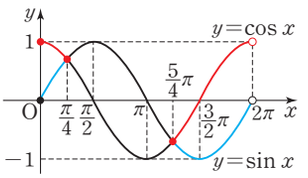
$\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3}$

03-3 답 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi \le x < 2\pi$

|전략| 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 동시에 그려 위치 관계를 파악한다.

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\sin x \le \cos x$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 함수 $y=\sin x$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

$0 \le x < 2\pi$일 때, 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 주어진 부등식의 해는

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi \le x < 2\pi$

참고 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\sin x=\cos x$이면 $\tan x=1$

따라서 $0 \le x < 2\pi$에서 방정식 $\sin x=\cos x$의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

필수 예제 04 삼각함수를 포함한 부등식 – 이차식 꼴 172쪽

04-1 답 (1) $0 \le x \le \pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi$

(2) $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

(3) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

|전략| (1), (2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한 후 부등식을 푼다.

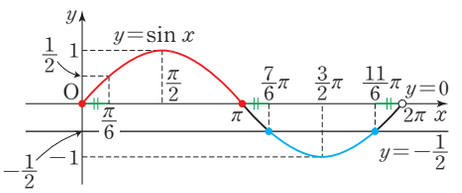
(3) 좌변을 인수분해한 후 부등식을 푼다.

(1) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $2\cos^2 x-\sin x-2 \le 0$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-2 \le 0$

$2\sin^2 x+\sin x \ge 0$, $\sin x(2\sin x+1) \ge 0$

$\therefore \sin x \le -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x \ge 0$



함수 $y=\sin x\ (0 \le x < 2\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=0$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$0 \le x \le \pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos x-1\geq 0$에서

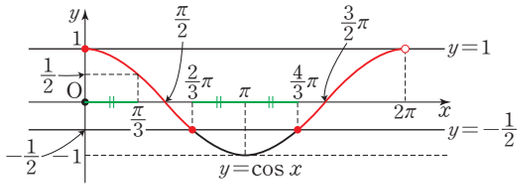
$2\sin^2 x+\cos x-1\geq 0$

또, $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $2\sin^2 x+\cos x-1\geq 0$에서

$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1\geq 0$

$2\cos^2 x-\cos x-1\leq 0$, $(2\cos x+1)(\cos x-1)\leq 0$

$\therefore -\frac{1}{2}\leq\cos x\leq 1$

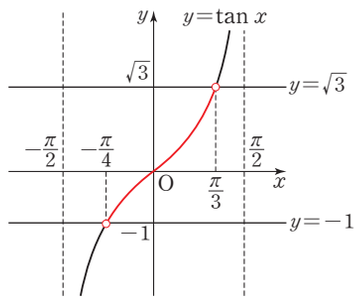


함수 $y=\cos x\ (0\leq x<2\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=1$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$0\leq x\leq\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\leq x<2\pi$

(3) $\tan^2 x+(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}<0$에서

$(\tan x+1)(\tan x-\sqrt{3})<0$ $\therefore -1<\tan x<\sqrt{3}$



함수 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=\sqrt{3}$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$

04-2 답 1

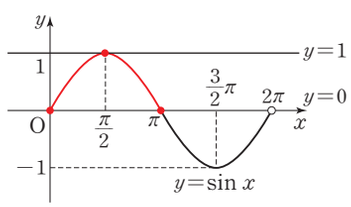
|전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 바꾼다.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $\cos^2 x+\sin x-1\geq 0$에서

$(1-\sin^2 x)+\sin x-1\geq 0$

$\sin^2 x-\sin x\leq 0$, $\sin x(\sin x-1)\leq 0$

$\therefore 0\leq\sin x\leq 1$



함수 $y=\sin x\ (0\leq x<2\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $0\leq x\leq\pi$

$\therefore \alpha=0$, $\beta=\pi$

$\therefore \cos^2(\alpha+\beta)=\cos^2\pi=(-1)^2=1$

필수 예제 05 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 활용 173쪽

05-1 답 $0\leq\theta<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

|전략| 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D>0$이어야 함을 이용한다.

이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\cos\theta-3\sin\theta=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-(-3\sin\theta)>0$, $2\cos^2\theta+3\sin\theta>0$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

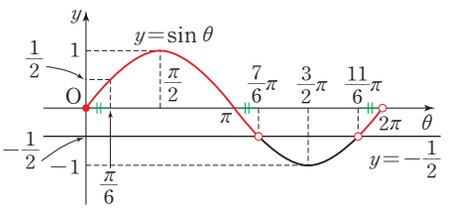
$2\cos^2\theta+3\sin\theta>0$에서

$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta>0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2<0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)<0$

이때 $\sin\theta-2<0$이므로 $2\sin\theta+1>0$

$\therefore \sin\theta>-\frac{1}{2}$



함수 $y=\sin\theta\ (0\leq\theta<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$0\leq\theta<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

05-2 답 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

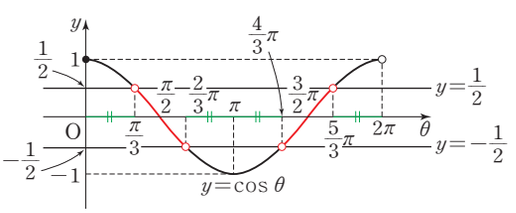
|전략| 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$이어야 함을 이용한다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+4x\cos\theta+1>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+4x\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta)^2-1<0$, $4\cos^2\theta-1<0$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{1}{2}$



함수 $y=\cos\theta\ (0\leq\theta<2\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$은 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

개념 정리

174~175쪽

01 실수 **02** 원점, y축 **03** 2π **04** $\frac{\pi}{2}$

05 원점 **06** $\frac{\pi}{2}$ **07** π

08 $|a|+d$, $-|a|+d$, $\frac{2\pi}{|b|}$ **09** $\frac{\pi}{|b|}$

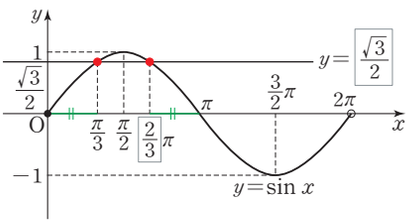
10 $-\sin x$, $\cos x$, $-\tan x$ **11** $-\sin x$, $-\cos x$, $\tan x$

12 $\sin x$, $-\cos x$, $-\tan x$ **13** $\cos x$, $-\sin x$, $-\frac{1}{\tan x}$

14 $\cos x$, $\sin x$, $\frac{1}{\tan x}$ **15** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2}{3}$ (그림: 풀이 참조)

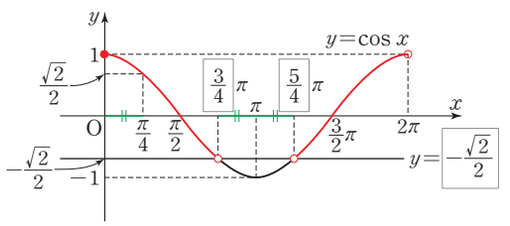
16 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, 2 (그림: 풀이 참조)

15 함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\boxed{\frac{2}{3}}\pi$

16 함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 부등식의 해는

$\boxed{0}\le x<\boxed{\frac{3}{4}}\pi$ 또는 $\boxed{\frac{5}{4}}\pi<x<\boxed{2}\pi$

중단원 마무리

176~178쪽

01 ⑤ **02** ④ **03** ③ **04** ④

05 ③ **06** ② **07** ④ **08** ③

09 ③ **10** ② **11** ② **12** ⑤

13 ① **14** ⑤ **15** ① **16** ②

17 ④ **18** ⑤ **19** ① **20** ①

21 -18π **22** -1 **23** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **24** $\frac{2}{3}\pi$

LEVEL 1

01 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $3-1=2$이다.

③ 최솟값은 $-3-1=-4$이다.

④ 함수 $y=3\cos 2x-1$의 그래프는 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 y축에 대하여 대칭이다.

⑤ 함수 $y=3\cos x$는 주기가 2π이고 함수 $y=3\cos 2x-1$은 주기가 π이므로 두 그래프는 평행이동하여 겹칠 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

02 주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

이때 $b>0$이므로 $b=2$

또, $a>0$이고 최댓값이 2, 최솟값이 -4이므로

$a+c=2$, $-a+c=-4$

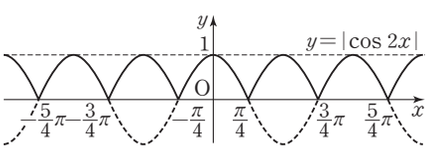
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=-1$

$\therefore a+b-2c=3+2-2\times(-1)=7$

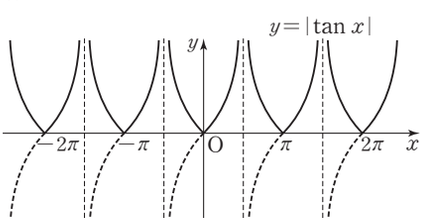
03 ① 함수 $y=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 함수 $y=3\tan x$의 주기는 π이다.

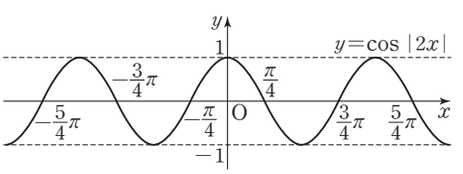
③ 함수 $y=|\cos 2x|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



④ 함수 $y=|\tan x|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 π이다.



⑤ 함수 $y=\cos|2x|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 π이다.



따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

참고 함수 $y=\cos ax$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=\cos|ax|$의 그래프와 모양이 같다.

즉, 함수 $y=\cos|ax|$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

04 $\dfrac{\cos(\pi+\theta)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\times\dfrac{\cos(\pi-\theta)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\dfrac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\dfrac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

05 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(x+\pi)=\cos x-\sin^2 x$

$=\cos x-(1-\cos^2 x)=\cos^2 x+\cos x-1$

$\cos x=t$로 놓으면

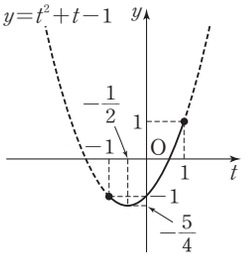
$-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

$-1\le t\le 1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 1,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{5}{4}$이다.



따라서 $M=1$, $m=-\frac{5}{4}$이므로

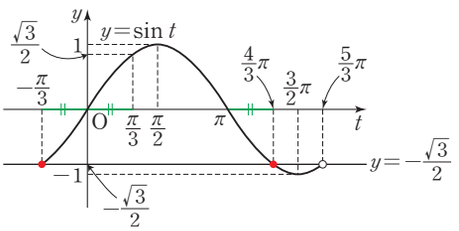
$M-m=1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$

06 $2x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le 2x<2\pi$

$-\frac{\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$ $\therefore -\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$

$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$에서 $2\sin t+\sqrt{3}=0$

$\therefore \sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



함수 $y=\sin t\left(-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi\right)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 위의 그림과 같으므로 방정식 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$t=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$

즉, $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$이므로

주어진 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\left(\frac{5}{6}\pi-0\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

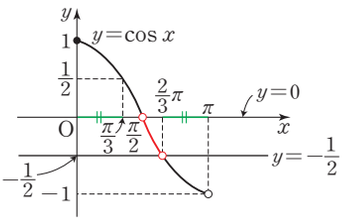
07 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $2\sin^2 x-\cos x>2$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x>2$

$2\cos^2 x+\cos x<0$

$\cos x(2\cos x+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos x<0$



함수 $y=\cos x\ (0\le x<\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=0$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$

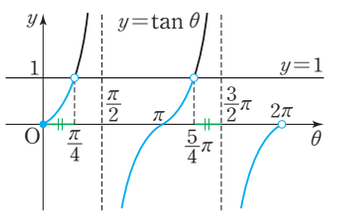
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi=\frac{7}{6}\pi$

08 이차방정식 $x^2+2x+2-\tan\theta=0$이 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-(2-\tan\theta)<0$

$-1+\tan\theta<0$ $\therefore \tan\theta<1$



함수 $y=\tan\theta\ (0\le\theta<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$은 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

따라서 θ의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

LEVEL 2

09 함수 $y=\cos 2x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\cos 2x-1$ $\therefore y=-\cos 2x+1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=-\cos 2(x+1)+1$ $\therefore y=-\cos(2x+2)+4$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$이므로

$a+b+c=-1+2+4=5$

10 ㄱ. 함수 $y=-3\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이고,

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이다. (거짓)

ㄴ. $y=-3\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+1$에 $x=0$을 대입하면

$y=-3\tan\pi+1=1$

즉, 그래프는 점 $(0, 1)$을 지난다. (참)

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{\pi}{2}x+\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}x=n\pi-\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=2n-1$ (단, n은 정수) (참)

ㄹ. 함수 $y=-3\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+1$의 최댓값과 최솟값은 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 함수 $f(x)=a\sin\left(\frac{x}{b}+\frac{\pi}{6}\right)+c$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{b}\right|}=\pi$ $\therefore |b|=\frac{1}{2}$

이때 $b>0$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$a>0$이고 최솟값이 -3이므로 $-a+c=-3$ ····· ㉠

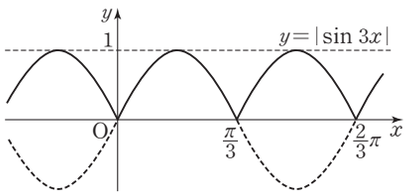
또, $f(x)=a\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+c$에서 $f(\pi)=0$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=0$ $\therefore \frac{1}{2}a+c=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-1$

$\therefore abc=2\times\frac{1}{2}\times(-1)=-1$

12 함수 $y=|\sin 3x|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.



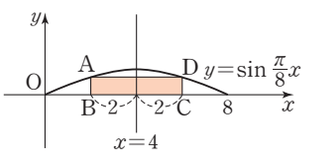
즉, 함수 $y=\cos(ax-1)+2$의 주기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$에서 $|a|=6$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

13 함수 $y=\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$이므로 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 8$에서



두 점 B, C는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 $B(2, 0)$, $C(6, 0)$

즉, 점 A의 x좌표가 2이므로 $y=\sin\frac{\pi}{8}x$에 $x=2$를 대입하면

$y=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore A\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}\times\overline{AB}=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

참고 삼각함수의 그래프에서 선분의 길이, 도형의 넓이 등을 구하는 경우에는 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

14 $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

(주어진 식)

$=(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ)+(\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ)$

$+(\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ)+(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)$

$+(\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)+\sin^2 90^\circ$

$=1\times 4+1=5$

15 선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$

이때 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$이므로

$2\alpha+3\beta=2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+3\beta=\pi+\beta$

$\therefore \cos(2\alpha+3\beta)=\cos(\pi+\beta)=-\cos\beta$

$=-\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=-\frac{2\sqrt{5}}{6}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

16 $y=\frac{-2\tan x}{\tan x+2}$에서

$\tan x=t$로 놓으면

$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때,

$-1\le\tan x\le 1$이므로

$-1\le t\le 1$

$y=\frac{-2t}{t+2}=\frac{-2(t+2)+4}{t+2}$

$=\frac{4}{t+2}-2$

$-1\le t\le 1$에서 함수

$y=\frac{4}{t+2}-2$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

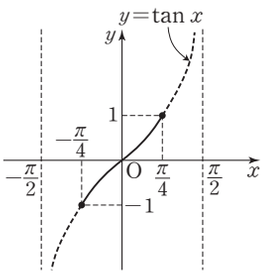
$t=-1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

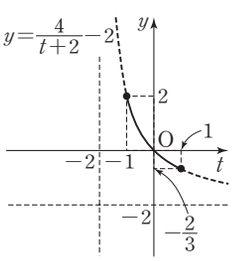
즉, $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때,

$\tan x=-1$에서 $x=-\frac{\pi}{4}$이므로

$a=-\frac{\pi}{4}$, $b=2$

$\therefore ab=-\frac{\pi}{4}\times 2=-\frac{\pi}{2}$

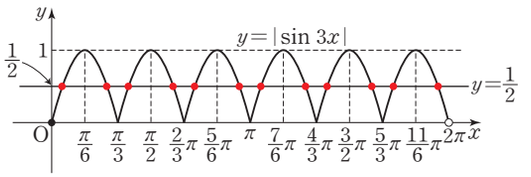




17 방정식 $|\sin 3x|=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|\sin 3x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같다.

이때 함수 $y=|\sin 3x|$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

함수 $y=|\sin 3x|$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



즉, $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\sin 3x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 12이다.

따라서 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $|\sin 3x|=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 12이다.

참고 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수
➡ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

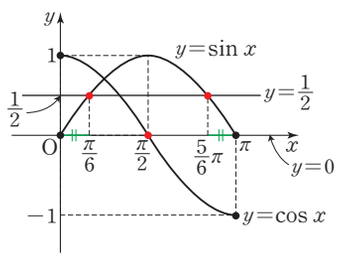
18 $(\sin x+\cos x)^2=\cos x+1$에서

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\cos x+1$

$1+2\sin x\cos x=\cos x+1$

$2\sin x\cos x=\cos x$, $\cos x(2\sin x-1)=0$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$



(i) $\cos x=0$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

19 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=\pi$

또, 함수 $y=\sin x$의 주기는 2π이므로

$\gamma=2\pi+\alpha$

$\therefore \sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\pi+\gamma)=\sin(3\pi+\alpha)$

$=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$

Lecture

삼각함수의 그래프의 대칭성

함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 합은 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 바로 구할 수 있다.

(1) $0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\pi$ (단, $\alpha\ne\beta$)

(2) $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$

$\therefore \alpha+\beta=2\pi$ (단, $\alpha\ne\beta$)

(3) 함수 $f(x)=\tan x$에서 주기가 π이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 $\alpha-\beta=n\pi$ (단, n은 정수)

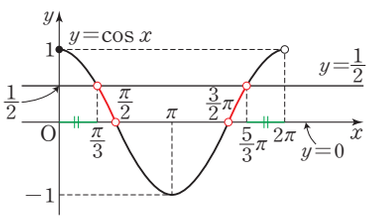
20 진수의 조건에 의하여

$\cos x>0$ ……㉠

$\log_2(\cos x)<-1$에서 $\log_2(\cos x)<\log_2\frac{1}{2}$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\cos x<\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0<\cos x<\frac{1}{2}$



함수 $y=\cos x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=\frac{1}{2}$은 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}\pi$, $\delta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha-\beta+\gamma-\delta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi-\frac{5}{3}\pi=-\frac{\pi}{3}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

서술형

21 주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{3}{8}\pi-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore |b|=4$

이때 $b>0$이므로 $b=4$ … ❶

또, $a>0$이고 최댓값이 2, 최솟값이 -4이므로

$a+d=2$, $-a+d=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=-1$ … ❷

즉, 함수 $y=3\cos(4x-c)-1$의 그래프가

점 $\left(-\frac{\pi}{8}, 2\right)$를 지나므로 $2=3\cos\left(-\frac{\pi}{2}-c\right)-1$

$3\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}+c\right)\right\}=3$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+c\right)=1$

$\therefore \sin c=-1$

이때 $0<c<2\pi$이므로 $c=\frac{3}{2}\pi$ … ❸

$\therefore abcd=3\times4\times\frac{3}{2}\pi\times(-1)=-18\pi$ … ❹

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $abcd$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 $y=a|\sin 5x-4|+b$에서 $\sin 5x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 $y=a|t-4|+b$

$t\ge 4$일 때, $y=a(t-4)+b=at-4a+b$

$t<4$일 때, $y=-a(t-4)+b=-at+4a+b$ … ❶

$-1\le t\le 1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $5a+b$,

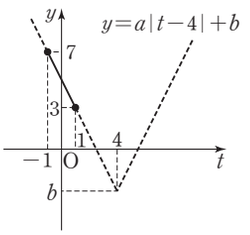
$t=1$일 때 최솟값은 $3a+b$이다.

즉, $5a+b=7$, $3a+b=3$이므로

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$ … ❷

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$ … ❸



채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 식을 절댓값 기호를 없애고 정리할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $-1\le\sin 5x\le 1$이므로 $-5\le\sin 5x-4\le-3$

즉, $\sin 5x-4<0$이므로

$y=a|\sin 5x-4|+b=-a(\sin 5x-4)+b$

$=-a\sin 5x+4a+b$

이때 $a>0$이므로 주어진 함수의

최댓값은 $a+4a+b=5a+b$, 최솟값은 $-a+4a+b=3a+b$

따라서 $5a+b=7$, $3a+b=3$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$ $\therefore a+b=2+(-3)=-1$

23 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$이므로 $2\sin^2 A+5\cos A+1=0$에서

$2(1-\cos^2 A)+5\cos A+1=0$

$2\cos^2 A-5\cos A-3=0$

$(2\cos A+1)(\cos A-3)=0$

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos A=3$

이때 $0<A<\pi$이므로 $-1<\cos A<1$

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{2}{3}\pi$ … ❶

따라서 $A+B+C=\pi$이므로

$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$ … ❷

$\therefore \tan\frac{B+C}{2}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\frac{B+C}{2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\tan\frac{B+C}{2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

Lecture

여러 가지 각의 삼각함수 – 도형에의 활용

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$

(1) $A+B=\pi-C$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

(2) $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$이므로

$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

24 모든 실수 x에 대하여 부등식 $6x^2+4x\cos\theta+\sin\theta\ge0$이 성립하려면 이차방정식 $6x^2+4x\cos\theta+\sin\theta=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta)^2-6\sin\theta\le0$

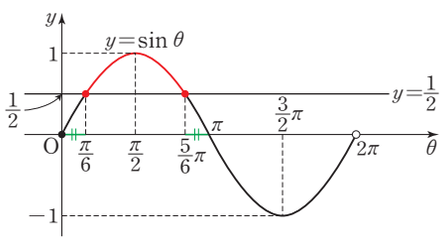
$\therefore 4\cos^2\theta-6\sin\theta\le0$ … ❶

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 $4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta\le0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2\ge0$, $(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)\ge0$

이때 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1\ge0$ $\therefore \sin\theta\ge\frac{1}{2}$



함수 $y=\sin\theta\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$ … ❷

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

7 사인법칙과 코사인법칙

1 사인법칙

개념 드릴 181쪽

1 (1) $\sqrt{3}$ (2) 1 (3) 30°

2 (1) $4\sqrt{3}$ (2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (3) 30° (4) 90°

3 (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) $20\sqrt{3}$ (4) 45° 또는 135°

4 (1) $2:4:5$ (2) $3:4:5$ (3) $1:\sqrt{3}:2$ (4) $1:1:\sqrt{2}$

1 사인법칙에 의하여

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{x}{\sin 60^\circ}$에서

$x\sin 45^\circ=\sqrt{2}\sin 60^\circ$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x=\sqrt{3}$

(2) $\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$에서

$x\sin 120^\circ=\sqrt{3}\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}x=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

$\therefore x=1$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$에서

$3\sin x=\sqrt{3}\sin 60^\circ$, $3\sin x=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=30^\circ$ ($\because 0^\circ<x<120^\circ$)

2 사인법칙에 의하여

(1) $\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}$에서 $a\sin 30^\circ=4\sin 60^\circ$

$\frac{1}{2}a=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore a=4\sqrt{3}$

(2) $\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$에서 $c\sin 45^\circ=5\sin 30^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}c=5\times\frac{1}{2}$ $\therefore c=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{5}{\sin B}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$에서 $\sqrt{2}\sin B=\sin 135^\circ$

$\sqrt{2}\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B=\frac{1}{2}$

$\therefore B=30^\circ$ ($\because 0^\circ<B<45^\circ$)

(4) $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{8}{\sin C}$에서 $\sqrt{3}\sin C=2\sin 60^\circ$

$\sqrt{3}\sin C=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C=1$

$\therefore C=90^\circ$ ($\because 0^\circ<C<120^\circ$)

3 사인법칙에 의하여

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$에서 $R=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로 $A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

$\frac{3}{\sin 60^\circ}=2R$에서 $R=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

(3) $\frac{c}{\sin 120^\circ}=2\times 20$에서 $c=40\sin 120^\circ$

$\therefore c=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$

(4) $\frac{6\sqrt{2}}{\sin B}=2\times 6$에서 $\sin B=\frac{6\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

4 (1) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:4:5$

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

(3) $A+B+C=180^\circ$이므로 $C=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ:\sin 90^\circ$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$

(4) $A+B+C=180^\circ$이므로 $B=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 45^\circ:\sin 45^\circ:\sin 90^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:1=1:1:\sqrt{2}$

필수 예제 01 사인법칙 182쪽

01-1 답 2

| 전략 | 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 b의 값을 구한다.

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$이므로

$b\sin 60^\circ=\sqrt{6}\sin 45^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore b=2$

01-2 답 16π

| 전략 | 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R$이므로 $R=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times 4^2=16\pi$

필수 예제 02 사인법칙의 변형 183쪽

02-1 답 5 : 6 : 10

|전략| 사인법칙의 변형에 의하여 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 이용한다.

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:3:6$

이때 $a=5k$, $b=3k$, $c=6k$ $(k>0)$라 하면

$ab:bc:ca=15k^2:18k^2:30k^2$

$=5:6:10$

02-2 답 $\sqrt{2}$

|전략| 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 세 내각의 크기를 구한다.

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ\times\frac{2}{12}=30^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$

사인법칙에 의하여

$a:b=\sin A:\sin B=\sin 30^\circ:\sin 45^\circ=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1:\sqrt{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{2}$

02-3 답 2

|전략| 사인법칙의 변형에 의하여 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 이용한다.

$\frac{a}{4}=\frac{b}{7}=\frac{c}{10}$에서 $a:b:c=4:7:10$

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:7:10$

이때 $\sin A=4k$, $\sin B=7k$, $\sin C=10k$ $(k>0)$라 하면

$$\frac{\sin A+\sin C}{\sin(A+C)}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{4k+10k}{7k}=\frac{14k}{7k}=2$$

$A+B+C=180^\circ$이므로 $A+C=180^\circ-B$

필수 예제 03 삼각형의 모양 결정(1) 184쪽

03-1 답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

|전략| 사인법칙의 변형을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 $\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B$에서

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2$ $\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

참고 삼각형 ABC에서

(1) $a=b=c$ ➡ 삼각형 ABC는 정삼각형

(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 삼각형 ABC는 이등변삼각형

(3) 가장 긴 변의 길이가 c일 때

① $a^2+b^2>c^2$ ➡ 삼각형 ABC는 $C<90^\circ$인 예각삼각형

② $a^2+b^2=c^2$ ➡ 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형

③ $a^2+b^2<c^2$ ➡ 삼각형 ABC는 $C>90^\circ$인 둔각삼각형

03-2 답 $a=c$인 이등변삼각형

|전략| 사인법칙의 변형을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A+B=180^\circ-C$, $B+C=180^\circ-A$

$c\sin(A+B)=a\sin(B+C)$에서

$c\sin(180^\circ-C)=a\sin(180^\circ-A)$

$\therefore c\sin C=a\sin A$ ……㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin C=\frac{c}{2R}$, $\sin A=\frac{a}{2R}$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$c\times\frac{c}{2R}=a\times\frac{a}{2R}$, $a^2=c^2$

$\therefore a=c$ $(\because a>0, c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

03-3 답 $C=90^\circ$인 직각삼각형

|전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$과 사인법칙의 변형을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

$\cos^2 A=1-\sin^2 A$, $\cos^2 B=1-\sin^2 B$, $\cos^2 C=1-\sin^2 C$이므로 $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 C+1$에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=(1-\sin^2 C)+1$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ……㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

필수 예제 04 사인법칙의 실생활에의 활용 185쪽

04-1 답 24 cm

|전략| 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 $\angle BCA=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin 30^\circ}=2R$이므로

$2R=\frac{12}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24\,(\text{cm})$

따라서 접시의 지름의 길이는 24 cm이다.

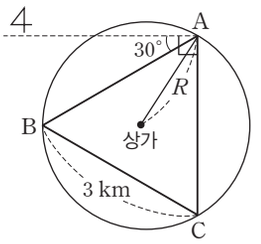
04-2 답 $\sqrt{3}$ km

|전략| 세 점으로부터 같은 거리에 있는 점은 세 점을 지나는 삼각형의 외접원의 중심임을 이용한다.

상가에서 A, B, C 세 아파트 단지에 이르는 거리가 같으므로 상가의 위치는 세 점 A, B, C를 지나는 삼각형의 외접원의 중심이다.
즉, 상가와 A 단지 사이의 거리는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 같다.
이때 삼각형 ABC에서
$A=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로
외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$\therefore R=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}\ (\text{km})$$



따라서 상가와 A 단지 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ km이다.

2 코사인법칙

개념 드릴 187쪽

1 (1) 5 (2) $\sqrt{21}$ (3) 6 (4) $\sqrt{2}$ (5) $2\sqrt{14}$ (6) $\sqrt{13}$

2 (1) $\frac{13}{14}$ (2) $\frac{11}{12}$ (3) $\frac{29}{36}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (5) $\frac{2}{3}$ (6) 0

1 코사인법칙에 의하여

(1) $a^2=4^2+7^2-2\times4\times7\times\frac{5}{7}=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$

(2) $a^2=3^2+(4\sqrt{3})^2-2\times3\times4\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=9+48-2\times3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21$

$\therefore a=\sqrt{21}\ (\because a>0)$

(3) $b^2=8^2+7^2-2\times8\times7\times\frac{11}{16}=36$

$\therefore b=6\ (\because b>0)$

(4) $b^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times2\times\cos45^\circ$

$=2+4-2\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$\therefore b=\sqrt{2}\ (\because b>0)$

(5) $c^2=8^2+6^2-2\times8\times6\times\frac{11}{24}=56$

$\therefore c=2\sqrt{14}\ (\because c>0)$

(6) $c^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos60^\circ$

$=9+16-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$

$\therefore c=\sqrt{13}\ (\because c>0)$

2 코사인법칙에 의하여

(1) $\cos A=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$

(2) $\cos A=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{3})^2}{2\times4\times3}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$

(3) $\cos B=\frac{6^2+3^2-4^2}{2\times6\times3}=\frac{29}{36}$

(4) $\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos C=\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

(6) $\cos C=\frac{(\sqrt{7})^2+3^2-4^2}{2\times\sqrt{7}\times3}=0$

필수 예제 01 코사인법칙 188쪽

01-1 답 90°

|전략| 코사인법칙을 이용하여 c의 값부터 먼저 구한다.

코사인법칙에 의하여
$(\sqrt{3})^2=c^2+1^2-2\times c\times1\times\cos60^\circ$

$3=c^2+1-2\times c\times1\times\frac{1}{2}$

위 식을 정리하면 $c^2-c-2=0$
$(c+1)(c-2)=0$ $\therefore c=2\ (\because c>0)$

또, 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{2}{\sin C}$이므로

$\sqrt{3}\sin C=2\sin60^\circ$

$\sqrt{3}\sin C=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C=1$

$\therefore C=90^\circ\ (\because 0^\circ<C<120^\circ)$

다른 풀이 c의 값, 즉 $c=2$임을 구한 후 코사인법칙의 변형을 이용하면

$\cos C=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times1\times\sqrt{3}}=0$ $\therefore C=90^\circ\ (\because 0^\circ<C<120^\circ)$

01-2 답 2

|전략| 선분 AC를 그은 후 삼각형 ABC와 삼각형 ACD에서 코사인법칙을 이용한다.

선분 AC를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos60^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}\ (\because \overline{AC}>0)$

$\overline{AD}=x\ (x>0)$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여
$(\sqrt{7})^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times\cos120^\circ$

$7=1+x^2-2\times1\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

위 식을 정리하면 $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=2\ (\because x>0)$
$\therefore \overline{AD}=2$

필수 예제 02 코사인법칙의 변형 189쪽

02-1 답 135°

|전략| 코사인법칙의 변형을 이용하여 가장 큰 내각의 크기를 구한다.

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 가장 큰 내각은 B이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\times(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=135^\circ$

따라서 가장 큰 내각의 크기는 135°이다.

02-2 답 $\frac{3}{5}$

|전략| $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$인 것과 코사인법칙의 변형을 이용한다.

$35\sin A=28\sqrt{2}\sin B=20\sqrt{2}\sin C=l\ (l>0)$이라 하면

$$\sin A=\frac{l}{35},\ \sin B=\frac{l}{28\sqrt{2}},\ \sin C=\frac{l}{20\sqrt{2}}$$

$$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$
$$=\frac{l}{35}:\frac{l}{28\sqrt{2}}:\frac{l}{20\sqrt{2}}$$
$$=4\sqrt{2}:5:7$$

이때 $a=4\sqrt{2}k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(4\sqrt{2}k)^2}{2\times5k\times7k}=\frac{3}{5}$$

02-3 답 5

|전략| 코사인법칙의 변형을 이용하여 $\cos C$(또는 $\cos B$)의 값을 먼저 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\times6\times5}=\frac{1}{5}$$

또, 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos C$$
$$=4+25-2\times2\times5\times\frac{1}{5}=25$$

$$\therefore \overline{AD}=5\ (\because \overline{AD}>0)$$

필수 예제 03 삼각형의 모양 결정(2) 190쪽

03-1 답 $C=90^\circ$인 직각삼각형

|전략| 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

코사인법칙에 의하여 $a+b\cos C=c\cos B$에서

$$a+b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$2a^2+a^2+b^2-c^2=c^2+a^2-b^2$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

03-2 답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형

|전략| 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

코사인법칙에 의하여 $a\cos A=b\cos B$에서

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2b^2+c^2a^2-a^4=b^2c^2+a^2b^2-b^4$$

$$c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$$

$$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$$

$$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } c^2=a^2+b^2\ (\because a>0,\ b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

필수 예제 04 코사인법칙의 실생활에의 활용 191쪽

04-1 답 $10\sqrt{19}$ m

|전략| 코사인법칙을 이용하여 두 나무 A, B 사이의 거리를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=30^2+50^2-2\times30\times50\times\cos60^\circ$$
$$=900+2500-2\times30\times50\times\frac{1}{2}$$
$$=1900$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{1900}=10\sqrt{19}\ (\text{m})\ (\because \overline{AB}>0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{19}$ m이다.

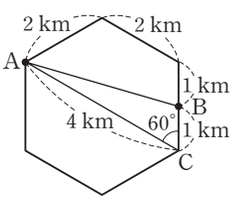
04-2 답 $\sqrt{13}$ km

|전략| 코사인법칙을 이용하여 A 지점에서 도착점까지의 직선거리를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 A 지점에서 출발하여 시계방향으로 호수의 둘레를 따라 5 km를 갔을 때의 위치를 B, 6 km를 갔을 때의 위치를 C라 하면 삼각형 ACB에서

$\overline{AC}=4$ km, $\overline{BC}=1$ km,

$\angle ACB=60^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

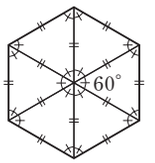


$$\overline{AB}^2=4^2+1^2-2\times4\times1\times\cos60^\circ$$
$$=16+1-2\times4\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=13$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{13}\ (\text{km})\ (\because \overline{AB}>0)$$

따라서 A 지점에서 도착지점까지의 직선거리는 $\sqrt{13}$ km이다.

참고 한 변의 길이가 a인 정육각형에서 오른쪽 그림과 같이 세 대각선을 그으면 정육각형은 한 변의 길이가 a인 6개의 정삼각형으로 나누어진다.



3 삼각형의 넓이

개념 확인 192~194쪽

1 (1) $15\sqrt{2}$ (2) $6\sqrt{3}$
2 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $12\sqrt{3}$

1 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

(1) $S=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times6\times4\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

2 (1) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 이 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=2\times5\times\sin60^\circ=2\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

(2) 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

개념 드릴

195쪽

1 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{11}$ (4) $15\sqrt{3}$ (5) $9\sqrt{2}$
2 (1) $24\sqrt{3}$ (2) $14\sqrt{6}$ (3) 40
3 (1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (2) 18 (3) $25\sqrt{2}$

1 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

(1) $S=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times5\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

(3) $S=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{11}\times\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{11}\times\frac{1}{2}=\sqrt{11}$

(4) $S=\frac{1}{2}\times10\times6\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times10\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

(5) $S=\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin135^\circ=\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$

2 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

(1) $S=6\times8\times\sin120^\circ=6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

(2) $B=D=60^\circ$이므로

$S=7\times4\sqrt{2}\times\sin60^\circ=7\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{6}$

(3) $B=180^\circ-A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$이므로

$S=10\times8\times\sin30^\circ=10\times8\times\frac{1}{2}=40$

다른 풀이 $\overline{AD}=\overline{BC}=8$이므로

$S=10\times8\times\sin150^\circ=10\times8\times\frac{1}{2}=40$

3 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

(1) $S=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times9\times8\times\sin150^\circ=\frac{1}{2}\times9\times8\times\frac{1}{2}=18$

(3) 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}=10$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times10\times10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}$

필수 예제 01 삼각형의 넓이

196쪽

01-1 답 $3\sqrt{10}$

|전략| 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 코사인법칙을 이용한다.

삼각형 ABC의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\times12\times b\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times12\times b\times\frac{\sqrt{2}}{2}=18$ $\therefore b=3\sqrt{2}$

따라서 코사인법칙에 의하여

$c^2=12^2+(3\sqrt{2})^2-2\times12\times3\sqrt{2}\times\cos45^\circ$

$=144+18-2\times12\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=90$

$\therefore c=3\sqrt{10}$ ($\because c>0$)

01-2 답 $4\sqrt{3}$

|전략| 사인법칙을 이용하여 a, b의 길이를 구하고 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$를 이용한다.

$A=30^\circ$, $B=120^\circ$라 하면 $C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

$\frac{a}{\sin30^\circ}=2\times4$에서 $a=2\times4\times\frac{1}{2}=4$

$\frac{b}{\sin120^\circ}=2\times4$에서 $b=2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}\times\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

다른 풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$S=2R^2\sin A\sin B\sin C=2\times4^2\times\sin30^\circ\times\sin120^\circ\times\sin30^\circ$

$=2\times16\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

01-3 답 $6\sqrt{11}$

|전략| 먼저 코사인법칙의 변형을 이용하여 한 각의 코사인 값을 구한다.

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{5^2+8^2-9^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{10}$

그런데 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $\sin C>0$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{10}$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{3\sqrt{11}}{10}=6\sqrt{11}$

다른 풀이 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{5+8+9}{2}=11$이므로

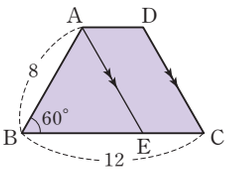
$S=\sqrt{11\times(11-5)\times(11-8)\times(11-9)}=6\sqrt{11}$

필수 예제 02 사각형의 넓이 197쪽

02-1 답 $32\sqrt{3}$

|전략| 등변사다리꼴의 두 밑각의 크기가 같음을 이용하여 사각형 ABCD의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 변 CD에 평행한 직선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ABE는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이다.



이때 $\overline{EC}=4$, $\angle C=60^\circ$이므로

등변사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\triangle ABE+$(평행사변형 AECD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times \sin 60^\circ+8\times 4\times \sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times \frac{\sqrt{3}}{2}+8\times 4\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=16\sqrt{3}+16\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

다른 풀이 점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

삼각형 ABH에서 $\overline{AH}=8\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$, $\overline{BH}=8\cos 60^\circ=4$

이때 $\overline{HH'}=4$이므로 등변사다리꼴 ABCD의 넓이는

$2\triangle ABH+$(사각형 AHH′D)

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}\right)+4\times 4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

02-2 답 $\frac{3}{13}$

|전략| 삼각형의 넓이를 이용하여 $\sin\theta$의 값을 구하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\tan^2\theta$의 값을 구한다.

사각형 ABCD의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{3}\times \sin\theta=3 \quad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{13}{16}$이므로

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{13}{16}}=\frac{3}{13}$

02-3 답 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

|전략| 원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합은 180°임을 이용한다.

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$B=180^\circ-D=60^\circ$

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 3\times 2\times \sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

개념 정리 198~199쪽

01 a, $\sin C$ **02** $2R$, c, $\sin B$, $\sin C$

03 45, 45, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $6\sqrt{2}$ **04** c, b, $\cos C$ **05** $\cos A$, ca, a

06 2, $\sqrt{7}$, $\frac{1}{2}$, 60 **07** 2, b **08** 4, R^2

09 a, 2 **10** $ab\sin\theta$ **11** $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

12 (1) 6, 6, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $12\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, $7\sqrt{3}$ (3) 10, 10, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{45\sqrt{2}}{2}$

03 삼각형 ABC에서

$C=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=$ 45 $^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin \boxed{45}^\circ}$이므로

$c\sin 60^\circ=6\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\times\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore c=\boxed{6\sqrt{2}}$

06 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{3^2+\boxed{2}^2-(\boxed{\sqrt{7}})^2}{2\times 3\times 2}$

$=\boxed{\frac{1}{2}}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=\boxed{60}^\circ$

12 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\boxed{6}\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\boxed{6}\times\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{12\sqrt{3}}$

(2) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다.

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$=\boxed{2\sqrt{3}}\times 7\times\sin 30^\circ$

$=\boxed{2\sqrt{3}}\times 7\times\boxed{\frac{1}{2}}=\boxed{7\sqrt{3}}$

(3) 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 9\times\boxed{10}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 9\times\boxed{10}\times\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{45\sqrt{2}}{2}}$

중단원 마무리

200~202쪽

01 ②	**02** ⑤	**03** ③	**04** ①
05 $\frac{3}{5}$	**06** ④	**07** ②	**08** $24\sqrt{5}$
09 ⑤	**10** ③	**11** ②	**12** ①
13 $4\sqrt{10}$	**14** $\frac{\sqrt{2}}{10}$	**15** ③	**16** 120 m
17 4π	**18** ④	**19** $3\sqrt{7}$	**20** 9
21 6	**22** $2\sqrt{13}$	**23** $3\sqrt{10}$	**24** $4\sqrt{2}$

LEVEL 1

01 사인법칙에 의하여 $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{3}{\sin C}$이므로

$\sqrt{3}\sin C=\sin 120^\circ$, $\sqrt{3}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=30^\circ$ ($\because 0^\circ<C<60^\circ$)

따라서 $A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$이므로 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

$\therefore a=3$

다른 풀이 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\cos 120^\circ$

$27=9+a^2-2\times3\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$, $a^2+3a-18=0$

$(a+6)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

02 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{8}{5}$

이때 $R=5$이므로

$a+b+c=\frac{8}{5}\times2\times5=16$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 16이다.

03 삼각형 ABC에서

$A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{30}{\sin 60^\circ}$이므로

$\overline{AB}\sin 60^\circ=30\sin 45^\circ$, $\overline{AB}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=10\sqrt{6}$ (m)

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다.

04 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180^\circ$

$\therefore \cos B=\cos(180^\circ-D)=-\cos D=-\frac{1}{4}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos B$

$=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$

$\therefore \overline{AC}=8$ ($\because \overline{AC}>0$)

05 직각삼각형 ABE에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AE}=3$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

마찬가지로 직각삼각형 BCF에서 $\overline{BF}=3\sqrt{5}$

또, 직각삼각형 DEF에서 $\overline{DE}=\overline{DF}=3$이므로

$\overline{EF}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

즉, 삼각형 BFE에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

따라서 $0^\circ<\theta<90^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

06 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$에서

$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{b}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

$a^2=b^2$ $\therefore a=b$ ($\because a>0, b>0$)

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

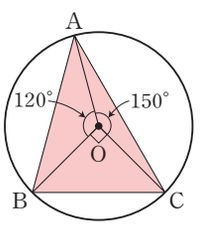
07 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=4:3:5$에서

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{4}{12}=120^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\frac{3}{12}=90^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\frac{5}{12}=150^\circ$



따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 90^\circ$

$+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{1}{2}$

$=3+\sqrt{3}$

08 $\overline{CD}=\overline{AB}=7$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{8^2+7^2-9^2}{2\times8\times7}=\frac{2}{7}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

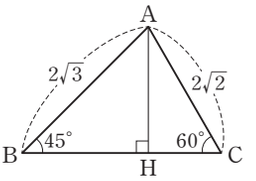
$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$8\times7\times\sin C=8\times7\times\frac{3\sqrt{5}}{7}=24\sqrt{5}$

LEVEL 2

09 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABH에서



$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 45^\circ$

$=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

또, 삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\cos 60^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 $\angle BAC=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

$2\sqrt{3}\sin 75^\circ=(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 75^\circ=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

다른 풀이 위의 그림에서 $\angle BAH=45^\circ$, $\angle CAH=30^\circ$

또, 삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 45^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

$\therefore \triangle ABC=\triangle ABH+\triangle ACH$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{2}$

$=3+\sqrt{3}$

따라서 $\angle BAC=45^\circ+30^\circ=75^\circ$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $3+\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}\times\sin 75^\circ=3+\sqrt{3}$

$\therefore \sin 75^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

10 $\angle BCD=90^\circ$이므로 선분 BD는 원의 지름이다.

직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{5}$

즉, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

따라서 $\angle BCA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=2\times\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{5}\times\sin 30^\circ=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$

다른 풀이 $\angle BCD=90^\circ$, $\angle ACD=60^\circ$이므로

$\angle BCA=\angle BCD-\angle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle CDB=\angle CBD=45^\circ$

한편, 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle CAB=\angle CDB=45^\circ$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

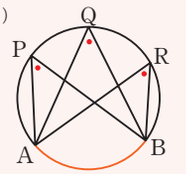
$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{10}}{\sin 45^\circ}$, $\overline{AB}\sin 45^\circ=\sqrt{10}\times\sin 30^\circ$

$\overline{AB}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}\times\frac{1}{2}$ $\therefore \overline{AB}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$

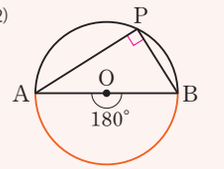
Lecture

원주각의 성질

(1)



(2)



(1) 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

➡ $\angle APB=\angle AQB=\angle ARB$

(2) 반원의 호에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

➡ 선분 AB가 원의 지름이면 $\angle APB=90^\circ$

11 $a-2b+2c=0$ ……㉠

$2a+b-2c=0$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$3a-b=0$ $\therefore b=3a$

$b=3a$를 ㉠에 대입하면

$a-6a+2c=0$ $\therefore c=\frac{5}{2}a$

따라서 $a:b:c=a:3a:\frac{5}{2}a=2:6:5$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=2:6:5$

12 $A+B+C=180^\circ$에서 $A+B=180^\circ-C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이고, $a+b+c=9$이므로 사인법칙에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin(A+B)$

$=\sin A+\sin B+\sin(180^\circ-C)$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

$=\frac{a}{2\times 3}+\frac{b}{2\times 3}+\frac{c}{2\times 3}=\frac{a+b+c}{6}$

$=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

13 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$

삼각형 DCG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DG}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\cos\theta$

$=4+9-2\times 2\times 3\times\frac{1}{4}=10$

$\therefore \overline{DG}=\sqrt{10}$ ($\because \overline{DG}>0$)

또, $\angle BCE=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\pi-\theta$이므로

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\pi-\theta)$

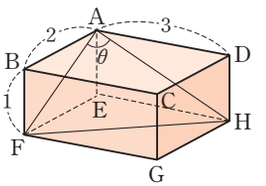
$=4+9-2\times2\times3\times(-\cos\theta)$

$=4+9+2\times2\times3\times\frac{1}{4}=16$

$\therefore \overline{BE}=4\ (\because \overline{BE}>0)$

$\therefore \overline{DG}\times\overline{BE}=\sqrt{10}\times4=4\sqrt{10}$

14 오른쪽 그림과 같이 선분 FH를 그으면 직각삼각형 ABF에서



$\overline{AF}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 ADH에서

$\overline{AH}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

직각삼각형 FGH에서

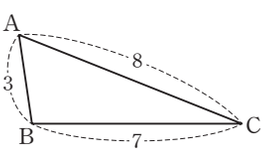
$\overline{FH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

따라서 삼각형 AFH에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}}$

$=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

15 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\cos B=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$

$0^\circ<B<180^\circ$에서 $\sin B>0$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{8}{\sin B}=2R \quad \therefore R=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$

다른 풀이 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{3+7+8}{2}=9$이므로 주어진 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{9\times(9-3)\times(9-7)\times(9-8)}=6\sqrt{3}$

이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{3\times7\times8}{4R}=6\sqrt{3}$이므로

$R=\frac{3\times7\times8}{4}\times\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$

16 $\overline{CD}=x$ m $(x>0)$라 하면 직각삼각형 ACD에서

$\overline{AC}=\frac{x}{\tan30^\circ}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$ (m)

또, 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BC}=\frac{x}{\tan45^\circ}=x$ (m)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$120^2=(\sqrt{3}x)^2+x^2-2\times\sqrt{3}x\times x\times\cos30^\circ$

$14400=3x^2+x^2-2\times\sqrt{3}x\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2=14400 \quad \therefore x=120\ (\because x>0)$

따라서 지면에서 산꼭대기까지의 높이는 120 m이다.

17 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 ($\overline{OA}=\overline{OB}=r$)

$\overline{OP}:\overline{PA}=3:1$에서 $\overline{OP}=\frac{3}{4}r$

$\overline{OQ}:\overline{QB}=1:2$에서 $\overline{OQ}=\frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $9\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\frac{\pi}{3}=9\sqrt{3}$

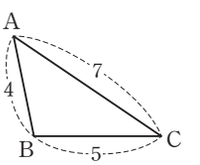
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3},\ r^2=144$

$\therefore r=12\ (\because r>0)$

따라서 호 AB의 길이는

$12\times\frac{\pi}{3}=4\pi$

18 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\cos B=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\frac{1}{5}$

$0^\circ<B<180^\circ$에서 $\sin B>0$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{7}{\sin B}=2R \quad \therefore R=\frac{1}{2}\times\frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$

한편, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin B=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$

즉, $\frac{1}{2}r(4+5+7)=4\sqrt{6}$이므로

$8r=4\sqrt{6} \quad \therefore r=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore R-r=\frac{35\sqrt{6}}{24}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{23\sqrt{6}}{24}$

다른 풀이 헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{4+5+7}{2}=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{8\times(8-4)\times(8-5)\times(8-7)}=4\sqrt{6}$

이때 $\frac{4\times5\times7}{4R}=4\sqrt{6}$이므로

$R=\frac{4\times5\times7}{4}\times\frac{1}{4\sqrt{6}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$

또, $\frac{1}{2}r(4+5+7)=4\sqrt{6}$이므로

$8r=4\sqrt{6}$ $\therefore r=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore R-r=\frac{35\sqrt{6}}{24}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{23\sqrt{6}}{24}$

Lecture

삼각형의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 넓이 S는

(1) 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

(2) 세 변의 길이가 주어질 때

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

(3) 외접원의 반지름의 길이 R가 주어질 때

$S=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(4) 내접원의 반지름의 길이 r가 주어질 때

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

19 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ (사각형 ABCD의 넓이)

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

$=3\sqrt{7}$

20 $a+b=12$에서 $b=12-a$

이때 $a>0$, $b=12-a>0$이므로 $0<a<12$

사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin30^\circ=\frac{1}{2}a(12-a)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}a(12-a)$

$=-\frac{1}{4}a^2+3a$

$=-\frac{1}{4}(a-6)^2+9$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $a=b=6$일 때, 9이다.

다른 풀이 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $a+b=12$이므로

$12\geq2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}\leq6$ $\therefore ab\leq36$ ……㉠

사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin30^\circ=\frac{1}{2}ab\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}ab$

이므로 ㉠에 의하여

$\frac{1}{4}ab\leq\frac{1}{4}\times36=9$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 9이다.

서술형

21 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:6=4:3$

즉, $\overline{BC}=7$이므로

$\overline{BD}=4$, $\overline{CD}=3$ … ❶

이때 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{8^2+7^2-6^2}{2\times8\times7}=\frac{11}{16}$ … ❷

또, 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\cos B$

$=64+16-2\times8\times4\times\frac{11}{16}=36$

$\therefore \overline{AD}=6$ ($\because \overline{AD}>0$) … ❸

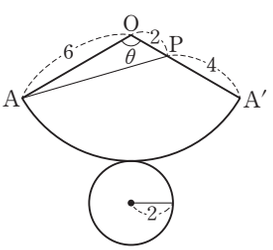
채점 기준	비율
❶ 두 선분 BD, CD의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\cos B$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 선분 AD의 길이를 구할 수 있다.	40 %

22 점 P는 모선 OA를 삼등분하는 점 중 점 O에 가까운 점이므로

$\overline{OP}=\frac{1}{3}\overline{OA}=\frac{1}{3}\overline{OA'}$

$=\frac{1}{3}\times6=2$

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴 OAA′의 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴 OAA′에서 호의 길이 AA′은 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$6\times\theta=2\pi\times2$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ … ❶

구하는 최단 거리는 선분 AP의 길이와 같고, 이때 삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=36+4-2\times6\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=52$

$\therefore \overline{AP}=2\sqrt{13}$ ($\because \overline{AP}>0$)

따라서 구하는 최단 거리는 $2\sqrt{13}$이다. … ❷

채점 기준	비율
❶ 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 전개도에서 최단 거리를 구할 수 있다.	50 %

23 삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이는 부채꼴 AOB의 반지름의 길이와 같으므로 6이다.

즉, $\angle APB=\theta$라 하면 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{3\sqrt{15}}{\sin\theta}=2\times6 \quad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ … ❶

이때 $90^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=-\frac{1}{4}$ … ❷

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로 $\overline{AP}=k$, $\overline{BP}=2k$ $(k>0)$라 하면 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{15})^2=(2k)^2+k^2-2\times2k\times k\times\cos\theta$

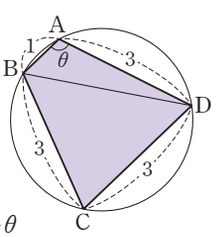
$135=4k^2+k^2-2\times2k\times k\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$k^2=\frac{45}{2} \quad \therefore k=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ $(\because k>0)$ … ❸

$\therefore \overline{BP}=2k=2\times\frac{3\sqrt{10}}{2}=3\sqrt{10}$ … ❹

채점 기준	비율
❶ $\angle APB=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AP}=k$라 할 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 선분 BP의 길이를 구할 수 있다.	20 %

24 오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 긋고 $\angle BAD=\theta$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BD}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos\theta$

$=10-6\cos\theta$ ……㉠

또, $\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-\theta$

이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(180^\circ-\theta)$

$=9+9-2\times3\times3\times(-\cos\theta)$

$=18+18\cos\theta$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $10-6\cos\theta=18+18\cos\theta$이므로

$24\cos\theta=-8 \quad \therefore \cos\theta=-\frac{1}{3}$ … ❶

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ … ❷

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin(180^\circ-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $\angle BAD=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 사각형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

8 등차수열과 등비수열

1 등차수열

개념 확인 204~206쪽

1 제3항: 3, 제7항: 23

2 (1) 3, 5, 7, 9 (2) 2, 4, 8, 16

3 (1) $a_n=(-1)^n$ (2) $a_n=n^3$
(3) $a_n=\frac{n}{n+1}$ (4) $a_n=(n+1)(n+2)$

4 (1) $a_n=3n-5$ (2) $a_n=-5n+13$
(3) $a_n=-6n+19$ (4) $a_n=4n-26$

5 (1) -3 (2) 2

6 (1) $x=4$, $y=-2$ (2) $x=1$, $y=\frac{11}{5}$

2 (1) $a_n=2n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=2\times1+1=3$, $a_2=2\times2+1=5$,

$a_3=2\times3+1=7$, $a_4=2\times4+1=9$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

3, 5, 7, 9

(2) $a_n=2^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=2^1=2$, $a_2=2^2=4$,

$a_3=2^3=8$, $a_4=2^4=16$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

2, 4, 8, 16

3 (1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$의 규칙을 찾아보면

$a_1=-1=(-1)^1$, $a_2=1=(-1)^2$, $a_3=-1=(-1)^3$,

$a_4=1=(-1)^4$, …

따라서 일반항 a_n은 $a_n=(-1)^n$

(2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$의 규칙을 찾아보면

$a_1=1=1^3$, $a_2=8=2^3$, $a_3=27=3^3$,

$a_4=64=4^3$, …

따라서 일반항 a_n은 $a_n=n^3$

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$의 규칙을 찾아보면

$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, $a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$, $a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$,

$a_4=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$, …

따라서 일반항 a_n은 $a_n=\frac{n}{n+1}$

(4) $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$의 규칙을 찾아보면

$a_1=2\times3=(1+1)\times(1+2)$,

$a_2=3\times4=(2+1)\times(2+2)$,

$a_3=4\times5=(3+1)\times(3+2)$,

$a_4=5\times6=(4+1)\times(4+2)$, …

따라서 일반항 a_n은 $a_n=(n+1)(n+2)$

4 (1) $a_n=-2+(n-1)\times 3=3n-5$

(2) $a_n=8+(n-1)\times(-5)=-5n+13$

(3) 첫째항이 13, 공차가 $7-13=-6$이므로

$a_n=13+(n-1)\times(-6)=-6n+19$

(4) 첫째항이 -22, 공차가 $-18-(-22)=4$이므로

$a_n=-22+(n-1)\times 4=4n-26$

5 (1) x는 -10과 4의 등차중항이므로

$x=\dfrac{-10+4}{2}=-3$

(2) $2x$는 x와 6의 등차중항이므로

$2x=\dfrac{x+6}{2}$, $3x=6$ $\therefore x=2$

6 (1) x는 7과 1의 등차중항이므로 $x=\dfrac{7+1}{2}=4$

y는 1과 -5의 등차중항이므로 $y=\dfrac{1+(-5)}{2}=-2$

(2) x는 $\dfrac{2}{5}$와 $\dfrac{8}{5}$의 등차중항이므로 $x=\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{8}{5}}{2}=1$

y는 $\dfrac{8}{5}$과 $\dfrac{14}{5}$의 등차중항이므로 $y=\dfrac{\frac{8}{5}+\frac{14}{5}}{2}=\dfrac{11}{5}$

개념 드릴

207쪽

1 (1) 4, 9, 14, 19 (2) 3, 9, 19, 33 (3) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{14}$ (4) 1, 2, 5, 12

2 (1) 5, 19 (2) 11, -5 (3) $-\dfrac{2}{3}$, 0 (4) $\dfrac{1}{2}$, 0

3 (1) $a_n=3n-10$ (2) $a_n=-4n+9$ (3) $a_n=-\dfrac{1}{3}n-\dfrac{2}{3}$

4 (1) $a_n=6n-3$ (2) $a_n=2n-5$ (3) $a_n=\dfrac{1}{2}n-\dfrac{11}{2}$

5 (1) $x=-1$, $y=7$ (2) $x=3$, $y=0$

1 (1) $a_n=5n-1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=5\times 1-1=4$

$a_2=5\times 2-1=9$

$a_3=5\times 3-1=14$

$a_4=5\times 4-1=19$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

4, 9, 14, 19

(2) $a_n=2n^2+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=2\times 1^2+1=3$

$a_2=2\times 2^2+1=9$

$a_3=2\times 3^2+1=19$

$a_4=2\times 4^2+1=33$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

3, 9, 19, 33

(3) $a_n=\dfrac{1}{3n+2}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=\dfrac{1}{3\times 1+2}=\dfrac{1}{5}$, $a_2=\dfrac{1}{3\times 2+2}=\dfrac{1}{8}$

$a_3=\dfrac{1}{3\times 3+2}=\dfrac{1}{11}$, $a_4=\dfrac{1}{3\times 4+2}=\dfrac{1}{14}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

$\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{14}$

(4) $a_n=2^n-n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=2^1-1=1$

$a_2=2^2-2=2$

$a_3=2^3-3=5$

$a_4=2^4-4=12$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 나열하면

1, 2, 5, 12

2 (1) $-2-(-9)=7$에서 공차가 7이므로

-9, -2, $\boxed{5}$, 12, $\boxed{19}$, 26, …

(2) $3-7=-4$에서 공차가 -4이므로

15, $\boxed{11}$, 7, 3, -1, $\boxed{-5}$, …

(3) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$에서 공차가 $\dfrac{1}{3}$이므로

-1, $\boxed{-\dfrac{2}{3}}$, $-\dfrac{1}{3}$, $\boxed{0}$, $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$, …

(4) $\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{1}{2}$에서 공차가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

2, $\dfrac{3}{2}$, 1, $\boxed{\dfrac{1}{2}}$, $\boxed{0}$, $-\dfrac{1}{2}$, …

3 (1) $a_n=-7+(n-1)\times 3=3n-10$

(2) $a_n=5+(n-1)\times(-4)=-4n+9$

(3) $a_n=-1+(n-1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}n-\dfrac{2}{3}$

4 (1) 첫째항이 3, 공차가 $9-3=6$이므로

$a_n=3+(n-1)\times 6=6n-3$

(2) 첫째항이 -3, 공차가 $-1-(-3)=2$이므로

$a_n=-3+(n-1)\times 2=2n-5$

(3) 첫째항이 -5, 공차가 $-\dfrac{9}{2}-(-5)=\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=-5+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n-\dfrac{11}{2}$

5 (1) x는 -5와 3의 등차중항이므로 $x=\dfrac{-5+3}{2}=-1$

3은 -1과 y의 등차중항이므로 $3=\dfrac{-1+y}{2}$ $\therefore y=7$

(2) y는 $\dfrac{3}{2}$과 $-\dfrac{3}{2}$의 등차중항이므로 $y=\dfrac{\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}=0$

$\dfrac{3}{2}$은 x와 0의 등차중항이므로 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{x+0}{2}$ $\therefore x=3$

필수 예제 01 항이 주어진 등차수열 208쪽

01-1 답 55

|전략| 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 6이므로
$a_5=34$에서 $6+4d=34$ $\therefore d=7$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 6, 공차는 7이므로
$a_n=6+(n-1)\times7=7n-1$
$\therefore a_8=7\times8-1=55$

01-2 답 22

|전략| 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=-11$에서 $a+d=-11$ ……㉠
$a_{10}=13$에서 $a+9d=13$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-14$, $d=3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -14, 공차는 3이므로
$a_n=-14+(n-1)\times3=3n-17$
$\therefore a_{13}=3\times13-17=22$

01-3 답 제14항

|전략| 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 7이므로
$a_8=35$에서 $7+7d=35$ $\therefore d=4$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 7, 공차는 4이므로
$a_n=7+(n-1)\times4=4n+3$
59를 제n항이라 하면 $59=4n+3$ $\therefore n=14$
따라서 59는 제14항이다.

필수 예제 02 항 사이의 관계가 주어진 등차수열 209쪽

02-1 답 $a_n=3n-4$

|전략| 주어진 조건을 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a, 공차 d에 대한 식으로 나타낸다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4-a_2=6$에서 $(a+3d)-(a+d)=6$
$2d=6$ $\therefore d=3$
$a_4+a_2=10$에서 $(a+3d)+(a+d)=10$
$2a+4d=10$, $2a+12=10$ $\therefore a=-1$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -1, 공차는 3이므로
$a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$

다른 풀이 주어진 조건에서
$a_4-a_2=6$ ……㉠
$a_4+a_2=10$ ……㉡
이라 놓고 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a_2=2$, $a_4=8$
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=a+d=2$, $a_4=a+3d=8$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -1, 공차는 3이므로
$a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$

02-2 답 -16

|전략| 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $n=15$를 대입하여 a_{15}의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2+a_5+a_{12}=4$에서 $(a+d)+(a+4d)+(a+11d)=4$
$\therefore 3a+16d=4$ ……㉠
$a_3+a_9=4$에서 $(a+2d)+(a+8d)=4$
$2a+10d=4$ $\therefore a+5d=2$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 12, 공차는 -2이므로
$a_n=12+(n-1)\times(-2)=-2n+14$
$\therefore a_{15}=-2\times15+14=-16$

02-3 답 38

|전략| 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $n=10$을 대입하여 a_{10}의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d라 하면
$a_3-a_1=8$에서 $(a+2d)-a=8$
$2d=8$ $\therefore d=4$
$a_3a_4=140$에서 $(a+2d)(a+3d)=140$
$(a+8)(a+12)=140$, $a^2+20a+96=140$
$a^2+20a-44=0$, $(a+22)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ $(\because a>0)$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공차는 4이므로
$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$
$\therefore a_{10}=4\times10-2=38$

필수 예제 03 조건을 만족시키는 등차수열 210쪽

03-1 답 제26항

|전략| $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -98, 공차가 4이므로
$a_n=-98+(n-1)\times4=4n-102$
이때 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $4n-102>0$에서
$4n>102$ $\therefore n>\frac{102}{4}=25.5$
따라서 이것을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 26이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제26항이다.

03-2 답 제13항

|전략| 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한 후 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=39$에서 $a+4d=39$ ……㉠

$a_8=24$에서 $a+7d=24$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=59$, $d=-5$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 59, 공차는 -5이므로

$a_n=59+(n-1)\times(-5)=-5n+64$

이때 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-5n+64<0$에서

$5n>64$ $\therefore n>\frac{64}{5}=12.8$

따라서 이것을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 13이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제13항이다.

03-3 답 -33

|전략| 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한 후 $a_n<-30$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1-a_4=9$에서 $a-(a+3d)=9$

$-3d=9$ $\therefore d=-3$

$a_3+a_4=99$에서 $(a+2d)+(a+3d)=99$

$2a+5d=99$, $2a-15=99$

$\therefore a=57$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 57, 공차는 -3이므로

$a_n=57+(n-1)\times(-3)=-3n+60$

이때 처음으로 -30보다 작아지는 항은 $a_n<-30$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-3n+60<-30$에서

$3n>90$ $\therefore n>30$

따라서 이것을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 31이므로 처음으로 -30보다 작아지는 항은 제31항이다.

$\therefore k=31$

$\therefore a_{31}=-3\times31+60=-33$

필수 예제 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열 211쪽

04-1 답 16

|전략| 등차수열의 첫째항이 -4, 제10항이 32임을 이용하여 공차를 구한다.

등차수열 $-4, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_8, 32$의 공차를 d라 하면 첫째항이 -4, 제10항이 32이므로

$-4+9d=32$

$9d=36$ $\therefore d=4$

이때 x_5는 주어진 수열의 제6항이므로

$x_5=-4+(6-1)\times4=16$

04-2 답 17

|전략| 등차수열의 첫째항이 13, 제5항이 49임을 이용하여 공차를 구한다.

등차수열 13, a, b, c, 49의 공차를 d라 하면 첫째항이 13, 제5항이 49이므로

$13+4d=49$

$4d=36$ $\therefore d=9$

따라서

$a=13+9=22$, $b=13+2\times9=31$, $c=13+3\times9=40$

이므로

$3a+b-2c=3\times22+31-2\times40=17$

04-3 답 15

|전략| 첫째항이 7, 공차가 $-\frac{3}{4}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 -5임을 이용하여 n의 값을 구한다.

첫째항이 7, 공차가 $-\frac{3}{4}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 -5이므로

$7+(n+1)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-5$

$-\frac{3}{4}(n+1)=-12$, $n+1=16$

$\therefore n=15$

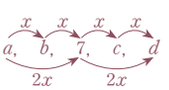
필수 예제 05 등차중항 212쪽

05-1 답 28

|전략| 7은 b와 c의 등차중항일 뿐만 아니라 a와 d의 등차중항임을 이용한다.

7은 b와 c의 등차중항이므로

$7=\frac{b+c}{2}$ $\therefore b+c=14$



또, 7은 a와 d의 등차중항이므로

$7=\frac{a+d}{2}$ $\therefore a+d=14$

$\therefore a+b+c+d=(a+d)+(b+c)=14+14=28$

다른 풀이 등차수열을 이루는 다섯 개의 수를 $7-2x$, $7-x$, 7, $7+x$, $7+2x$로 놓으면

$a+b+c+d=(7-2x)+(7-x)+(7+x)+(7+2x)=28$

05-2 답 $\frac{3}{2}$

|전략| x^2-1은 x와 $2x+7$의 등차중항임을 이용한다.

x^2-1은 x와 $2x+7$의 등차중항이므로

$x^2-1=\frac{x+(2x+7)}{2}$, $2(x^2-1)=3x+7$

$2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

05-3 답 5

|전략| 나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x-1$, x, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f(1)$, $f(0)$, $f(-2)$이다.

나머지정리에 의하여 $f(x)=x^2+ax+5$를 $x-1$, x, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(1)=1+a+5=a+6$

$f(0)=5$

$f(-2)=4-2a+5=-2a+9$

따라서 5가 $a+6$과 $-2a+9$의 등차중항이므로

$$5=\frac{(a+6)+(-2a+9)}{2}$$

$-a+15=10$ $\therefore a=5$

Lecture

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

➡ $R=P(\alpha)$

필수 예제 06 등차수열을 이루는 수 213쪽

06-1 답 24

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 실근의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6$ $\therefore a=2$

삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^3-6\times2^2-4\times2+k=0$ $\therefore k=24$

다른 풀이 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$ ……㉠

$a(a-d)+a(a+d)+(a+d)(a-d)=-4$ ……㉡

㉠에서 $3a=6$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2(2-d)+2(2+d)+(2+d)(2-d)=-4$, $12-d^2=-4$

$d^2=16$ $\therefore d=\pm4$

따라서 세 실근은 -2, 2, 6이고 세 실근의 곱이 $-k$이므로

$-k=-2\times2\times6=-24$ $\therefore k=24$

06-2 답 8

|전략| 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓는다.

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 세 수의 합이 15이므로

$(a-d)+a+(a+d)=15$ ……㉠

세 수의 제곱의 합이 93이므로

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=93$ ……㉡

㉠에서 $3a=15$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=93$, $2d^2+75=93$

$d^2=9$ $\therefore d=\pm3$

따라서 세 수는 2, 5, 8이므로 이 중 가장 큰 수는 8이다.

06-3 답 −8

|전략| 등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓는다.

등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면 네 수의 합이 -8이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=-8$ ……㉠

가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 -32이므로

$(a-3d)(a+3d)=-32$ ……㉡

㉠에서 $4a=-8$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면

$(-2-3d)(-2+3d)=-32$, $4-9d^2=-32$

$d^2=4$ $\therefore d=\pm2$

따라서 네 수는 -8, -4, 0, 4이므로 이 중 가장 작은 수는 -8이다.

2 등차수열의 합

개념 확인 214~215쪽

1 1400

2 435

3 (1) $a_n=4n-2$ (2) $a_1=2$, $a_n=2n-1$ $(n\geq2)$

1 주어진 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20}은

$$S_{20}=\frac{20(5+135)}{2}=1400$$

2 주어진 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$$S_{15}=\frac{15\{2\times8+(15-1)\times3\}}{2}=435$$

3 (1) $a_1=S_1=2\times1^2=2$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-2(n-1)^2$

$=4n-2$ $(n\geq2)$ ……㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

$\therefore a_n=4n-2$

(2) $a_1=S_1=1^2+1=2$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+1-\{(n-1)^2+1\}$

$=2n-1$ $(n\geq2)$ ……㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르다.

$\therefore a_1=2$, $a_n=2n-1$ $(n\geq2)$

개념 드릴 216쪽

1 (1) 590 (2) 572 (3) 50 (4) 992
2 (1) 407 (2) 240 (3) -350 (4) -416
3 (1) 190 (2) -360 (3) -1520 (4) 299 (5) 50
4 (1) $a_n=2n+1$ (2) $a_1=2$, $a_n=6n-3\ (n\geq 2)$

1 (1) $\dfrac{20(1+58)}{2}=590$

(2) $\dfrac{11(4+100)}{2}=572$

(3) $\dfrac{10\{12+(-2)\}}{2}=50$

(4) $\dfrac{32(-1+63)}{2}=992$

2 (1) $\dfrac{11\{2\times 2+(11-1)\times 7\}}{2}=407$

(2) $\dfrac{15\{2\times(-5)+(15-1)\times 3\}}{2}=240$

(3) $\dfrac{14\{2\times 1+(14-1)\times(-4)\}}{2}=-350$

(4) $\dfrac{13\{2\times(-2)+(13-1)\times(-5)\}}{2}=-416$

3 (1) 첫째항이 1, 공차가 $5-1=4$이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\dfrac{10\{2\times 1+(10-1)\times 4\}}{2}=190$

(2) 첫째항이 20, 공차가 $16-20=-4$이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은
$\dfrac{20\{2\times 20+(20-1)\times(-4)\}}{2}=-360$

(3) 첫째항이 1, 공차가 $-1-1=-2$이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제40항까지의 합은
$\dfrac{40\{2\times 1+(40-1)\times(-2)\}}{2}=-1520$

(4) 첫째항이 -7, 공차가 $-2-(-7)=5$이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제13항까지의 합은
$\dfrac{13\{2\times(-7)+(13-1)\times 5\}}{2}=299$

(5) 첫째항이 1, 공차가 $\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은
$\dfrac{15\left\{2\times 1+(15-1)\times\dfrac{1}{3}\right\}}{2}=50$

4 (1) $a_1=S_1=1^2+2\times 1=3$
$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$
$=2n+1\ (n\geq 2)$ ····· ㉠
이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.
$\therefore\ a_n=2n+1$

(2) $a_1=S_1=3\times 1^2-1=2$
$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-1-\{3(n-1)^2-1\}$
$=6n-3\ (n\geq 2)$ ····· ㉠
이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르다.
$\therefore\ a_1=2,\ a_n=6n-3\ (n\geq 2)$

필수 예제 01 등차수열의 합 217쪽

01-1 답 -170

|전략| 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한 후 등차수열의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=-28$에서 $a+3d=-28$ ····· ㉠
$a_9=-13$에서 $a+8d=-13$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-37$, $d=3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은
$\dfrac{20\{2\times(-37)+(20-1)\times 3\}}{2}=-170$

01-2 답 224

|전략| 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$S_6=\dfrac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=54$ $\therefore\ 2a+5d=18$ ····· ㉠
$S_{11}-S_6=100$에서
$\dfrac{11\{2a+(11-1)d\}}{2}-54=100$ $\therefore\ a+5d=14$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제12항부터 제18항까지의 합은
$S_{18}-S_{11}=\dfrac{18\{2\times 4+(18-1)\times 2\}}{2}-(54+100)$
$=378-154=224$

필수 예제 02 등차수열의 합의 최대 · 최소 218쪽

02-1 답 14

|전략| 첫째항이 양수이고 공차가 음수일 때, 처음으로 음수가 되는 항이 제k항이면 첫째항부터 제$(k-1)$항까지의 합이 최대가 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 40, 공차가 -3이므로
$a_n=40+(n-1)\times(-3)=-3n+43$
이때 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-3n+43<0$에서
$3n>43$ $\therefore\ n>\dfrac{43}{3}=14.33\cdots$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제14항까지가 양수이고 제15항부터 음수가 되므로 S_n이 최대가 되도록 하는 n의 값은 14이다.

02-2 답 −98

|전략| 첫째항이 음수이고 공차가 양수일 때, 처음으로 양수가 되는 항이 제k항이면 첫째항부터 제$(k-1)$항까지의 합이 최소가 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -26, 공차가 4이므로

$a_n=-26+(n-1)\times 4$

$=4n-30$

이때 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $4n-30>0$에서

$4n>30 \quad \therefore n>\frac{30}{4}=7.5$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제7항까지가 음수이고 제8항부터 양수가 되므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소가 된다.

따라서 S_n의 최솟값은

$S_7=\frac{7\{2\times(-26)+(7-1)\times 4\}}{2}=-98$

필수 예제 03 나머지가 같은 자연수의 합 219쪽

03-1 답 1650

|전략| 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 $a\,(0<a<d)$인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열하면 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열이다.

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 수부터 순서대로 나열하면

2, 5, 8, 11, ⋯, 98

이므로 이 수열은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2+(n-1)\times 3$

$=3n-1$

이때 $3n-1=98$에서 $n=33$이므로 98은 제33항이다.

따라서 구하는 합은

$\frac{33(2+98)}{2}=1650$

03-2 답 540

|전략| 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 $a\,(0<a<d)$인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열하면 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

20 이상 70 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 수부터 순서대로 나열하면

23, 27, 31, 35, ⋯, 67

이므로 이 수열은 첫째항이 23, 공차가 4인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=23+(n-1)\times 4$

$=4n+19$

이때 $4n+19=67$에서 $n=12$이므로 67은 제12항이다.

따라서 구하는 합은

$\frac{12(23+67)}{2}=540$

03-3 답 1617

|전략| 자연수 d의 배수를 작은 수부터 순서대로 나열하면 첫째항과 공차가 모두 d인 등차수열이다.

150 이하의 자연수 중에서 7의 배수를 작은 수부터 순서대로 나열하면

7, 14, 21, 28, ⋯, 147

이므로 이 수열은 첫째항과 공차가 모두 7인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=7+(n-1)\times 7=7n$

이때 $7n=147$에서 $n=21$이므로 147은 제21항이다.

따라서 구하는 합은

$\frac{21(7+147)}{2}=1617$

필수 예제 04 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계 220쪽

04-1 답 74

|전략| $a_1=S_1, a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geq 2)$임을 이용하여 a_n을 구한다.

$a_1=S_1=4\times 1^2-3\times 1=1$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4n^2-3n-\{4(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=8n-7\ (n\geq 2)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-7$

$\therefore a_1+a_{10}=1+(8\times 10-7)=74$

다른 풀이 $S_n=4n^2-3n$이므로

$a_1=S_1=4\times 1^2-3\times 1=1$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(4\times 10^2-3\times 10)-(4\times 9^2-3\times 9)$

$=370-297=73$

$\therefore a_1+a_{10}=1+73=74$

04-2 답 45

|전략| $a_1=S_1, a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geq 2)$임을 이용하여 a_n을 구한다.

$a_1=S_1=1^2+2\times 1+1=4$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n+1-\{(n-1)^2+2(n-1)+1\}$

$=2n+1\ (n\geq 2)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=4,\ a_n=2n+1\ (n\geq 2)$

$\therefore a_1+a_{20}=4+(2\times 20+1)=45$

다른 풀이 $S_n=n^2+2n+1$이므로

$a_1=S_1=1^2+2\times 1+1=4$

$a_{20}=S_{20}-S_{19}$

$=(20^2+2\times 20+1)-(19^2+2\times 19+1)$

$=441-400=41$

$\therefore a_1+a_{20}=4+41=45$

참고 수열의 합과 일반항 사이의 관계는 등차수열을 포함한 모든 수열에 적용된다.

3 등비수열

개념 확인 221~222쪽

1 (1) $a_n=33\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=7\times(-2)^{n-1}$

(3) $a_n=128\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ (4) $a_n=2\times(\sqrt{6})^{n-1}$

2 (1) 8 (2) $2\sqrt{3}$

3 (1) $x=4$, $y=16$ (2) $x=3$, $y=\frac{1}{3}$

1 (1) $a_n=33\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $a_n=7\times(-2)^{n-1}$

(3) 첫째항이 128, 공비가 $\frac{-32}{128}=-\frac{1}{4}$이므로

$a_n=128\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(4) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$이므로

$a_n=2\times(\sqrt{6})^{n-1}$

2 (1) x는 -32와 -2의 등비중항이므로

$x^2=-32\times(-2)=64$ $\therefore x=8\ (\because x>0)$

(2) x는 $\frac{1}{5}$과 60의 등비중항이므로

$x^2=\frac{1}{5}\times60=12$ $\therefore x=2\sqrt{3}\ (\because x>0)$

3 (1) x는 2와 8의 등비중항이므로

$x^2=2\times8=16$ $\therefore x=4\ (\because x>0)$

8은 4와 y의 등비중항이므로

$8^2=4\times y$ $\therefore y=16$

(2) x는 9와 1의 등비중항이므로

$x^2=9\times1=9$ $\therefore x=3\ (\because x>0)$

1은 3과 y의 등비중항이므로

$1^2=3\times y$ $\therefore y=\frac{1}{3}$

개념 드릴 223쪽

1 (1) 4 (2) 2 (3) -25, -125 (4) 10, 80 (5) 0.1, 0.0001

2 (1) $a_n=2\times4^{n-1}$ (2) $a_n=-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=5\times(-4)^{n-1}$ (4) $a_n=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3 (1) $a_n=4\times2^{n-1}$ (2) $a_n=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=3\times(-1)^{n-1}$ (4) $a_n=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_n=2\times(-\sqrt{3})^{n-1}$

4 (1) $x=-5$, $y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=5$, $y=\frac{1}{5}$

(2) $x=-2$, $y=-\frac{8}{25}$ 또는 $x=2$, $y=\frac{8}{25}$

1 (1) 공비가 $\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$이므로 16, -8, $\boxed{4}$, -2, 1, $\cdots$

(2) 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$이므로 1, $\sqrt{2}$, $\boxed{2}$, $2\sqrt{2}$, 4, $\cdots$

(3) 공비가 $\frac{-5}{-1}=5$이므로

-1, -5, $\boxed{-25}$, $\boxed{-125}$, -625, $\cdots$

(4) 공비가 $\frac{40}{20}=2$이므로

5, $\boxed{10}$, 20, 40, $\boxed{80}$, $\cdots$

(5) 공비가 $\frac{0.001}{0.01}=0.1$이므로

$\boxed{0.1}$, 0.01, 0.001, $\boxed{0.0001}$, 0.00001, $\cdots$

3 (1) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{8}{4}=2$이므로

$a_n=4\times2^{n-1}$

(2) 첫째항이 -3, 공비가 $\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{-3}{3}=-1$이므로

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$

(4) 첫째항이 -4, 공비가 $\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$이므로

$a_n=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$이므로

$a_n=2\times(-\sqrt{3})^{n-1}$

4 (1) x는 25와 1의 등비중항이므로

$x^2=25\times1=25$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=5$

$x=-5$일 때, 1은 -5와 y의 등비중항이므로

$1^2=-5\times y$ $\therefore y=-\frac{1}{5}$

$x=5$일 때, 1은 5와 y의 등비중항이므로

$1^2=5\times y$ $\therefore y=\frac{1}{5}$

따라서 $x=-5$, $y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=5$, $y=\frac{1}{5}$

(2) x는 -5와 $-\frac{4}{5}$의 등비중항이므로

$x^2=-5\times\left(-\frac{4}{5}\right)=4$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$x=-2$일 때, $-\frac{4}{5}$는 -2와 y의 등비중항이므로

$\left(-\frac{4}{5}\right)^2=-2\times y$ $\therefore y=-\frac{8}{25}$

$x=2$일 때, $-\frac{4}{5}$는 2와 y의 등비중항이므로

$\left(-\frac{4}{5}\right)^2=2\times y$ $\therefore y=\frac{8}{25}$

따라서 $x=-2$, $y=-\frac{8}{25}$ 또는 $x=2$, $y=\frac{8}{25}$

필수 예제 01 항이 주어진 등비수열 224쪽

01-1 답 $\frac{1}{16}$

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2=16$에서 $ar=16$ ……㉠

$a_4=4$에서 $ar^3=4$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{4}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ $(\because r>0)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}a=16$ $\therefore a=32$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 32, 공비는 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}=2^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

01-2 답 51

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=24$에서 $ar^3=24$ ……㉠

$a_7=192$에서 $ar^6=192$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$ $(\because r$는 실수$)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $8a=24$ $\therefore a=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3, 공비는 2이므로

$a_n=3\times2^{n-1}$

$\therefore a_1+a_5=3+3\times2^4=3+48=51$

01-3 답 제7항

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=-1$에서 $ar=-1$ ……㉠

$a_5=27$에서 $ar^4=27$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-27$ $\therefore r=-3$ $(\because r$는 실수$)$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3a=-1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{3}$, 공비는 -3이므로

$a_n=\frac{1}{3}\times(-3)^{n-1}$

243을 제n항이라 하면

$243=\frac{1}{3}\times(-3)^{n-1}$, $(-3)^{n-1}=729=(-3)^6$

$n-1=6$ $\therefore n=7$

즉, 243은 제7항이다.

필수 예제 02 항 사이의 관계가 주어진 등비수열 225쪽

02-1 답 $\frac{9}{16}$

|전략| 주어진 조건을 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 나타낸 후 a_7의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=9$에서 $ar^2=9$ ……㉠

$a_2:a_5=8:1$에서 $a_2=8a_5$, $ar=8ar^4$

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ $(\because r$는 실수$)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}a=9$ $\therefore a=36$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 36, 공비는 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=36\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_7=36\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=36\times\frac{1}{64}=\frac{9}{16}$

02-2 답 64

|전략| 주어진 조건을 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 나타낸 후 a_{11}의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2a_4=16$에서 (모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$)

$ar\times ar^3=a^2r^4=16$ $\therefore ar^2=4$ ……㉠

$a_3+a_5=12$에서

$ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=12$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $1+r^2=3$, $r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $2a=4$ $\therefore a=2$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공비는 $\sqrt{2}$이므로

$a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore a_{11}=2\times(\sqrt{2})^{10}=64$

02-3 답 75

|전략| 주어진 조건을 이용하여 공비 r를 구한 후 a_3의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 3이므로

$\frac{a_8+a_9}{a_5+a_6}=\frac{3r^7+3r^8}{3r^4+3r^5}=\frac{3r^7(1+r)}{3r^4(1+r)}=r^3=125$

$\therefore r=5$ $(\because r$는 실수$)$

$\therefore a_3=3\times5^{3-1}=3\times5^2=75$

필수 예제 03 조건을 만족시키는 등비수열 226쪽

03-1 답 제6항

|전략| $a_n>5000$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 5, 공비는 4이므로

$a_n=5\times4^{n-1}$

이때 처음으로 5000보다 크게 되는 항은 $a_n>5000$을 만족시키는 최초의 항이므로

$a_n=5\times4^{n-1}>5000$에서 $4^{n-1}>1000$

그런데 n은 자연수이고 $4^4=256$, $4^5=1024$이므로

$n-1\geq5$ $\therefore n\geq6$

따라서 이것을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이므로 처음으로 5000보다 크게 되는 항은 제6항이다.

03-2 답 제9항

|전략| 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구한 후 $a_n<\frac{1}{1000}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면 첫째항이 125이므로

$a_5=125\times r^{5-1}=\frac{1}{5}$에서

$r^4=\frac{1}{625}$ $\therefore r=\frac{1}{5}\,(\because r>0)$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 125, 공비는 $\frac{1}{5}$이므로

$a_n=125\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

이때 처음으로 $\frac{1}{1000}$보다 작게 되는 항은 $a_n<\frac{1}{1000}$을 만족시키는 최초의 항이므로

$125\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}<\frac{1}{1000}$에서

$125\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-4}<\frac{1}{1000}$, $5^{n-4}>1000$

그런데 n은 자연수이고 $5^4=625$, $5^5=3125$이므로

$n-4\geq5$ $\therefore n\geq9$

따라서 이것을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 9이므로 처음으로 $\frac{1}{1000}$보다 작게 되는 항은 제9항이다.

03-3 답 5

|전략| 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 $4<a_n<500$을 만족시키는 자연수 n을 모두 찾는다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ……㉠

$a_4=54$에서 $ar^3=54$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=9$ $\therefore r=3\,(\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$3a=6$ $\therefore a=2$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공비는 3이므로

$a_n=2\times3^{n-1}$

이때 $4<a_n<500$에서 $4<2\times3^{n-1}<500$, $2<3^{n-1}<250$

그런데 n은 자연수이고 $3^1=3$, …, $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$1\leq n-1\leq5$ $\therefore 2\leq n\leq6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 2, 3, 4, 5, 6의 5이다.

필수 예제 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등비수열 227쪽

04-1 답 $\frac{19}{18}$

|전략| 등비수열의 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 제5항이 $\frac{4}{27}$임을 이용하여 공비를 구한다.

등비수열 $\frac{3}{4}$, a, b, c, $\frac{4}{27}$의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 제5항이 $\frac{4}{27}$이므로

$\frac{3}{4}\times r^4=\frac{4}{27}$

$r^4=\frac{16}{81}$ $\therefore r=\frac{2}{3}\,(\because r>0)$

따라서

$a=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$, $c=\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$

이므로 $a+b+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{19}{18}$

04-2 답 576

|전략| 등비수열의 첫째항이 3, 제7항이 192임을 이용하여 공비를 구한다.

등비수열 3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 192의 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제7항이 192이므로

$3\times r^6=192$

$r^6=64$ $\therefore r=-2$ 또는 $r=2$ ……㉠

이때 x_1, x_5는 이 수열의 제2항, 제6항이므로

(i) $r=-2$일 때

$x_1=3\times(-2)=-6$, $x_5=3\times(-2)^5=-96$

(ii) $r=2$일 때

$x_1=3\times2=6$, $x_5=3\times2^5=96$

(i), (ii)에서 $x_1x_5=-6\times(-96)=6\times96=576$

다른 풀이 x_1, x_5는 이 수열의 제2항, 제6항이므로 $x_1=3r$, $x_5=3r^5$

$\therefore x_1x_5=3r\times3r^5=9r^6=9\times64=576\,(\because$ ㉠)

04-3 답 4

|전략| 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 제$(m+2)$항이 729임을 이용하여 m의 값을 구한다.

첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 제$(m+2)$항이 729이므로

$3\times3^{m+1}=729$, $3^{m+2}=3^6$

따라서 $m+2=6$이므로 $m=4$

필수 예제 05 등비중항 228쪽

05-1 답 9

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

$2a$가 $a-3$과 $6a$의 등비중항이므로

$(2a)^2=(a-3)\times6a$, $4a^2=6a^2-18a$

$2a^2-18a=0$, $2a(a-9)=0$ $\therefore a=9\,(\because a>0)$

05-2 답 3

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\frac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

a가 12와 b의 등차중항이므로

$a=\frac{12+b}{2}$ ……㉠

b가 a와 4의 등비중항이므로

$b^2=4a$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=4\times\frac{12+b}{2}$, $b^2=2(12+b)$

$b^2-2b-24=0$, $(b+4)(b-6)=0$

$\therefore b=6$ ($\because b>0$)

$b=6$을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{12+6}{2}=9$

$\therefore a-b=9-6=3$

05-3 답 −5

|전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\frac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

2가 a와 b의 등비중항이므로

$4=ab$ ……㉠

$b+1$이 a와 4의 등차중항이므로

$b+1=\frac{a+4}{2}$ $\therefore a=2b-2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4=b(2b-2)$, $2b^2-2b=4$

$b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=2$

(i) $b=-1$이면

$a=2\times(-1)-2=-4$

(ii) $b=2$이면

$a=2\times2-2=2$

그런데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=-4$, $b=-1$이므로

$a+b=-4+(-1)=-5$

필수 예제 06 등비수열을 이루는 수 229쪽

06-1 답 −27

|전략| 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

합이 -21이므로 $a+ar+ar^2=-21$

$\therefore a(1+r+r^2)=-21$ ……㉠

곱이 729이므로 $a\times ar\times ar^2=729$, $a^3r^3=729$

$\therefore ar=9$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{1+r+r^2}{r}=-\frac{7}{3}$

$3r^2+10r+3=0$, $(r+3)(3r+1)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=-\frac{1}{3}$

(i) $r=-3$일 때, ㉡에 의하여 $a=-3$

(ii) $r=-\frac{1}{3}$일 때, ㉡에 의하여 $a=-27$

(i), (ii)에서 세 수는 -27, 9, -3이므로 세 수 중 가장 작은 수는 -27이다.

06-2 답 −216

|전략| 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

합이 9이므로 $a+ar+ar^2=9$

$\therefore a(1+r+r^2)=9$ ……㉠

제곱의 합이 189이므로

$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189$, $a^2(1+r^2+r^4)=189$

$\therefore a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2)=189$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$a(1-r+r^2)=21$ ……㉢

㉢÷㉠을 하면

$\frac{1-r+r^2}{1+r+r^2}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$, $3-3r+3r^2=7+7r+7r^2$

$2r^2+5r+2=0$, $(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

(i) $r=-2$일 때, ㉠에 의하여 $a=3$

(ii) $r=-\frac{1}{2}$일 때, ㉠에 의하여 $a=12$

(i), (ii)에서 구하는 세 수의 곱은

$a\times ar\times ar^2=a^3r^3=(ar)^3=(-6)^3=-216$

다른 풀이 (i), (ii)에서 세 수는 3, -6, 12이므로 구하는 세 수의 곱은

$3\times(-6)\times12=-216$

06-3 답 14

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식 $x^3-7x^2+kx-8=0$의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=7$에서 $a(1+r+r^2)=7$ ……㉠

$a\times ar\times ar^2=8$에서 $a^3r^3=8$ $\therefore ar=2$ ……㉡

이때 $a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=k$이므로

$a^2r(1+r+r^2)=k$, $ar\times a(1+r+r^2)=k$

$\therefore k=2\times7=14$ ($\because$ ㉠, ㉡)

참고 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

필수 예제 07 등비수열의 활용 230쪽

07-1 답 $4\times\left(\frac{4}{3}\right)^6$

|전략| 첫째항부터 차례로 나열하여 규칙을 찾아 일반항을 구한 후 구하고자 하는 항의 숫자를 대입한다.

주어진 정삼각형의 한 변의 길이가 1이므로 둘레의 길이는 3이다.

[1단계]에서는 세 변마다 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분이 4개씩 생기므로 도형의 둘레의 길이는 $3\times\frac{4}{3}=4$ $\therefore a_1=4$

$a_1=4$, $a_2=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^1$, $a_3=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$, …, $a_n=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_7=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^6$

4 등비수열의 합

개념 확인 231~232쪽

1 (1) $4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$ (2) $\frac{1}{2}(3^8-1)$

2 (1) $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ (2) 70

1 (1) $S_8=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$

(2) $S_8=\frac{1\times(3^8-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^8-1)$

2 (1) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$S_{10}=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

(2) 첫째항이 7, 공비가 $\frac{7}{7}=1$인 등비수열이므로

$S_{10}=10\times7=70$

개념 드릴 233쪽

1 (1) $2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (2) $-2(2^n-1)$ (3) $1-(-3)^n$

(4) $-4\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ (5) $\frac{3}{2}(5^n-1)$ (6) $2n$

2 (1) $\frac{1}{4}(5^n-1)$ (2) $\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$ (3) $\frac{16}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

(4) $-4\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (5) $\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}$ (6) $-5n$

1 (1) $S_n=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(2) $S_n=\frac{-2(2^n-1)}{2-1}=-2(2^n-1)$

(3) $S_n=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=1-(-3)^n$

(4) $S_n=\frac{-5\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-4\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

(5) $S_n=\frac{6(5^n-1)}{5-1}=\frac{3}{2}(5^n-1)$

(6) $S_n=n\times2=2n$

2 (1) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{5}{1}=5$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{-2}{1}=-2$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{1\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

(4) 첫째항이 -6, 공비가 $\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{-6\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-4\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(5) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{-9}{3}=-3$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{3\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}$

(6) 첫째항이 -5, 공비가 1인 등비수열이므로

$S_n=n\times(-5)=-5n$

필수 예제 01 등비수열의 합 234쪽

01-1 답 $\frac{1456}{81}$

|전략| 주어진 조건을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2=4$에서 $ar=4$ ……㉠

$a_4=\frac{4}{9}$에서 $ar^3=\frac{4}{9}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{9}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$ $(\because r>0)$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{3}a=4$ $\therefore a=12$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{12\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}=\frac{1456}{81}$

01-2 답 $\frac{126}{5}$

|전략| 주어진 조건을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2+a_4=4$에서

$ar+ar^3=ar(1+r^2)=4$ ……㉠

$a_4+a_6=16$에서

$ar^3+ar^5=ar^3(1+r^2)=16$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$10a=4$ $\therefore a=\frac{2}{5}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{\frac{2}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{126}{5}$$

01-3 답 $-\frac{1}{2}\{1-(-3)^{10}\}$ 또는 $3(2^{10}-1)$

|전략| 주어진 조건을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ……㉠

$a_3+a_4=36$에서 $ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=36$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r(1+r)=6$, $r^2+r-6=0$

$(r+3)(r-2)=0$ $\therefore r=-3$ 또는 $r=2$

(i) $r=-3$일 때

$a=-2$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{-2\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\{1-(-3)^{10}\}$$

(ii) $r=2$일 때

$a=3$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3(2^{10}-1)$$

(i), (ii)에서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$-\frac{1}{2}\{1-(-3)^{10}\}$ 또는 $3(2^{10}-1)$

필수 예제 02 부분의 합이 주어진 등비수열의 합 235쪽

02-1 답 15

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_2=\frac{a(r^2-1)}{r-1}$ ……㉠

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{S_4}{S_2}=r^2+1$

이때 $\frac{S_4}{S_2}=16$이므로

$r^2+1=16$ $\therefore r^2=15$

$\therefore \frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=15$

02-2 답 378

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=18$ ……㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=90$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4+1=5$ $\therefore r^4=4$

$$\begin{aligned}\therefore S_{12}&=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^4-1)}{r-1}\times(r^8+r^4+1)\\&=18\times(4^2+4+1)\\&=378\end{aligned}$$

02-3 답 744

|전략| 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=24$ ……㉠

$S_{20}-S_{10}=120$에서

$S_{20}=S_{10}+120=24+120=144$

$\therefore S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=144$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^{10}+1=6$ $\therefore r^{10}=5$

$$\begin{aligned}\therefore S_{30}&=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\times(r^{20}+r^{10}+1)\\&=24\times(5^2+5+1)\\&=744\end{aligned}$$

필수 예제 03 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계 236쪽

03-1 답 $a_n=4\times5^n$

|전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

$a_1=S_1=5^2-5=20$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^{n+1}-5)-(5^n-5)$

$=4\times5^n\ (n\geq2)$ ……㉠

이때 $a_1=20$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times5^n$

03-2 답 1

|전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

$a_1=S_1=2^2+4=8$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}+4)-(2^n+4)$

$=2^n\ (n\geq2)$ ……㉠

이때 $a_1=8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=8$, $a_n=2^n\ (n\geq2)$

$\therefore \dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{2^3}{8}=1$

다른 풀이 $S_n=2^{n+1}+4$이므로

$a_1=S_1=2^2+4=8$

$a_3=S_3-S_2=(2^4+4)-(2^3+4)=20-12=8$

$\therefore \dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{8}{8}=1$

03-3 답 -12

|전략| 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_n=S_n-S_{n-1}$에 $n=1$을 대입한 것과 S_1이 일치해야 함을 이용한다.

$a_1=S_1=3\times2^3+k=24+k$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times2^{n+2}+k)-(3\times2^{n+1}+k)$

$=3\times2^{n+1}\ (n\geq2)$ ……㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=24+k$가 같아야 하므로

$12=24+k$ $\therefore k=-12$

참고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=Ar^n+B(A, B$는 상수)꼴일 때, $A+B=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

즉, $S_n=3\times2^{n+2}+k=12\times2^n+k$에서 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $12+k=0$ $\therefore k=-12$

필수 예제 04 등비수열의 합의 활용 237쪽

04-1 답 (1) 412만 원 (2) 800만 원

|전략| 매년 초에 적립하는 경우에는 $S=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$을, 매년 말에 적립하는 경우에는 $S=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$을 이용한다.

(1) 연이율 3 %, 1년마다 복리로 매년 초에 15만 원씩 20년 동안 적립할 때, 20년째 말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$S=15(1+0.03)+15(1+0.03)^2+\cdots+15(1+0.03)^{20}$

$=\dfrac{15(1+0.03)\{(1+0.03)^{20}-1\}}{(1+0.03)-1}$

$=\dfrac{15\times1.03\times0.8}{0.03}=412$(만 원)

(2) 연이율 3 %, 1년마다 복리로 매년 말에 30만 원씩 20년 동안 적립할 때, 20년째 말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$S=30+30(1+0.03)+30(1+0.03)^2+\cdots+30(1+0.03)^{19}$

$=\dfrac{30\{(1+0.03)^{20}-1\}}{(1+0.03)-1}=\dfrac{30\times0.8}{0.03}=800$(만 원)

개념 정리 238~239쪽

01 수열, 항 **02** 일반항, $\{a_n\}$

03 등차수열, 공차 **04** $a+(n-1)d$

05 등차중항, $\dfrac{a+c}{2}$ **06** 2 **07** 2, 1

08 S_1 **09** S_n, S_{n-1} **10** 등비, 공비 **11** $n-1$

12 등비, ac **13** 3, 3, 3, 3, 2, 3

14 (1) r^n, $r-1$ (2) na **15** (1) $a(1+r)$ (2) a

13 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 2이므로

$a_4=2\times r^{\boxed{3}}=54$, $r^{\boxed{3}}=27$ $\therefore r=\boxed{3}$ ($\because r$는 실수)

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공비는 $\boxed{3}$이므로

$a_n=\boxed{2}\times\boxed{3}^{n-1}$

중단원 마무리 240~242쪽

01 ④ **02** ③ **03** -360 **04** 5

05 8 **06** ③ **07** 60 **08** ①

09 ③ **10** ④ **11** 27 **12** ②

13 ② **14** ② **15** ③ **16** 72

17 ⑤ **18** ② **19** ④ **20** ②

21 -11 **22** 1387 **23** $\dfrac{1}{8}$

24 $6\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^8-1\right\}$

LEVEL 1

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d\neq0)$라 하면

$|a_2|=|a_8|$에서 $|a+d|=|a+7d|$

$\therefore a+d=a+7d$ 또는 $a+d=-(a+7d)$

이때 $a+d=a+7d$이면 $d=0$이므로

$a+d=-(a+7d)$ $\therefore a+4d=0$ ……㉠

$a_{15}=40$에서 $a+14d=40$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-16$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -16, 공차는 4이므로

$a_n=-16+(n-1)\times4=4n-20$

$\therefore a_9=4\times9-20=16$

02 세 수 3, a, 1에서 a는 3과 1의 등차중항이므로

$a=\frac{3+1}{2}=2$

세 수 3, b, 13에서 b는 3과 13의 등차중항이므로

$b=\frac{3+13}{2}=8$

세 수 1, 4, d에서 4는 1과 d의 등차중항이므로

$4=\frac{1+d}{2}$ $\therefore d=7$

세 수 13, c, d에서 c는 13과 d의 등차중항이므로

$c=\frac{13+d}{2}=\frac{13+7}{2}=10$

$\therefore a+b+c+d=2+8+10+7=27$

다른 풀이 세 수 a, 6, c에서 6은 a와 c의 등차중항이므로

$6=\frac{a+c}{2}$ $\therefore a+c=12$

세 수 b, 6, 4에서 6은 b와 4의 등차중항이므로

$6=\frac{b+4}{2}$ $\therefore b=8$

세 수 1, 4, d에서 4는 1과 d의 등차중항이므로

$4=\frac{1+d}{2}$ $\therefore d=7$

$\therefore a+b+c+d=(a+c)+b+d=12+8+7=27$

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -46, 공차가 3이므로

$a_n=-46+(n-1)\times3=3n-49$

이때 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $3n-49>0$에서

$3n>49$ $\therefore n>\frac{49}{3}=16.33\cdots$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제16항까지가 음수이고 제17항부터 양수가 되므로 첫째항부터 제16항까지의 합이 최소가 된다.

$\therefore n=16$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n의 최솟값은

$S_{16}=\frac{16\{2\times(-46)+(16-1)\times3\}}{2}=-376$

$\therefore k=-376$

$\therefore n+k=16+(-376)=-360$

04 $a_1=S_1=1^2-10\times1=-9$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-10n-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$

$=2n-11\ (n\geq2)$ ……㉠

이때 $a_1=-9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-11$

$a_n<0$에서 $2n-11<0$

$2n<11$ $\therefore n<\frac{11}{2}=5.5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$라 하면 첫째항이 2이므로

$a_5=18$에서 $2r^4=18$

$r^4=9$, $r^2=3$

$\therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공비는 $\sqrt{3}$이므로

$a_n=2\times(\sqrt{3})^{n-1}$

$\therefore a_n^2=4\times3^{n-1}$

이때 $a_n^2>8000$에서 $4\times3^{n-1}>8000$

$\therefore 3^{n-1}>2000$

그런데 n은 자연수이고 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\geq7$ $\therefore n\geq8$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

06 $\overline{AA_1}=\overline{AD_1}=2$에서

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이는 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1D_2}=\sqrt{2}$에서

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

$\overline{A_2A_3}=\overline{A_2D_3}=1$에서

정사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 한 변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

⋮

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이는

$2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

이므로 정사각형 $A_8B_8C_8D_8$의 한 변의 길이는

$2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{7}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 둘레의 길이는

$4\times\frac{1}{4}=1$

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=20$ ……㉠

$S_{30}-S_{20}=180$에서

$\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}-\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=180$

$\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}-\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=180$

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\times r^{20}=180$

이 식에 ㉠을 대입하면 $r^{20}=9$

$\therefore r^{10}=3\ (\because r^{10}>0)$

이때

$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}$

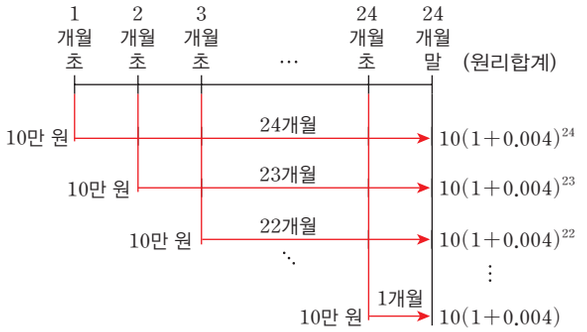
$=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\times(r^{10}+1)$

$=20\times(3+1)=80$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제20항까지의 합은

$S_{20}-S_{10}=80-20=60$

08 월이율 0.4 %, 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원씩 24개월 동안 적립한 적립금의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 내년 12월 말의 적립금의 원리합계는

$10(1+0.004)+10(1+0.004)^2+\cdots+10(1+0.004)^{24}$

$=\dfrac{10(1+0.004)\{(1+0.004)^{24}-1\}}{(1+0.004)-1}$

$=\dfrac{10\times1.004\times0.1}{0.004}=251$(만 원)

LEVEL 2

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-12$에서 $a+2d=-12$ ……㉠

$a_4+a_6+a_8=0$에서 $(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)=0$

$3a+15d=0$ $\therefore a+5d=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -20, 공차는 4이므로

$a_n=-20+(n-1)\times4=4n-24$

이때 $a_k>100$에서 $4k-24>100$

$4k>124$ $\therefore k>31$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 32이다.

10 첫째항이 10, 제16항이 100인 등차수열의 합은

$\dfrac{16(10+100)}{2}=880$

따라서 $10+x_1+x_2+\cdots+x_{14}+100=880$이므로

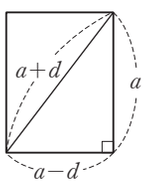
$x_1+x_2+\cdots+x_{14}=880-(10+100)=770$

11 직사각형의 가로, 세로, 대각선의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 21이므로

$2(a-d)+2a=21$

$\therefore 4a-2d=21$ ……㉠

또, 오른쪽 그림에서 피타고라스 정리에 의하여 $(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$



$a^2+2ad+d^2=a^2-2ad+d^2+a^2$

$a^2-4ad=0$, $a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d$ ($\because a\neq0$) ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=\dfrac{3}{2}$

따라서 직사각형의 넓이는

$(a-d)\times a=\left(6-\dfrac{3}{2}\right)\times6=\dfrac{9}{2}\times6=27$

12 이차방정식 $x^2-nx+6(n-6)=0$을 풀면

$(x-6)\{x-(n-6)\}=0$ $\therefore x=6$ 또는 $x=n-6$

즉, $\alpha=6$, $\beta=n-6$ 또는 $\alpha=n-6$, $\beta=6$이다.

한편, 세 수 3, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\alpha=\dfrac{3+\beta}{2}$ $\therefore 2\alpha=3+\beta$ ……㉠

(i) $\alpha=6$, $\beta=n-6$일 때

㉠에 대입하면

$2\times6=3+(n-6)$ $\therefore n=15$

(ii) $\alpha=n-6$, $\beta=6$일 때

㉠에 대입하면

$2(n-6)=3+6$ $\therefore n=\dfrac{21}{2}$

이때 n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=15$

13 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 21, 공차가 -2이므로

$a_n=21+(n-1)\times(-2)=-2n+23$

이때 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-2n+23<0$에서

$2n>23$ $\therefore n>\dfrac{23}{2}=11.5$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제12항이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{11})-(a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20})$

← $(a_1+a_2+\cdots+a_{11})$: 항이 11개이고 첫째항이 a, 끝항이 a_{11}인 등차수열이다.

← $(a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20})$: 항이 9개이고 첫째항이 a_{12}, 끝항이 a_{20}인 등차수열이다.

$=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}-\dfrac{9(a_{12}+a_{20})}{2}$

$=\dfrac{11(21+1)}{2}-\dfrac{9\{-1+(-17)\}}{2}$

← $a_{11}=-2\times11+23=1$, $a_{12}=-2\times12+23=-1$, $a_{20}=-2\times20+23=-17$

$=121-(-81)=202$

14 n각형의 내각의 크기의 합은

$180^\circ\times(n-2)$ ……㉠

첫째항이 120°, 공차가 5°인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\dfrac{n\{2\times120^\circ+(n-1)\times5^\circ\}}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $180^\circ\times(n-2)=\dfrac{n\{2\times120^\circ+(n-1)\times5^\circ\}}{2}$

$72(n-2)=n(47+n)$, $n^2-25n+144=0$

$(n-9)(n-16)=0$ $\therefore n=9$ 또는 $n=16$

이때 $n=16$이면 가장 큰 내각의 크기가

$120^\circ+15\times5^\circ=195^\circ$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 n의 값은 9이다.

15 첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r ($r>0$)라 하면 일반항 b_n은 $b_n=br^{n-1}$

$a_3=5b_3$에서

$6\times3-3=5br^2$ $\therefore br^2=3$ ……㉠

$a_5=b_5$에서

$6\times5-3=br^4$ $\therefore br^4=27$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\therefore r=3\ (\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $9b=3$ $\therefore b=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{3}$, 공비는 3이므로

$b_n=\frac{1}{3}\times3^{n-1}$

$\therefore b_6=\frac{1}{3}\times3^5=3^4=81$

16 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$\frac{a_2a_7}{a_4}=18$에서 (모든 항이 양수이므로 $a>0, r>0$)

$\frac{ar\times ar^6}{ar^3}=18$ $\therefore ar^4=18$ ……㉠

$a_5+a_7=54$에서

$ar^4+ar^6=54$ $\therefore ar^4(1+r^2)=54$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$1+r^2=3,\ r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$a\times(\sqrt{2})^4=18,\ 4a=18$ $\therefore a=\frac{9}{2}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{9}{2}$, 공비는 $\sqrt{2}$이므로

$a_n=\frac{9}{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore a_9=\frac{9}{2}\times(\sqrt{2})^8=\frac{9}{2}\times16=72$

다른 풀이 $ar^4=18,\ r^2=2$를 구한 후 a의 값을 구하지 않아도 다음과 같이 a_9의 값을 구할 수 있다.

$a_9=ar^8=ar^4\times(r^2)^2=18\times2^2=72$

17 $\log a$가 $\log3$과 $\log b$의 등차중항이므로

$2\log a=\log3+\log b,\ \log a^2=\log3b$

$\therefore a^2=3b$ ……㉠

2^{2a}이 2와 2^{9b}의 등비중항이므로

$(2^{2a})^2=2\times2^{9b},\ 2^{4a}=2^{9b+1}$

$\therefore 4a=9b+1$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4a=3a^2+1,\ 3a^2-4a+1=0$

$(3a-1)(a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$

그런데 $a=1$이면 $\log a=\log1=0$에서 조건을 만족시키지 않으므로 $a=\frac{1}{3}$

즉, $a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{27}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{27}}=9$

18 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=260$에서

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=260$ ……㉠

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=65$에서 (첫째항이 ar, 공비가 r^2, 항의 개수가 5인 등비수열의 합이다.)

$\frac{ar\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\frac{ar(r^{10}-1)}{(r-1)(r+1)}=65$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{r}{r+1}=\frac{1}{4}$

$4r=r+1$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이다.

19 $a_1=S_1=p+q$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(p^n+q)-(p^{n-1}+q)$

$=p^n-p^{n-1}$

$=p^{n-1}(p-1)\ (n\geq2)$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 5이므로

$p=5$

즉, $a_1=5+q$이고

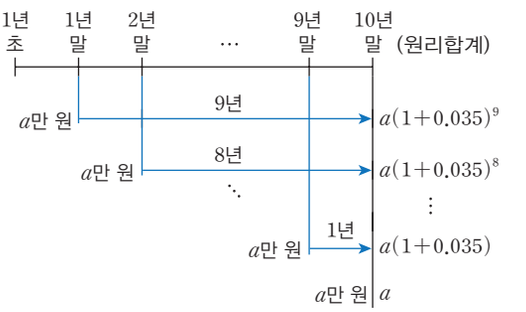
$a_n=4\times5^{n-1}\ (n\geq2)$ ……㉠

또, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=5+q$가 같아야 하므로

$4=5+q$ $\therefore q=-1$

$\therefore p^2+q^2=5^2+(-1)^2=26$

20 연이율 3.5 %, 1년마다 복리로 매년 말에 a만 원씩 10년 동안 적립한 적립금의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.035)+a(1+0.035)^2+\cdots+a(1+0.035)^9$

$=\frac{a\{(1+0.035)^{10}-1\}}{(1+0.035)-1}$

$=\frac{a\times0.4}{0.035}$

$=\frac{80}{7}a$(만 원)

이때 적립금의 원리합계는 1120만 원이어야 하므로

$\frac{80}{7}a=1120$ $\therefore a=98$

따라서 매년 말에 적립해야 하는 금액은 98만 원이다.

서술형

21 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 -2이므로

$a_2=a-2$, $a_3=a-4$, $a_4=a-6$ … ❶

$(a_2+a_4)^2=12a_3$이므로

$\{(a-2)+(a-6)\}^2=12(a-4)$, $4(a-4)^2=12(a-4)$

$a^2-8a+16=3a-12$, $a^2-11a+28=0$

$(a-4)(a-7)=0$ $\therefore a=4$ 또는 $a=7$

이때 $a=4$이면 $a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a=7$ … ❷

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 7, 공차는 -2이므로

$a_{10}=7+9\times(-2)=-11$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 놓고 a_2, a_3, a_4의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a_{10}의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $a_2+a_4=2a_3$이므로 $(a_2+a_4)^2=12a_3$에서

$(2a_3)^2=12a_3$, $a_3^2=3a_3$ $\therefore a_3=3$ ($\because a_3\neq0$)

$\therefore a_{10}=a_3+7\times(-2)=3-14=-11$

22 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수를 작은 수부터 순서대로 나열하면

52, 56, 60, …, 100 ……㉠

이때 $100=52+(13-1)\times4$에서 ㉠은 첫째항이 52, 제13항이 100인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{13\times(52+100)}{2}=988$ … ❶

50 이상 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수를 작은 수부터 순서대로 나열하면

56, 63, 70, …, 98 ……㉡

이때 $98=56+(7-1)\times7$에서 ㉡은 첫째항이 56, 제7항이 98인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{7\times(56+98)}{2}=539$ … ❷

한편, 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 4와 7의 최소공배수인 28의 배수는 56, 84이므로 그 합은

$56+84=140$ … ❸

따라서 구하는 합은

$988+539-140=1387$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 28의 배수의 합을 구할 수 있다.	20 %
❹ 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수 또는 7의 배수인 수의 총합을 구할 수 있다.	20 %

주의 4의 배수 또는 7의 배수인 수의 총합을 4의 배수의 합과 7의 배수의 합으로 구하지 않도록 주의한다. 각각을 구한 수에는 두 수의 최소공배수인 28의 배수가 공통으로 들어있기 때문이다.

23 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나므로

방정식 $x^3-x^2+x=x^2+k$, 즉 $x^3-2x^2+x-k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. … ❶

또, 두 곡선의 교점의 x좌표는 삼차방정식 $x^3-2x^2+x-k=0$의 실근이므로 이 삼차방정식의 세 실근은 차례로 등비수열을 이룬다.

즉, 삼차방정식 $x^3-2x^2+x-k=0$의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=2$에서

$a(1+r+r^2)=2$ ……㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=1$에서

$a^2r(1+r+r^2)=1$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$ar=\frac{1}{2}$ … ❷

따라서 $a\times ar\times ar^2=k$이므로

$a^3r^3=k$

$\therefore k=(ar)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건에서 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.	20 %
❷ 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ar의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

24 [n단계]에서 새로 색칠한 정삼각형의 둘레의 길이의 합을 a_n이라 하면

$a_1=\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times3=3$

$a_2=a_1\times\frac{1}{2}\times3=3\times\frac{3}{2}$

$a_3=a_2\times\frac{1}{2}\times3=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$

⋮

$a_n=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ … ❶

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다. … ❷

따라서 [8단계] 시행 후 색칠한 정삼각형의 둘레의 길이의 합은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\frac{3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right\}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ [1단계], [2단계], [3단계], …, [n단계]에서 새로 색칠한 정삼각형의 둘레의 길이의 합을 구할 수 있다.	40 %
❷ 새로 색칠한 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 나타내는 수열이 등비수열임을 알 수 있다.	30 %
❸ [8단계] 시행 후 색칠한 정삼각형의 둘레의 길이의 합을 구할 수 있다.	30 %

9 수열의 합

1 합의 기호 Σ와 그 성질

개념 확인 244~245쪽

1 (1) $\sum_{k=1}^{14} 2k$ (2) $\sum_{k=1}^{25} 3\times 2^k$

2 (1) $1+3+5+7+9$ (2) $3^3+3^4+3^5+\cdots+3^{10}$

3 (1) 11 (2) -27

1 (1) 수열 2, 4, 6, …, 28은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

이때 $2n=28$에서 $n=14$이므로

$2+4+6+\cdots+28=\sum_{k=1}^{14} 2k$

(2) 수열 $3\times 2, 3\times 2^2, 3\times 2^3, \cdots, 3\times 2^{25}$은 첫째항이 3×2, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=(3\times 2)\times 2^{n-1}=3\times 2^n$

이때 $3\times 2^n=3\times 2^{25}$에서 $n=25$이므로

$3\times 2+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^{25}=\sum_{k=1}^{25} 3\times 2^k$

2 (1) 일반항 $2k-1$의 k에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+(2\times 3-1)+(2\times 4-1)+(2\times 5-1)$$
$$=1+3+5+7+9$$

(2) 일반항 3^i의 i에 3, 4, 5, …, 10을 차례로 대입하면

$\sum_{i=3}^{10} 3^i=3^3+3^4+3^5+\cdots+3^{10}$

3 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=2\times 8+(-5)$
$=11$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k-4)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}4$
$=8-(-5)-4\times 10$
$=-27$

개념 드릴 246쪽

1 (1) $\sum_{k=1}^{5} 2$ (2) $\sum_{k=1}^{15} 3^k$ (3) $\sum_{k=1}^{12}(3k-2)$ (4) $\sum_{k=1}^{6} 15\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

2 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$ (2) $-4+(-3)+(-2)+\cdots+3$
(3) $2^3+2^4+2^5+\cdots+2^9$ (4) $2+(-3)+4+(-5)$

3 (1) 14 (2) 95 (3) -29 (4) 70

4 (1) -23 (2) -17 (3) 42 (4) 15

1 (1) $\underbrace{2+2+2+2+2}_{5\text{개}}=\sum_{k=1}^{5} 2$

(2) 수열 3, 3^2, 3^3, …, 3^{15}은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$

이때 $3^n=3^{15}$에서 $n=15$이므로

$3+3^2+3^3+\cdots+3^{15}=\sum_{k=1}^{15} 3^k$

(3) 수열 1, 4, 7, …, 34는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

이때 $3n-2=34$에서 $n=12$이므로

$1+4+7+\cdots+34=\sum_{k=1}^{12}(3k-2)$

(4) 수열 15, 5, $\frac{5}{3}$, …, $\frac{5}{81}$는 첫째항이 15, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=15\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

이때 $15\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{5}{81}$에서 $n-1=5$, 즉 $n=6$이므로

$15+5+\frac{5}{3}+\cdots+\frac{5}{81}=\sum_{k=1}^{6} 15\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

2 (1) 일반항 k^2의 k에 1, 2, 3, …, 12를 차례로 대입하면

$\sum_{k=1}^{12} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$

(2) 일반항 $k-5$의 k에 1, 2, 3, …, 8을 차례로 대입하면

$$\sum_{k=1}^{8}(k-5)=(1-5)+(2-5)+(3-5)+\cdots+(8-5)$$
$$=-4+(-3)+(-2)+\cdots+3$$

(3) 일반항 2^i의 i에 3, 4, 5, …, 9를 차례로 대입하면

$\sum_{i=3}^{9} 2^i=2^3+2^4+2^5+\cdots+2^9$

(4) 일반항 $(-1)^j\times j$의 j에 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$\sum_{j=2}^{5}(-1)^j\times j$
$=(-1)^2\times 2+(-1)^3\times 3+(-1)^4\times 4+(-1)^5\times 5$
$=2+(-3)+4+(-5)$

3 (1) $\sum_{k=1}^{7}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{7}a_k+2\sum_{k=1}^{7}b_k=20+2\times(-3)=14$

(2) $\sum_{k=1}^{7}(4a_k-5b_k)=4\sum_{k=1}^{7}a_k-5\sum_{k=1}^{7}b_k$
$=4\times 20-5\times(-3)=95$

(3) $\sum_{k=1}^{7}(-a_k+3b_k)=-\sum_{k=1}^{7}a_k+3\sum_{k=1}^{7}b_k$
$=-20+3\times(-3)=-29$

(4) $\sum_{k=1}^{7}(3a_k-b_k+1)=3\sum_{k=1}^{7}a_k-\sum_{k=1}^{7}b_k+\sum_{k=1}^{7}1$
$=3\times 20-(-3)+1\times 7=70$

4 (1) $\sum_{k=1}^{5}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k-2\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=-15-2\times4=-23$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(3a_k+7b_k)=3\sum_{k=1}^{5}a_k+7\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=3\times(-15)+7\times4=-17$

(3) $\sum_{k=1}^{5}6\left(-\frac{1}{3}a_k+\frac{1}{2}b_k\right)=\sum_{k=1}^{5}(-2a_k+3b_k)$

$=-2\sum_{k=1}^{5}a_k+3\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=-2\times(-15)+3\times4=42$

(4) $\sum_{k=1}^{5}(a_k+5b_k+2)=\sum_{k=1}^{5}a_k+5\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}2$

$=-15+5\times4+2\times5=15$

필수 예제 01 합의 기호 ∑ 247쪽

01-1 답 48

|전략| $\sum_{k=2}^{100}a_k-\sum_{k=1}^{99}a_k$를 ∑를 사용하지 않고 나타내 본다.

$\sum_{k=2}^{100}a_k-\sum_{k=1}^{99}a_k=(a_2+a_3+\cdots+a_{100})-(a_1+a_2+\cdots+a_{99})$

$=a_{100}-a_1$

$=50-2=48$

01-2 답 25

|전략| $\sum_{k=2}^{11}ka_{k-1}$, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$를 각각 ∑를 사용하지 않고 나타내 본다.

$\sum_{k=2}^{11}ka_{k-1}=35$에서

$2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+11a_{10}=35$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=10$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=10$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=25$

$\therefore\sum_{k=1}^{10}a_k=25$

01-3 답 ㄱ, ㄷ

|전략| 주어진 식을 ∑를 사용하지 않고 나타내 본다.

ㄱ. $\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_{k+1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})-(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{15})$

$=a_1$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{19}a_k$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19})$

$=a_{20}$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{20}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{20}a_k$

$=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})$

$=a_{21}-a_1$ (참)

ㄹ. $\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{20}a_{2k}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40})$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{39}+a_{40}$

$=\sum_{k=1}^{40}a_k$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

필수 예제 02 합의 기호 ∑의 성질 248쪽

02-1 답 706

|전략| ∑의 성질과 등비수열의 합의 공식을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{5}(2\times3^k-4)=2\sum_{k=1}^{5}3^k-\sum_{k=1}^{5}4$

$=2(3+3^2+3^3+3^4+3^5)-4\times5$

$=2\times\frac{3(3^5-1)}{3-1}-20$

$=726-20=706$

참고 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n

(1) $r\neq1$일 때,

$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

02-2 답 5

|전략| $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=9$에서 $(a_k+b_k)^2$을 전개한 후 ∑의 성질을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

이때 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=9$, $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=2$이므로

$9=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\times2$

$\therefore\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=5$

02-3 답 45

|전략| $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2$에서 $(2a_k-3)^2$을 전개한 후 ∑의 성질을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-12a_k+9)$

$=4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-12\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}9$

$=4\times15-12\times5+9\times5=45$

2 여러 가지 수열의 합

개념 확인 249~250쪽

1 (1) 28 (2) 385 (3) 2025 (4) 595

2 (1) $\frac{10}{21}$ (2) $6-\sqrt{2}$

1 (1) $1+2+3+\cdots+7=\sum_{k=1}^{7}k=\frac{7\times8}{2}=28$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3=\sum_{k=1}^{9}k^3=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2=45^2=2025$

(4) $6^2+7^2+8^2+\cdots+12^2$

$=1^2+2^2+\cdots+12^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$

$=\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=\frac{12\times13\times25}{6}-\frac{5\times6\times11}{6}$

$=650-55=595$

2 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2k+1-(2k-1)}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

(2) $\sum_{k=1}^{34}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{34}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sum_{k=1}^{34}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})$

$=\sqrt{36}-\sqrt{2}=6-\sqrt{2}$

개념 드릴

251쪽

1 (1) 124 (2) 2660 (3) 199 (4) 1771 (5) 140 (6) 1743

2 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{15}{46}$ (3) $\frac{175}{264}$ (4) 4 (5) $2\sqrt{2}$ (6) $3-\sqrt{2}+\sqrt{15}$

1 (1) $\sum_{k=1}^{8}(3k+2)=3\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}2$

$=3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8$

$=108+16=124$

(2) $\sum_{k=1}^{19}k(k+1)=\sum_{k=1}^{19}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{19}k^2+\sum_{k=1}^{19}k$

$=\frac{19\times20\times39}{6}+\frac{19\times20}{2}$

$=2470+190=2660$

(3) $\sum_{k=1}^{6}(k+2)^2=\sum_{k=1}^{6}(k^2+4k+4)$

$=\sum_{k=1}^{6}k^2+4\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}4$

$=\frac{6\times7\times13}{6}+4\times\frac{6\times7}{2}+4\times6$

$=91+84+24=199$

(4) $\sum_{k=1}^{11}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{11}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{11}k^2-4\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}1$

$=4\times\frac{11\times12\times23}{6}-4\times\frac{11\times12}{2}+1\times11$

$=2024-264+11=1771$

(5) $\sum_{k=1}^{5}(k^3-2k^2+3k-4)$

$=\sum_{k=1}^{5}k^3-2\sum_{k=1}^{5}k^2+3\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}4$

$=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-2\times\frac{5\times6\times11}{6}+3\times\frac{5\times6}{2}-4\times5$

$=225-110+45-20=140$

(6) $\sum_{k=1}^{6}k(2k+1)(2k-1)=\sum_{k=1}^{6}(4k^3-k)$

$=4\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}k$

$=4\times\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-\frac{6\times7}{2}$

$=1764-21=1743$

2 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{24}$

(2) $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{46}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{46}\right)=\frac{15}{46}$

(3) $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{11^2-1}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{175}{264}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})+\cdots+(\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{79}})\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{81}-1)=4$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2})(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{4}})+(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}})+\cdots+(\sqrt{50}-\cancel{\sqrt{48}})\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{50}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

(6) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{2}{\sqrt{14}+\sqrt{16}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{14}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=2\sum_{k=1}^{14}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})$

$+\cdots+(\sqrt{15}-\cancel{\sqrt{13}})+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{14}})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{15}+\sqrt{16}=3-\sqrt{2}+\sqrt{15}$

필수 예제 01 자연수의 거듭제곱의 합 252쪽

01-1 답 (1) 2680 (2) 430

|전략| 자연수의 거듭제곱의 합과 $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k^3+1}{k+1}=\sum_{k=1}^{20}(k^2-k+1)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1$

$=\dfrac{20\times21\times41}{6}-\dfrac{20\times21}{2}+1\times20$

$=2870-210+20=2680$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}=\sum_{k=1}^{40}\frac{k+1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k+\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{40\times41}{2}+\dfrac{1}{2}\times40$

$=410+20=430$

참고 $1+2+3+\cdots+k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2}$

01-2 답 $\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

|전략| 주어진 수열의 일반항 a_n을 구한 후 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$를 구한다.

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n\times\{3+(n-1)\times2\}=2n^2+n$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=2\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}\left\{\dfrac{2(2n+1)}{3}+1\right\}$

$=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

참고 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d$

필수 예제 02 $\sum$를 여러 개 포함한 식의 계산 253쪽

02-1 답 975

|전략| $\sum$를 여러 개 포함한 식의 계산에서는 괄호 안부터 차례로 계산한다.

$\displaystyle\sum_{m=1}^{25}\left(\sum_{l=1}^{m}3\right)=\sum_{m=1}^{25}3m=3\sum_{m=1}^{25}m$

$=3\times\dfrac{25\times26}{2}=975$

02-2 답 165

|전략| $\sum$를 여러개 포함한 식의 계산에서는 괄호 안부터 차례로 계산한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{l}(2k-5)=2\sum_{k=1}^{l}k-\sum_{k=1}^{l}5$

$=2\times\dfrac{l(l+1)}{2}-5l$

$=l^2-4l$

$\therefore\displaystyle\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{l}(2k-5)\right\}=\sum_{l=1}^{10}(l^2-4l)=\sum_{l=1}^{10}l^2-4\sum_{l=1}^{10}l$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-4\times\dfrac{10\times11}{2}$

$=385-220=165$

02-3 답 182

|전략| ∑를 여러 개 포함한 식의 계산에서는 괄호 안부터 차례로 계산한다.

$$\sum_{l=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}(k+l)\right\}=\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}l\right)=\sum_{l=1}^{m}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+ln\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times m+n\times\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{mn(m+n+2)}{2}=\frac{28\times(11+2)}{2}=182$$

필수 예제 03 ∑로 표현된 수열의 합과 일반항 사이의 관계 254쪽

03-1 답 1222

|전략| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2=1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2=2n-1$ ……㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n=2n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}ka_k=\sum_{k=1}^{12}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-k)$

$=2\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{12}k$

$=2\times\frac{12\times13\times25}{6}-\frac{12\times13}{2}$

$=1300-78=1222$

03-2 답 $\frac{255}{256}$

|전략| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^2-2=2$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$ ……㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n=2^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{4^k}=\sum_{k=1}^{8}\frac{2^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$

03-3 답 1150

|전략| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2n^3$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^3=2$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^3-2(n-1)^3=6n^2-6n+2$ ……㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n^2-6n+2$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}(24k^2-12k+2)=24\sum_{k=1}^{5}k^2-12\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}2$

$=24\times\frac{5\times6\times11}{6}-12\times\frac{5\times6}{2}+2\times5$

$=1320-180+10=1150$

필수 예제 04 로그가 포함된 수열의 합 255쪽

04-1 답 −9

|전략| 주어진 식을 ∑를 사용하지 않고 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$라 하면

$a_n=a\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=2}^{10}\log_5 a_k-\sum_{k=1}^{9}\log_5 a_k$

$=(\log_5 a_2+\log_5 a_3+\log_5 a_4+\cdots+\log_5 a_{10})$

$-(\log_5 a_1+\log_5 a_2+\log_5 a_3+\cdots+\log_5 a_9)$

$=\log_5 a_{10}-\log_5 a_1=\log_5\frac{a_{10}}{a_1}$

$=\log_5\frac{a\times\left(\frac{1}{5}\right)^9}{a}=\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^9=-9$

04-2 답 60

|전략| 주어진 식을 정리한 후 로그의 성질을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{10}\log_3 a_k=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_{10}$

$=(\log_3 a_1+\log_3 a_3+\log_3 a_5+\log_3 a_7+\log_3 a_9)$

$+(\log_3 a_2+\log_3 a_4+\log_3 a_6+\log_3 a_8+\log_3 a_{10})$

$=\sum_{k=1}^{5}\log_3 a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}\log_3 a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{5}\log_3 3^{k+1}+\sum_{k=1}^{5}\underbrace{\log_3 9^{k+1}}_{\to\log_3 3^{2(k+1)}}$

$=\sum_{k=1}^{5}(k+1)+\sum_{k=1}^{5}2(k+1)$

$=3\sum_{k=1}^{5}(k+1)=3\left(\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1\right)$

$=3\times\left(\frac{5\times6}{2}+1\times5\right)=60$

04-3 답 $\log\frac{15}{28}$

|전략| 주어진 식을 $\sum$를 사용하지 않고 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

$$\sum_{k=2}^{14}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{14}\log\frac{k^2-1}{k^2}$$
$$=\sum_{k=2}^{14}\log\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{13}{14}\times\frac{15}{14}\right)$$
$$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{13}{14}\times\frac{15}{14}\right)\right\}$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{15}{14}\right)=\log\frac{15}{28}$$

필수 예제 05 분수 꼴로 주어진 수열의 합 256쪽

05-1 답 $\frac{n}{4(n+1)}$

|전략| 분수 꼴로 주어진 수열의 합은 일반항을 부분분수로 변형한 후 계산한다.

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

05-2 답 $\frac{20}{11}$

|전략| 분수 꼴로 주어진 수열의 합은 일반항을 부분분수로 변형한 후 계산한다.

수열 $1,\ \frac{1}{1+2},\ \frac{1}{1+2+3},\ \cdots,\ \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

05-3 답 $\frac{2}{15}$

|전략| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$$

(i) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n+1$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)=\frac{2}{15}$$

참고 수열의 합 S_n과 일반항 a_n 사이의 관계

$$\begin{cases}a_1=S_1\\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)\end{cases}$$

필수 예제 06 분모에 근호가 포함된 수열의 합 257쪽

06-1 답 $\frac{4}{3}$

|전략| 분모에 근호가 포함된 수열의 합은 일반항의 분모를 유리화한 후 계산한다.

$$\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{3k+3}+\sqrt{3k+6}}$$
$$=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k+6}}{(\sqrt{3k+3}+\sqrt{3k+6})(\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k+6})}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{3k+6}-\sqrt{3k+3})$$
$$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{9}-\sqrt{6})+(\sqrt{12}-\sqrt{9})+(\sqrt{15}-\sqrt{12})+\cdots+(\sqrt{150}-\sqrt{147})\}$$
$$=\frac{1}{3}(-\sqrt{6}+\sqrt{150})$$
$$=\frac{1}{3}(-\sqrt{6}+5\sqrt{6})$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{6}$$

$$\therefore\ a=\frac{4}{3}$$

06-2 답 48

| 전략 | 분모에 근호가 포함된 수열의 합은 일반항의 분모를 유리화한 후 계산한다.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$\sqrt{n+1}-1=6$에서

$\sqrt{n+1}=7$, $n+1=49$

$\therefore n=48$

06-3 답 24

| 전략 | 분모에 근호가 포함된 수열의 합은 일반항의 분모를 유리화한 후 계산한다.

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

이때 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=3$이므로

$\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=3$

$\sqrt{2n+1}=7$, $2n+1=49$

$\therefore n=24$

개념 정리 258~259쪽

01 $\sum$, n	**02** i, j	**03** 3	**04** 1
05 18	**06** 2	**07** +	**08** −
09 c	**10** cn	**11** 3, 3, 37	
12 5, 16, 7, 10, 54		**13** ㉢	**14** ㉡
15 ㉠	**16** 15, 16, 120	**17** 7, 8, 140	**18** 6, 6, 441
19 k, $k+1$	**20** $k+1$, k	**21** 3, 3, 1, 3, 27, 27, $\frac{4}{27}$	

[11~12] $\sum_{k=1}^{10}a_k=16$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=7$일 때

11 $$\sum_{k=1}^{10}(a_k+3b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\boxed{3}\sum_{k=1}^{10}b_k$$

$$=16+\boxed{3}\times 7$$

$$=16+21=\boxed{37}$$

12 $$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k+5)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-4\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}\boxed{5}$$

$$=2\times\boxed{16}-4\times\boxed{7}+5\times\boxed{10}$$

$$=32-28+50=\boxed{54}$$

21 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+\boxed{3})}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{(2k+1)(2k+\boxed{3})}$$

$$=\frac{1}{(2k+3)-(2k+1)}\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2k+\boxed{1}}-\frac{1}{2k+\boxed{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{\boxed{27}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\boxed{27}}\right)=\boxed{\frac{4}{27}}$$

중단원 마무리 260~262쪽

01 ⑤	**02** ①	**03** ②	**04** ⑤
05 ②	**06** ④	**07** ⑤	**08** ③
09 ①	**10** ③	**11** ⑤	**12** ②
13 ①	**14** ④	**15** ③	**16** ②
17 ①	**18** ③	**19** ③	**20** ④
21 7	**22** 856	**23** $\frac{20}{21}$	**24** 9

LEVEL 1

01 $$\sum_{k=1}^{21}f(k+4)-\sum_{k=5}^{25}f(k-1)$$

$$=\{f(5)+f(6)+f(7)+\cdots+f(25)\}-\{f(4)+f(5)+f(6)+\cdots+f(24)\}$$

$$=f(25)-f(4)$$

$$=53-6=47$$

02 $\sum_{k=1}^{10} 3a_k=18$에서 $3\sum_{k=1}^{10} a_k=18$이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k=6$

$\sum_{k=1}^{10} 4b_k=20$에서 $4\sum_{k=1}^{10} b_k=20$이므로 $\sum_{k=1}^{10} b_k=5$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)(b_k-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(3a_kb_k-6a_k-b_k+2)$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}a_kb_k-6\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$$
$$=3\times9-6\times6-5+2\times10=6$$

03 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}\frac{k(k+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{15}k^2+\sum_{k=1}^{15}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1240+120)=680$$

04 $\sum_{k=1}^{l}5=5l$이므로

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}5\right)=\sum_{l=1}^{m}5l=5\sum_{l=1}^{m}l$$
$$=5\times\frac{m(m+1)}{2}=\frac{5}{2}m(m+1)$$
$$\therefore \sum_{m=1}^{4}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}5\right)\right\}=\sum_{m=1}^{4}\left\{\frac{5}{2}m(m+1)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\sum_{m=1}^{4}(m^2+m)$$
$$=\frac{5}{2}\left(\sum_{m=1}^{4}m^2+\sum_{m=1}^{4}m\right)$$
$$=\frac{5}{2}\left(\frac{4\times5\times9}{6}+\frac{4\times5}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{2}(30+10)=100$$

05 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n+1}$$
$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)}\ (n\geq2)$$
$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}=-\sum_{k=2}^{10}k(k+1)=-\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-(-2)$$
$$=-\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k+2$$
$$=-\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+2$$
$$=-385-55+2=-438$$

06 $\sum_{k=2}^{8}\log_2\sqrt{\frac{k^2}{k^2-1}}$

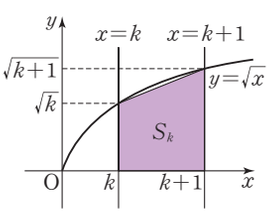
$$=\sum_{k=2}^{8}\log_2\sqrt{\frac{k}{k-1}\times\frac{k}{k+1}}$$
$$=\log_2\sqrt{\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}}+\log_2\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}}+\log_2\sqrt{\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}}$$
$$+\cdots+\log_2\sqrt{\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}}$$
$$=\log_2\left(\sqrt{\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}}\right)$$
$$=\log_2\sqrt{\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)\times\cdots\times\left(\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\right)}$$
$$=\log_2\sqrt{\frac{2}{1}\times\frac{8}{9}}=\log_2\sqrt{\frac{16}{9}}=\log_2\frac{4}{3}$$

07 $a_n={}_{n+1}C_2=\frac{(n+1)\times n}{2!}=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

조합의 수 ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\sum_{k=1}^{35}\frac{3}{a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{6}{k(k+1)}$$
$$=6\sum_{k=1}^{35}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{36}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{35}{6}$$

08 오른쪽 그림에서 네 점 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \sqrt{k})$, $(k+1, \sqrt{k+1})$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이 S_k는



$$S_k=\frac{1}{2}\times(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\times1$$
$$=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=2\sum_{k=1}^{80}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})\}$$
$$=2(\sqrt{81}-1)=16$$

LEVEL 2

09 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$$
$$=a_1-a_{n+1}=1-a_{n+1}$$

즉, $1-a_{n+1}=-n^2+5n$이므로 $a_{n+1}=n^2-5n+1$

$$\therefore a_7=a_{6+1}=6^2-5\times6+1=7$$

10 $a_n+b_n=10$에서 $a_n=10-b_n$이므로

$$\sum_{k=1}^{15}(a_k+6b_k)=\sum_{k=1}^{15}(10-b_k+6b_k)=\sum_{k=1}^{15}(5b_k+10)$$

$$=5\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}10$$

$$=5\sum_{k=1}^{15}b_k+10\times15=5\sum_{k=1}^{15}b_k+150$$

즉, $5\sum_{k=1}^{15}b_k+150=360$이므로

$5\sum_{k=1}^{15}b_k=210$ $\therefore \sum_{k=1}^{15}b_k=42$

11 $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+1)^2=116$에서 $\sum_{k=1}^{20}(4a_k{}^2+4a_k+1)=116$

$4\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}1=116$

$4\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{20}a_k+1\times20=116$

$\therefore 4\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{20}a_k=96$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{20}a_k(a_k+4)=9$에서 $\sum_{k=1}^{20}(a_k{}^2+4a_k)=9$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{20}a_k=9$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$3\sum_{k=1}^{20}a_k{}^2=87$ $\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k{}^2=29$

12 $\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\{(2n+1)-1\}=n^2(n+1)$$

즉, $n^2(n+1)=1100=10^2\times11$이므로 $n=10$

13 $\sum_{k=1}^{7}(2k-a)(k-a)$

$=\sum_{k=1}^{7}(2k^2-3ak+a^2)=2\sum_{k=1}^{7}k^2-3a\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}a^2$

$=2\times\frac{7\times8\times15}{6}-3a\times\frac{7\times8}{2}+a^2\times7$

$=7a^2-84a+280=7(a-6)^2+28$

따라서 주어진 식의 값이 최소가 되도록 하는 a의 값은 6이다.

14 $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}ij\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{m}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{j\times\frac{m(m+1)}{2}\right\}$

$$=\frac{m(m+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$$

이때 이차방정식 $x^2-12x+27=0$의 두 근이 m, n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=12$, $mn=27$

$\therefore \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}ij\right)=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$

$=\frac{27(27+12+1)}{4}=270$

15 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+(2n+1)+2\right\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n^2+5n+6}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}\times\frac{n+3}{2}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}\times\frac{n+3}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}\times f(n)$

이므로 $f(n)=\frac{n+3}{2}$

$\therefore f(11)=\frac{11+3}{2}=7$

16 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+3\times1=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ ……㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n=2n+2$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}ka_{2k-1}=\sum_{k=1}^{12}(k\times4k)=4\sum_{k=1}^{12}k^2$

$=4\times\frac{12\times13\times25}{6}=2600$

17 수열 $1\times n$, $2\times(n-1)$, $3\times(n-2)$, …, $n\times1$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k\times\{n-(k-1)\}=(n+1)k-k^2$

주어진 등식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times\{3(n+1)-(2n+1)\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=120$이므로

$n(n+1)(n+2)=720=8\times9\times10$ $\therefore n=8$

Lecture

일반항이 k, n에 대한 식인 수열의 합

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 k, n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 n은 상수임에 주의하여 수열의 합을 구한다.

18 $\sum_{k=2}^{31} \log_5 \{\log_k (k+1)\}$

$=\log_5 (\log_2 3)+\log_5 (\log_3 4)+\log_5 (\log_4 5)$
$+\cdots+\log_5 (\log_{31} 32)$

$=\log_5 (\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{31} 32)$

$=\log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log 32}{\log 31}\right)$

$=\log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 2}\right)$

$=\log_5 \left(\frac{\log 2^5}{\log 2}\right)$

$=\log_5 5=1$

참고 **로그의 밑의 변환**

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

19 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 a_n의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

즉,

$a_{2k-1}=3(2k-1)-2=6k-5$

$a_{2k+1}=3(2k+1)-2=6k+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(6k-5)(6k+1)}$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{6k-5}-\frac{1}{6k+1}\right)$

$=\frac{1}{6}\left\{\left(1-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{19}\right)\right.$
$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{85}-\frac{1}{91}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{91}\right)=\frac{15}{91}$

20 이차방정식 $x^2-(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})x-\sqrt{n^2+n}=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$

$\alpha_n\beta_n=-\sqrt{n^2+n}=-\sqrt{n(n+1)}$

이때

$(\alpha_n-\beta_n)^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$

$=(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^2-4\times\{-\sqrt{n(n+1)}\}$

$=n-2\sqrt{n(n+1)}+(n+1)+4\sqrt{n(n+1)}$

$=n+2\sqrt{n(n+1)}+(n+1)$

$=(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$

이므로

$|\alpha_n-\beta_n|=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{|\alpha_k-\beta_k|}=\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=\sqrt{16}-1=3$

서술형

21 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=4(a_4-a_3)$에서

$ar^4=4(ar^3-ar^2)$, $ar^4=4ar^2(r-1)$

$r^2=4(r-1)$, $r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2=0$ $\therefore r=2$

$a_3=12$에서 $ar^2=12$이므로 $r=2$를 대입하면

$4a=12$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times2^{n-1}$ … ❶

즉, $\sum_{k=1}^{n} a_k=381$에서 $\frac{3(2^n-1)}{2-1}=381$이므로

$2^n-1=127$, $2^n=128$

$\therefore n=7$ … ❷

채점 기준	비율
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있다.	50 %

22 다항식 $3x^2-7x+2$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 a_n이므로 나머지정리에 의하여

$a_n=3n^2-7n+2$ … ❶

$\therefore \sum_{k=1}^{12} (a_k-k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{12} (3k^2-7k+2-k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{12} (2k^2-6k+2)$

$=2\sum_{k=1}^{12} k^2-6\sum_{k=1}^{12} k+\sum_{k=1}^{12} 2$

$=2\times\frac{12\times13\times25}{6}-6\times\frac{12\times13}{2}+2\times12$

$=1300-468+24=856$ … ❷

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sum_{k=1}^{12} (a_k-k^2+k)$의 값을 구할 수 있다.	70 %

23 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^2=\sqrt{n}x$에서 $x^2-\sqrt{n}x=0$

$x(x-\sqrt{n})=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\sqrt{n}$

즉, 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 서로 다른 두 점의 좌표는

$(0, 0), (\sqrt{n}, n)$ … ❶

따라서 이 두 점 사이의 거리가 $f(n)$이므로

$\{f(n)\}^2=(\sqrt{n}-0)^2+(n-0)^2$

$=n+n^2=n(n+1)$ … ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\{f(k)\}^2}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\{f(n)\}^2$을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\{f(k)\}^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

24 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-3n$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2-3\times1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=4n-5$ ……㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-5$ … ❶

즉,

$a_k+1=4k-5+1=4k-4=4(k-1)$

$a_{k+1}+1=4(k+1)-5+1=4k$

따라서

$\sum_{k=2}^{100}\frac{2}{\sqrt{a_k+1}+\sqrt{a_{k+1}+1}}$

$=\sum_{k=2}^{100}\frac{2}{\sqrt{4(k-1)}+\sqrt{4k}}=\sum_{k=2}^{100}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=2}^{100}\frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=2}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$ … ❷

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{k=2}^{100}\frac{2}{\sqrt{a_k+1}+\sqrt{a_{k+1}+1}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

10 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의

개념 확인 264~266쪽

1 (1) 21 (2) 17 (3) 33 (4) $\frac{8}{5}$

2 (1) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=1, a_{n+1}=a_n-3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

3 (1) $a_1=2, a_{n+1}=-2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

1 (1) $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2\times1=1+2=3$

$a_3=a_2+2\times2=3+4=7$

$a_4=a_3+2\times3=7+6=13$

$\therefore a_5=a_4+2\times4=13+8=21$

(2) $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\times2-1=3$

$a_3=2a_2-1=2\times3-1=5$

$a_4=2a_3-1=2\times5-1=9$

$\therefore a_5=2a_4-1=2\times9-1=17$

(3) $a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^1=3+2=5$

$a_3=a_2+2^2=5+4=9$

$a_4=a_3+2^3=9+8=17$

$\therefore a_5=a_4+2^4=17+16=33$

(4) $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{a_1}+1=1+1=2$

$a_3=\frac{1}{a_2}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$a_4=\frac{1}{a_3}+1=\frac{1}{\frac{3}{2}}+1=\frac{5}{3}$

$\therefore a_5=\frac{1}{a_4}+1=\frac{1}{\frac{5}{3}}+1=\frac{8}{5}$

2 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 $7-2=5$인 등차수열이므로

$a_1=2, a_{n+1}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 $-2-1=-3$인 등차수열이므로

$a_1=1, a_{n+1}=a_n-3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

3 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-4}{2}=-2$인 등비수열이므로

$a_1=2, a_{n+1}=-2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

개념 드릴

267쪽

1 (1) $\frac{3}{13}$ (2) 2 (3) 437

2 (1) $a_n=3n+2$ (2) $a_n=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

(3) $a_n=6n-12$ (4) $a_n=-n-1$

3 (1) $a_n=2\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=4\times(-4)^{n-1}$

(3) $a_n=7\times2^{n-1}$ (4) $a_n=-2\times(-3)^{n-1}$

4 (1) 64 (2) 1094 (3) 28 (4) 720

1 (1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$

$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{3}{7}$

$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+1}=\frac{3}{10}$

$\therefore a_5=\frac{a_4}{a_4+1}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+1}=\frac{3}{13}$

(2) $a_{n+1}=(-1)^n a_n+5$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=(-1)^1\times a_1+5=-1\times2+5=3$

$a_3=(-1)^2\times a_2+5=1\times3+5=8$

$a_4=(-1)^3\times a_3+5=-1\times8+5=-3$

$\therefore a_5=(-1)^4\times a_4+5=1\times(-3)+5=2$

(3) $a_{n+1}=a_n^{\,2}-4$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1^{\,2}-4=(-1)^2-4=-3$

$a_3=a_2^{\,2}-4=(-3)^2-4=5$

$a_4=a_3^{\,2}-4=5^2-4=21$

$\therefore a_5=a_4^{\,2}-4=21^2-4=437$

2 (1) 주어진 수열은 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 $-\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

(3) 주어진 수열은 첫째항이 -6,

공차가 $a_2-a_1=0-(-6)=6$인 등차수열이므로

$a_n=-6+(n-1)\times6=6n-12$

(4) 주어진 수열은 첫째항이 -2,

공차가 $a_2-a_1=-3-(-2)=-1$인 등차수열이므로

$a_n=-2+(n-1)\times(-1)=-n-1$

3 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 4, 공비가 -4인 등비수열이므로

$a_n=4\times(-4)^{n-1}$

(3) 주어진 수열은 첫째항이 7,

공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{14}{7}=2$인 등비수열이므로

$a_n=7\times2^{n-1}$

(4) 주어진 수열은 첫째항이 -2,

공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{-2}=-3$인 등비수열이므로

$a_n=-2\times(-3)^{n-1}$

4 (1) $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3\times1$

$a_3=a_2+3\times2=a_1+3\times1+3\times2$

$a_4=a_3+3\times3=a_1+3\times1+3\times2+3\times3$

⋮

$\therefore a_7=a_6+3\times6$

$=a_1+3\times1+3\times2+3\times3+\cdots+3\times6$

$=a_1+3(1+2+3+\cdots+6)$

$=a_1+3\sum_{k=1}^{6}k=1+3\times\frac{6\times7}{2}=64$

(2) $a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3^1$

$a_3=a_2+3^2=a_1+3^1+3^2$

$a_4=a_3+3^3=a_1+3^1+3^2+3^3$

⋮

$\therefore a_7=a_6+3^6=a_1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^6$

$=a_1+\sum_{k=1}^{6}3^k=2+\frac{3(3^6-1)}{3-1}=1094$

(3) $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1+1}{1}a_1=2\times a_1$

$a_3=\frac{2+1}{2}a_2=\frac{3}{2}\times2\times a_1$

$a_4=\frac{3+1}{3}a_3=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times2\times a_1$

⋮

$\therefore a_7=\frac{6+1}{6}a_6=\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times2\times a_1$

$=7a_1=7\times4=28$

(4) $a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입하면

$a_2=a_1=1\times a_1$

$a_3=2a_2=2\times1\times a_1$

$a_4=3a_3=3\times2\times1\times a_1$

⋮

$\therefore a_7=6a_6=6\times\cdots\times3\times2\times1\times a_1$

$=6!\times a_1=720\times1=720$

필수 예제 01 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의 268쪽

01-1 답 13

|전략| 주어진 수열이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -2이므로 공차를 d라 하면

$a_4=13$에서 $-2+3d=13$

$3d=15$ $\therefore d=5$

$\therefore a_n=-2+(n-1)\times5=5n-7$

이때 $a_k=58$이므로

$5k-7=58$, $5k=65$ $\therefore k=13$

01-2 답 57

|전략| 주어진 수열이 등비수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 a_{30}의 값을 구한다.

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{4}$이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{30}=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{29}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{58}=\frac{1}{2^{57}}$

따라서 $a_{30}=\frac{1}{2^k}$이므로 $k=57$

01-3 답 $4(3^{10}-1)$

|전략| 로그의 성질을 이용하여 주어진 수열이 등비수열임을 안다.

$2\log a_{n+1}=\log a_n+\log a_{n+2}$에서 $\log {a_{n+1}}^2=\log a_n a_{n+2}$

즉, ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 8, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{24}{8}=3$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{8(3^{10}-1)}{3-1}=4(3^{10}-1)$

필수 예제 02 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴로 정의된 수열 269쪽

02-1 답 528

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=a_n+2n^2-n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2\times1^2-1$

$a_3=a_2+2\times2^2-2$

$=a_1+(2\times1^2-1)+(2\times2^2-2)$

$a_4=a_3+2\times3^2-3$

$=a_1+(2\times1^2-1)+(2\times2^2-2)+(2\times3^2-3)$

⋮

$\therefore a_{10}=a_9+(2\times9^2-9)$

$=a_1+(2\times1^2-1)+(2\times2^2-2)+(2\times3^2-3)$

$+\cdots+(2\times9^2-9)$

$=a_1+2(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)-(1+2+3+\cdots+9)$

$=a_1+2\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k=3+2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}$

$=3+570-45=528$

참고 **자연수의 거듭제곱의 합**

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

02-2 답 10

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^1$

$a_3=a_2+2^2=a_1+2^1+2^2$

$a_4=a_3+2^3=a_1+2^1+2^2+2^3$

⋮

$\therefore a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$

$=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$

이때 $a_k=1027$이므로

$2^k+3=1027$, $2^k=1024=2^{10}$ $\therefore k=10$

참고 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

02-3 답 $\frac{49}{25}$

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 24를 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$에서 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 24를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

⋮

$\therefore a_{25}=a_{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{25}$

$=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)$

$=a_1+1-\frac{1}{25}=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$

필수 예제 03 $a_{n+1}=a_n f(n)$ 꼴로 정의된 수열 270쪽

03-1 답 5

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …, 22를 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 22를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{3}{1}\times a_1$

$a_3=\frac{5}{3}\times a_2=\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times a_1$

$a_4=\frac{7}{5}\times a_3=\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times a_1$

⋮

$\therefore a_{23}=\frac{45}{43}\times a_{22}=\frac{45}{43}\times\cdots\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times a_1$

$=45\times a_1=45\times\frac{1}{9}=5$

03-2 답 $\frac{\sqrt{30}}{60}$

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$\sqrt{n+2}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}a_n$

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\times a_1$

$a_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times a_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\times a_1$

$a_4=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times a_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\times a_1$

⋮

$\therefore a_{15}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{16}}\times a_{14}$

$=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{16}}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\times a_1$

$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{1}}{\sqrt{16}\times\sqrt{15}}\times a_1=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{15}}\times 1=\frac{\sqrt{30}}{60}$

03-3 답 36

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …, 8을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=3^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 8을 차례로 대입하면

$a_2=3^1\times a_1$

$a_3=3^2\times a_2=3^2\times 3^1\times a_1$

$a_4=3^3\times a_3=3^3\times 3^2\times 3^1\times a_1$

⋮

$a_9=3^8\times a_8=3^8\times\cdots\times 3^3\times 3^2\times 3^1\times a_1$

$=3^{1+2+3+\cdots+8}\times a_1=3^{\frac{8\times 9}{2}}\times 1=3^{36}$

$\therefore \log_3 a_9=\log_3 3^{36}=36$

참고 $1+2+3+\cdots+8=\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\times 9}{2}$

필수 예제 04 여러 가지 수열의 귀납적 정의 271쪽

04-1 답 66

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입한다.

$a_{n+1}=-2a_n+6$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$a_2=-2a_1+6=-2\times 3+6=0$

$a_3=-2a_2+6=-2\times 0+6=6$

$a_4=-2a_3+6=-2\times 6+6=-6$

$a_5=-2a_4+6=-2\times(-6)+6=18$

$a_6=-2a_5+6=-2\times 18+6=-30$

$\therefore a_7=-2a_6+6=-2\times(-30)+6=66$

04-2 답 6

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{2\times 1+1}=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{5}$

$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}+1}=\frac{1}{7}$

$a_5=\frac{a_4}{2a_4+1}=\frac{\frac{1}{7}}{2\times\frac{1}{7}+1}=\frac{1}{9}$

$a_6=\frac{a_5}{2a_5+1}=\frac{\frac{1}{9}}{2\times\frac{1}{9}+1}=\frac{1}{11}$

따라서 $a_k=\frac{1}{11}$을 만족시키는 k의 값은 6이다.

04-3 답 30

|전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$a_1=2$이므로 $a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{2}{2}=1$

$a_2=1$이므로 $a_3=\frac{a_2+3}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

$a_3=2$이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2}{2}=1$

$a_4=1$이므로 $a_5=\frac{a_4+3}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

$a_5=2$이므로 $a_6=\frac{a_5}{2}=\frac{2}{2}=1$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=2+1+2+1+\cdots+2+1$

$=10\times(2+1)=30$

필수 예제 05 수열의 합 S_n이 포함된 수열의 귀납적 정의 272쪽

05-1 답 15

|전략| $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$임을 이용한다.

$S_n=2a_n-n$에서 $S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)$이므로

$S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}-(n+1)\}-(2a_n-n)=2a_{n+1}-2a_n-1$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-1$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$

$\therefore\ a_4=2a_3+1=2\times7+1=15$

05-2 답 $\left(\frac{1}{6}\right)^{14}$

|전략| $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$임을 이용한다.

$S_n=-\frac{1}{5}a_n+\frac{6}{5}$에서 $S_{n+1}=-\frac{1}{5}a_{n+1}+\frac{6}{5}$이므로

$S_{n+1}-S_n=\left(-\frac{1}{5}a_{n+1}+\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{1}{5}a_n+\frac{6}{5}\right)=-\frac{1}{5}a_{n+1}+\frac{1}{5}a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_{n+1}+\frac{1}{5}a_n$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{6}$인 등비수열이므로

$a_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{15}=\left(\frac{1}{6}\right)^{14}$

05-3 답 81

|전략| $S_{n+1}=3S_n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입한다.

$S_1=a_1=1$

$S_{n+1}=3S_n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$S_2=3S_1+1=3\times1+1=4$

$S_3=3S_2+1=3\times4+1=13$

$S_4=3S_3+1=3\times13+1=40$

$S_5=3S_4+1=3\times40+1=121$

$\therefore\ a_5=S_5-S_4=121-40=81$

다른 풀이 $S_{n+1}=3S_n+1$에서 $S_n=3S_{n-1}+1$이므로

$S_{n+1}-S_n=3(S_n-S_{n-1})\ (n=2, 3, 4, \cdots)$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$a_{n+1}=3a_n\ (n=2, 3, 4, \cdots)$

$S_{n+1}=3S_n+1$의 n에 1을 대입하면

$S_2=3S_1+1=3a_1+1=4$

즉, $a_1+a_2=4$이므로 $a_2=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$ $\therefore\ a_5=3^4=81$

필수 예제 06 수열의 귀납적 정의의 활용 273쪽

06-1 답 (1) $a_1=24$, $a_{n+1}=2a_n-6\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 150

|전략| 주어진 조건을 이용하여 a_1의 값과 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

(1) 1시간이 지날 때마다 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열하므로 $a_1=(15-3)\times2=24$

$(n+1)$시간 후의 박테리아 수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=(a_n-3)\times2=2a_n-6\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_{n+1}=2a_n-6$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-6=2\times24-6=42$

$a_3=2a_2-6=2\times42-6=78$

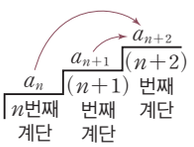
$\therefore\ a_4=2a_3-6=2\times78-6=150$

06-2 답 8

|전략| $(n+2)$번째 계단을 올라가는 방법은 n번째 계단에서 두 계단을 올라가는 방법과 $(n+1)$번째 계단에서 한 계단을 올라가는 방법이 있음을 이용한다.

첫 번째 계단을 오르는 방법은 1가지이고, 두 번째 계단을 오르는 방법은 2가지이므로 $a_1=1$, $a_2=2$

오른쪽 그림과 같이 $(n+2)$번째 계단을 올라가는 방법은 n번째 계단에서 두 계단을 올라가는 방법과 $(n+1)$번째 계단에서 한 계단을 올라가는 방법이 있다.



$\therefore\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$, $a_4=a_3+a_2=3+2=5$

$\therefore\ a_5=a_4+a_3=5+3=8$

2 수학적 귀납법

개념 확인 274쪽

1 ㄱ, ㄷ

1 ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(3)$도 참이고, $p(3)$이 참이면 $p(9)$도 참이다. 또, $p(9)$가 참이면 $p(27)$도 참이다. (참)

ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(6)$도 참이고, $p(6)$이 참이면 $p(18)$도 참이다. 또, $p(18)$이 참이면 $p(54)$도 참이다.
그런데 $p(48)$이 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $p(4)$가 참이면 $p(12)$도 참이고, $p(12)$가 참이면 $p(36)$도 참이다. 또, $p(36)$이 참이면 $p(108)$도 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념 드릴 275쪽

1 (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (나) $\frac{k+1}{k+2}$

2 (가) 1 (나) $\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$

3 (가) $1+h$ (나) kh^2 **4** (가) $k+1$ (나) 2^{k+1}

1 (i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$, $(\text{우변})=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

위 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\text{(가)}\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\text{(가)}\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{\text{(나)}\ \frac{k+1}{k+2}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2 (i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=\boxed{\text{(가)}\ 1}$, $(\text{우변})=\frac{1\times 2}{2}=\boxed{\text{(가)}\ 1}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$$

위 식의 양변에 $3k+1$을 더하면

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)$$

$$=\frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)=\frac{3k^2+5k+2}{2}$$

$$=\boxed{\text{(나)}\ \frac{(k+1)(3k+2)}{2}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

3 (i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2$, $(\text{우변})=1+2h$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}\ 1+h}$를 곱하면

$(1+h)^k(\boxed{\text{(가)}\ 1+h})>(1+kh)(\boxed{\text{(가)}\ 1+h})$

$$=1+(k+1)h+\boxed{\text{(나)}\ kh^2}$$

이때 $\boxed{\text{(나)}\ kh^2}>0$이므로

$1+(k+1)h+\boxed{\text{(나)}\ kh^2}>1+(k+1)h$

$\therefore\ (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

4 (i) $n=4$일 때,

$(\text{좌변})=1\times 2\times 3\times 4=24$, $(\text{우변})=2^4=16$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times 2\times 3\times\cdots\times k>2^k$

위 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}\ k+1}$을 곱하면

$1\times 2\times 3\times\cdots\times k\times(\boxed{\text{(가)}\ k+1})>2^k\times(\boxed{\text{(가)}\ k+1})$

이때 $k\geq 4$에서 $\boxed{\text{(가)}\ k+1}>2$이므로

$2^k\times(\boxed{\text{(가)}\ k+1})>2^k\times 2$

$\therefore\ 1\times 2\times 3\times\cdots\times k\times(\boxed{\text{(가)}\ k+1})>\boxed{\text{(나)}\ 2^{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

필수 예제 01 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명 276쪽

01-1 풀이 참조

|전략| 주어진 등식이 $n=1$일 때 성립함을 보인 후 $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

(i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=1\times 2=2$, $(\text{우변})=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

위 식의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

01-2 풀이 참조

|전략| 주어진 등식이 $n=1$일 때 성립함을 보인 후 $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

(i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=1$, $(\text{우변})=2^1-1=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

위 식의 양변에 2^k을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2\times 2^k-1$$

$$=2^{k+1}-1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

필수 예제 02 수학적 귀납법을 이용한 부등식의 증명 277쪽

02-1 풀이 참조

|전략| 주어진 부등식이 $n=5$일 때 성립함을 보인 후 $n=k\,(k\geq5)$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

(i) $n=5$일 때,

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

위 식의 양변에 2를 곱하면

$2^k\times2>k^2\times2$

이때 $k\geq5$인 모든 자연수 k에 대하여

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1$

$=(k-1)^2-2>0$

이므로 $2k^2>(k+1)^2$

$\therefore\ 2^{k+1}>(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

02-2 풀이 참조

|전략| 주어진 부등식이 $n=2$일 때 성립함을 보인 후 $n=k\,(k\geq2)$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, (우변)$=\sqrt{2}$이고,

$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}>0$

즉, $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

위 식의 양변에 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

이때 $k\geq2$인 모든 자연수 k에 대하여

$\left(\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\sqrt{k+1}=\dfrac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}>0$

이므로 $\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

$\therefore\ 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

개념 정리 278~279쪽

01 귀납적 **02** d **03** r **04** $f(n-1)$
05 $f(n-1)$ **06** 7, 7, 7, 5, 8, 61
07 $k+1$, 귀납법 **08** m, $k+1$
09 1, 4, $k+2$, $k+2$

06 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2\times1$

$a_3=a_2+2\times2=a_1+2\times1+2\times2$

$a_4=a_3+2\times3=a_1+2\times1+2\times2+2\times3$

⋮

$\therefore\ a_8=a_7+2\times\boxed{7}$

$=a_1+2\times1+2\times2+2\times3+\cdots+2\times\boxed{7}$

$=a_1+2(1+2+3+\cdots+\boxed{7})$

$=a_1+2\sum_{k=1}^{7}k$

$=\boxed{5}+2\times\dfrac{7\times\boxed{8}}{2}=\boxed{61}$

09 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\dfrac{1\times2}{2}\right)^2=\boxed{1}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

위의 식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$

$=\dfrac{(k+1)^2\{k^2+\boxed{4}(k+1)\}}{4}$

$=\dfrac{(k+1)^2(\boxed{k+2})^2}{4}=\left\{\dfrac{(k+1)(\boxed{k+2})}{2}\right\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

중단원 마무리 280~282쪽

01 ③ **02** ④ **03** ⑤ **04** ②
05 $\dfrac{32}{5}$ **06** ③ **07** ② **08** ③
09 ① **10** ② **11** ⑤ **12** ③
13 $\dfrac{1}{210}$ **14** ④ **15** ⑤ **16** ②
17 -92 **18** 27 **19** 82 **20** 풀이 참조

LEVEL 1

01 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
이때 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1,
공차가 $a_2-a_1=4-1=3$이므로
$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$
따라서 $a_4=3\times 4-2=10$, $a_7=3\times 7-2=19$이므로
$a_4+a_7=10+19=29$

02 $a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
이때 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공비가 2이므로
$a_3=2$에서
$a\times 2^2=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$
$\therefore a_{10}=\frac{1}{2}\times 2^9=2^8=256$

03 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$에서
$a_{n+1}=a_n+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$
$=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면
$a_2=a_1+\sqrt{2}-\sqrt{1}$
$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
⋮
$\therefore a_n=a_{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$
$=a_1+(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$
$+\cdots+(\sqrt{n}-\cancel{\sqrt{n-1}})$
$=a_1+\sqrt{n}-1$
$=6+\sqrt{n}-1=\sqrt{n}+5$
이때 $a_k=17$에서
$\sqrt{k}+5=17$, $\sqrt{k}=12 \qquad \therefore k=144$

04 $S_n=3a_n-\frac{2}{3}$에서 $S_{n+1}=3a_{n+1}-\frac{2}{3}$이므로
$S_{n+1}-S_n=\left(3a_{n+1}-\frac{2}{3}\right)-\left(3a_n-\frac{2}{3}\right)=3a_{n+1}-3a_n$
이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로
$a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로
$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right\}$
$=\frac{2}{3}\times\frac{211}{32}=\frac{211}{48}$
따라서 $p=48$, $q=211$이므로
$p+q=48+211=259$

05 농도가 10 %인 소금물 320 g에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{10}{100}\times 320=32$ (g)
1회 시행 후 소금물 400 g의 농도는
$\frac{32}{400}\times 100=8$ (%) $\qquad \therefore a_1=8$
농도가 a_n %인 소금물 320 g에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{a_n}{100}\times 320=\frac{16}{5}a_n$ (g)
이때 물 80 g을 넣은 소금물 400 g의 농도는 a_{n+1} %이므로
$a_{n+1}=\frac{\frac{16}{5}a_n}{400}\times 100=\frac{4}{5}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
따라서 $p=8$, $q=\frac{4}{5}$이므로
$pq=8\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$

06 (i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1$, (우변)$=(1-1)\times 2^1+1=1$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+k\times 2^{k-1}=(k-1)\times 2^k+1$
위 식의 양변에 $\boxed{\text{(가) } (k+1)\times 2^k}$을 더하면
$1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+k\times 2^{k-1}+\boxed{\text{(가) } (k+1)\times 2^k}$
$=(k-1)\times 2^k+1+\boxed{\text{(가) } (k+1)\times 2^k}$
$=2k\times 2^k+1$
$=\boxed{\text{(나) } k\times 2^{k+1}+1}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

LEVEL 2

07 이차방정식 $x^2-2\sqrt{a_n}x+a_{n+1}-5=0$의 판별식을 D라 하면
이 이차방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4}=(-\sqrt{a_n})^2-(a_{n+1}-5)=0$
$a_n-a_{n+1}+5=0 \qquad \therefore a_{n+1}-a_n=5$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 5인 등차수열이므로
$a_n=2+(n-1)\times 5=5n-3$
$\therefore a_{16}=5\times 16-3=77$

08 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_7}{a_4}+\frac{a_9}{a_6}=6$에서
$\frac{ar^3}{a}+\frac{ar^6}{ar^3}+\frac{ar^8}{ar^5}=6$, $3r^3=6 \qquad \therefore r^3=2$
$\therefore \frac{a_{17}}{a_8}=\frac{ar^{16}}{ar^7}=r^9=(r^3)^3=2^3=8$

09 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, …, 29를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$

⋮

$\therefore a_{30}=a_{29}+f(29)$

$=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(29)$

$=a_1+\sum_{k=1}^{29}f(k)$

$=4+29^2-5=29^2-1$

10 $a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1=2\times1$

$a_3=3a_2=3\times2\times1$

$a_4=4a_3=4\times3\times2\times1=3\times2^3$

$a_5=5a_4=5\times4\times3\times2\times1=5\times3\times2^3$

$a_6=6a_5=6\times5\times4\times3\times2\times1=5\times3^2\times2^4$

⋮

따라서 a_n이 16의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

11 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2^n$에서

$a_{n+1}=-(-1)^n a_n+2^n=(-1)^{n+1}a_n+2^n$

$a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=(-1)^2\times a_1+2^1=1\times3+2=5$

$a_3=(-1)^3\times a_2+2^2=-1\times5+4=-1$

$a_4=(-1)^4\times a_3+2^3=1\times(-1)+8=7$

$\therefore a_5=(-1)^5\times a_4+2^4=-1\times7+16=9$

12 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=21$에서 $a_{n+2}=-a_n-a_{n+1}+21$

$a_{n+2}=-a_n-a_{n+1}+21$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_3=-a_1-a_2+21=-6-7+21=8$

$a_4=-a_2-a_3+21=-7-8+21=6$

$a_5=-a_3-a_4+21=-8-6+21=7$

$a_6=-a_4-a_5+21=-6-7+21=8$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 6, 7, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때 $48=3\times16$, $49=3\times16+1$이므로

$a_{48}=a_3=8$, $a_{49}=a_1=6$

$\therefore a_{48}+a_{49}=8+6=14$

13 $S_n=n^2a_n$에서 $S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}$이므로

$S_{n+1}-S_n=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$

$(n^2+2n)a_{n+1}=n^2a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{3}\times a_1$

$a_3=\frac{2}{4}\times a_2=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times a_1$

$a_4=\frac{3}{5}\times a_3=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times a_1$

⋮

$\therefore a_{20}=\frac{19}{21}\times a_{19}$

$=\frac{19}{21}\times\frac{18}{20}\times\cdots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times a_1$

$=\frac{2\times1}{21\times20}\times1=\frac{1}{210}$

14 교점의 개수가 최대가 되려면 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않아야 한다.

이와 같은 방법으로 n개의 직선에 $(n+1)$번째 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n개의 새로운 교점이 생긴다.

즉, $(n+1)$개의 직선에 의하여 생기는 교점의 개수는 n개의 직선에 의하여 생기는 교점의 개수보다 n개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이때 $a_3=3$이므로 $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$a_4=a_3+3=3+3=6$

$a_5=a_4+4=6+4=10$

$a_6=a_5+5=10+5=15$

$\therefore a_7=a_6+6=15+6=21$

15 주어진 그림에서

$a_1=1$

$a_2=a_1+2^2=1^2+2^2$

$a_3=a_2+3^2=1^2+2^2+3^2$

$a_4=a_3+4^2=1^2+2^2+3^2+4^2$

⋮

$\therefore a_{10}=a_9+10^2$

$=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

16 (i) $n=1$일 때,

$3^2-1=8$이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $3^{2n}-1$이 8의 배수라 가정하면

$3^{2k}-1=8m$ (m은 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 이때

$3^{2(k+1)}-1=\boxed{(가)\ 9}\times3^{2k}-1=(8+1)\times3^{2k}-1$

$=8\times3^{2k}+\boxed{(나)\ 3^{2k}-1}=8\times3^{2k}+8m$

$=8(3^{2k}+m)$

이므로 $3^{2(k+1)}-1$도 8의 배수이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

즉, $a=9$, $f(k)=3^{2k}-1$이므로

$a+f(2)=9+3^4-1=89$

서술형

17 $a_{n+1}=a_n+3$에서 $a_{n+1}-a_n=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -22, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=-22+(n-1)\times 3=3n-25$ … ❶

이때 $a_n=3n-25<0$에서 $n<\frac{25}{3}=8.3\cdots$

수열 $\{a_n\}$은 제8항까지는 음수이고 제9항부터는 양수이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k$는 $n=8$일 때 최솟값을 갖는다. … ❷

따라서 구하는 최솟값은

$$\sum_{k=1}^{8} a_k=\sum_{k=1}^{8}(3k-25)=3\sum_{k=1}^{8}k-\sum_{k=1}^{8}25$$
$$=3\times\frac{8\times 9}{2}-25\times 8$$
$$=108-200=-92$$ … ❸

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sum_{k=1}^{n} a_k$가 최솟값을 가질 때의 n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -22, 공차가 3인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{8} a_k=\frac{8\{2\times(-22)+(8-1)\times 3\}}{2}=-92$

18 $a_{n+1}=\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}a_n$에서

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_n=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}a_n$ … ❶

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times a_1$

$a_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times a_2=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times a_1=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times a_1$

$a_4=\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}\times a_3=\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times a_1=\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}\times a_1$

⋮

$\therefore a_n=\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times a_{n-1}=\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{2}\times a_1$ … ❷

이때 $a_k=\frac{28}{9}$이므로

$\frac{k+1}{k}\times\frac{1}{2}\times a_1=\frac{28}{9}$, $\frac{k+1}{k}\times\frac{1}{2}\times 6=\frac{28}{9}$

$\frac{k+1}{k}=\frac{28}{27}$ $\therefore k=27$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	20 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 $a_1=1$이므로 $a_2=a_1-4=1-4=-3$

$a_2=-3$이므로 $a_3={a_2}^2=(-3)^2=9$

$a_3=9$이므로 $a_4=a_3-4=9-4=5$

$a_4=5$이므로 $a_5=a_4-4=5-4=1$

⋮ … ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, -3, 9, 5가 이 순서대로 반복된다. … ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k=7\times\{1+(-3)+9+5\}+1+(-3)=82$ … ❸

채점 기준	비율
❶ a_2, a_3, a_4, a_5, …의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾을 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

20 (i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다. … ❶

(ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ … ❷

위 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

이때 $k\geq 2$인 모든 자연수 k에 대하여

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{-(k+1)^2+k(k+1)+k}{k(k+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{(k+1)^2}<0$$

이므로 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. … ❸

채점 기준	비율
❶ $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	20 %
❷ $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정할 수 있다.	20 %
❸ $n=k+1$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	60 %

Memo

Memo