



정답과 해설

확률과 통계



1 순열과 조합

특강 확인 문제

p. 11

1

- (1) 카드에 적힌 수가 2의 배수인 경우는
 2, 4, 6, ..., 30의 15가지
 카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우는
 3, 6, 9, ..., 30의 10가지
 카드에 적힌 수가 2의 배수인 동시에 3의 배수인 경우는
 6의 배수인 경우이므로
 6, 12, 18, 24, 30의 5가지
 따라서 구하는 경우의 수는
 $15 + 10 - 5 = 20$
- (2) (i) $z=0$ 일 때, $x+y=7$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2),$
 $(6, 1), (7, 0)$ 의 8가지
 (ii) $z=1$ 일 때, $x+y=4$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$ 의 5가지
 (iii) $z=2$ 일 때, $x+y=1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 1), (1, 0)$ 의 2가지
 (i)~(iii)에서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $8 + 5 + 2 = 15$

답 (1) 20 (2) 15

2

- (1) $(a+b)^2(p+q)(x+y)$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(p+q)(x+y)$
 이므로 $a^2, 2ab, b^2$ 의 3가지 중 어느 하나를 택하면 그
 각각에 대하여 p, q 의 2가지 중 하나를 택할 수 있고,
 또 그 각각에 대하여 x, y 의 2가지 중 하나를 택할 수
 있다.
 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 곱의 법칙에 의
 하여
 $3 \times 2 \times 2 = 12$
- (2) 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지
 따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
 $5 \times 4 \times 4 = 80$

답 (1) 12 (2) 80

3

- (1) 모음은 u, i이므로 모음을 한 묶음으로 생각하여 4개
 의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $4! = 24$
 그 각각에 대하여 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수
 는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2 = 48$
- (2) 여학생 4명 중 2명을 뽑아 양 끝에 세우는 경우의 수는
 ${}_4P_2 = 12$
 양 끝의 여학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세
 우는 경우의 수는
 $4! = 24$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $12 \times 24 = 288$

답 (1) 48 (2) 288

4

- (1) 빵 3종류 중에서 2종류를 선택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
 아이스크림 6종류 중에서 3종류를 선택하는 경우의
 수는
 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $3 \times 20 = 60$
- (2) B, C를 먼저 뽑고, A를 제외한 나머지 5명 중에서 2
 명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

답 (1) 60 (2) 10

확인 문제

p. 13~33

01

- (1) A, B, C의 세 민박집에 다섯 사람이 투숙할 때, 한 사
 람이 여러 민박집에서 투숙할 수는 없지만 여러 명이
 한 민박집을 중복하여 선택해서 투숙할 수는 있다.
 따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 세 민박집 중에
 서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

(2) A, B, C의 세 개의 우체통에 네 통의 편지를 넣을 때,
한 통의 편지를 여러 우체통에 넣을 수는 없지만 여러
통의 편지를 한 우체통에 중복하여 넣을 수는 있다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 우체통
중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

답 (1) 243 (2) 81

02

7명의 동아리 각 부원은 2명의 후보 중에서 1명을 택해
야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 2명의 후보 중에서 7명을 택
하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_7 = 2^7 = 128$$

답 128

03

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1, 2, 3, 4의 4개의 숫
자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하면
되므로 구하는 자연수의 개수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

답 64

04

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2가지
이 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는
1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개
를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

답 250

05

(1)(i) 한 자리 자연수의 개수는 5

(ii) 두 자리 자연수의 개수

십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 십의 자리에 올
수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

이 각각에 대하여 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가
올 수 있으므로 6가지

$$\therefore 5 \times 6 = 30$$

(iii) 세 자리 자연수의 개수

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올
수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

이 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1,
2, 3, 4, 5의 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2
개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6\Pi_2 = 6^2 = 36$$

$$\therefore 5 \times 36 = 180$$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$5 + 30 + 180 = 215$$

(2) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수
있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3가지

이 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3,
4, 5의 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑
아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6\Pi_2 = 6^2 = 36$$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$$5 \times 3 \times 36 = 540$$

답 (1) 215 (2) 540

06

2100보다 작은 수는 20□□, 1□□□ 꼴이다.

(i) 20□□ 꼴의 자연수의 개수는 4개의 숫자에서 2개를
택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

(ii) 1□□□ 꼴의 자연수의 개수는 4개의 숫자에서 3개
를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$16 + 64 = 80$$

답 80

07

2000보다 큰 수는 2□□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다.
2□□□, 3□□□, 4□□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각
5개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$3 \times {}_5\Pi_3 = 3 \times 5^3 = 375$$

이때 2000보다 큰 자연수이므로 2000은 제외된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$375 - 1 = 374$$

답 374

08

20000보다 큰 수는 $2\Box\Box\Box\Box$, $3\Box\Box\Box\Box$ 꼴이다.
천의 자리, 백의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자가
올 수 있으므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

이 각각에 대하여 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의
합이 5보다 작은 경우는 00, 01, 02, 03, 10, 11, 12,
13, 20, 21, 22, 30, 31의 13가지

즉 $2\Box\Box\Box\Box$, $3\Box\Box\Box\Box$ 꼴의 자연수의 개수는

$$2 \times 16 \times 13 = 416$$

이때 20000보다 큰 자연수이므로 20000은 제외된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$416 - 1 = 415$$

답 415

09

흰색, 빨간색의 두 깃발 중에서 중복을 허용하여 깃발을
4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

답 16

10

두 기호 $\cdot$, $-$ 중에서 중복을 허용하여 택한 n 개의 기호
를 사용해 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n = 2^n$$

이때 신호의 개수가 100 이상이므로

$$2^n \geq 100 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

답 7

11

(1) X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 $a, b, c,$
 d, e 의 5개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 집합
 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 중복순열의 수와
같으므로 ${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$

(2) X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수는 집합 Y 의 원소 $a,$
 b, c, d, e 의 5개 중에서 서로 다른 4개를 택해 집합 X
의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 순열의 수와 같으므로
 ${}_5P_4 = 120$

답 (1) 625 (2) 120

12

(1) X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 1, 2,

3, 4, 5의 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 집
합 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 중복순열의 수와
같으므로 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

$$(2) f(1) = 1$$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4를 제외한 1, 2, 3, 5의
4가지

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$5 \times 4 = 20$$

답 (1) 125 (2) 20

13

10개의 문자 중 S가 3개, T가 3개, I가 2개이므로 구하
는 경우의 수는

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!} = 50400$$

답 50400

14

(1) 맨 앞에 올 수 있는 문자는 모음 U, E 중 하나이므로
그 경우의 수는 2

맨 앞에 모음 중 하나가 오면 남은 문자는 U, E 중 1
개와 S, S, S, C, C의 5개이므로 6개를 일렬로 나열하
는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 60 = 120$$

(2) C와 C 사이에 들어갈 수 있는 문자는 S, U, E, S, S
중 하나이다.

(i) C와 C 사이에 S가 들어가는 경우

나머지 문자는 U, E, S, S의 4개이므로 CSC를 하
나의 문자로 생각하고 CSC, U, E, S, S의 5개를
일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(ii) C와 C 사이에 U, E 중 하나가 들어가는 경우

C와 C 사이에 U, E 중 하나가 들어가는 경우의 수
는 2

C와 C 사이에 U, E 중 하나가 들어가면 나머지 문
자는 U, E 중 1개와 S, S, S의 4개이다.

이때 C□C를 하나의 문자로 생각하면 C□C와 U,
E 중 1개와 S, S, S의 5개를 일렬로 나열하면 되므

로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

즉 C와 C 사이에 U, E 중 하나가 들어가는 경우의 수는

$$2 \times 20 = 40$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 40 = 100$$

답 (1) 120 (2) 100

15

(1) 6개의 숫자 중 2가 3개, 3이 3개이므로 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

(2) 2, 2, 2, 3, 3, 3 중에서 5개를 택하는 방법은 (2, 2, 2, 3, 3), (2, 2, 3, 3, 3)의 2가지이다.

(i) (2, 2, 2, 3, 3)을 택하는 경우

2가 3개, 3이 2개이므로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

(ii) (2, 2, 3, 3, 3)을 택하는 경우

2가 2개, 3이 3개이므로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$10 + 10 = 20$$

답 (1) 20 (2) 20

16

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 다섯 자리에 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같다. 이때 5개의 숫자 중 1이 3개, 2가 2개이므로

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 다섯 자리에 0, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 1이 3개이므로

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

이 중에서 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 0을 제

외한 나머지 4개의 숫자 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 이때 4개의 숫자 중 1이 3개이므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

즉 만들 수 있는 짝수의 개수는

$$20 - 4 = 16$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$10 + 16 = 26$$

답 26

17

모음 i, e의 순서가 알파벳순으로 정해져 있으므로 i, e를 모두 같은 문자 A로 생각하면 8개의 문자 A, A, k, n, d, n, s, s를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 A를 각각 e, i로 바꾸면 된다.

이때 8개의 문자 중 A가 2개, n이 2개, s가 2개이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$$

답 5040

18

짝수 2, 4의 순서가 작은 순으로 정해져 있으므로 2, 4를 모두 같은 문자 A로 생각하고, 홀수 1, 3, 5의 순서가 큰 순으로 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 같은 문자 B로 생각하자.

5개의 문자 A, A, B, B, B를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 A를 각각 2, 4로 바꾸고, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 B를 각각 5, 3, 1로 바꾸면 된다.

이때 5개의 문자 중 A가 2개, B가 3개이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

답 10

19

3개의 모음 a, i, e 중 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

중간에 6개의 자음 h, p, p, n, s, s와 나머지 1개의 모음을 포함하여 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 p가 2개, s가 2개이므로

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 1260 = 7560$$

답 7560

20

도로망에서 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하자.

(1) A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, a, b, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

(2) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

즉 A 지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점까지
최단 거리로 가는 경우의 수는

$$10 \times 3 = 30$$

따라서 A 지점에서 출발하여 P 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$56 - 30 = 26$$

답 (1) 56 (2) 26

21

도로망에서 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하고, 오른쪽 그림과 같이 P 지점을 잡으면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는

$$A \rightarrow P \rightarrow B$$

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으

므로

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

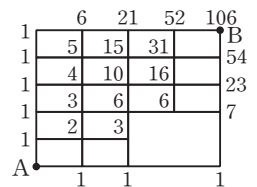
(i), (ii)에서 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$20 \times 10 = 200$$

답 200

22

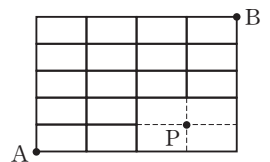
오른쪽 그림과 같이 합의 법칙을 이용하면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 106이다.



답 106

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고, 그 교차점을 P라 하자. 점선 길까지 포함하여 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$$\frac{9!}{4! \times 5!} = 126$$

A 지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

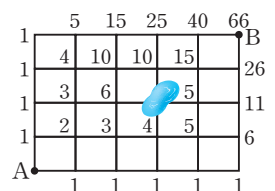
$$\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{4!} = 4 \times 5 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 - 20 = 106$$

23

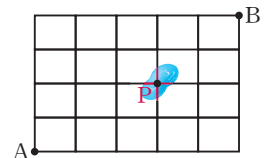
오른쪽 그림과 같이 합의 법칙을 이용하면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 66이다.



답 66

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 선으로 연결하고, 그 교차점을 P라 하자. 새로 연결한 길을 포함하여 A 지점에서 출발하여 B 지



점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

A 지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 10 \times 6 = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 - 60 = 66$$

24

서로 다른 4종류의 피자 중에서 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

답 56

25

사과, 오렌지, 배 중에서 7개를 사는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

답 36

26

빨강, 파랑, 초록 볼펜 중에서 8자루를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

답 45

27

빈 상자가 없어야 하므로 3개의 상자에 초콜릿을 각각 하나씩 먼저 담은 후 남은 7개의 초콜릿을 서로 다른 3개의 상자에 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

답 36

28

딸기맛 우유, 커피맛 우유, 바나나맛 우유를 각각 하나씩 먼저 산 후 남은 딸기맛 우유, 커피맛 우유, 바나나맛 우유 중에서 중복을 허용하여 2개 이상 4개 이하를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4 &= {}_{3+2-1}C_2 + {}_{3+3-1}C_3 + {}_{3+4-1}C_4 \\ &= {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 \\ &= 6 + 10 + 15 = 31 \end{aligned}$$

답 31

29

초콜릿 쿠키 3개, 버터 쿠키 4개를 먼저 산 후 나머지 5개의 쿠키를 사는 경우의 수는

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 땅콩 쿠키는 3개 이하를 사야 하므로 ①에서 땅콩 쿠키를 4개, 5개 사는 경우의 수를 빼면 된다.

땅콩 쿠키를 4개 사는 경우 초콜릿 쿠키, 버터 쿠키 중에서 1개를 사면 되므로 그 경우의 수는 2이다.

땅콩 쿠키를 5개 사는 경우 초콜릿 쿠키, 버터 쿠키는 사지 않으면 되므로 그 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$21 - 2 - 1 = 18$$

답 18

30

(1) $(3a+b)^3 = (3a+b)(3a+b)(3a+b)$ 이므로

$(3a+b)^3$ 을 전개할 때 생기는 각 항은 2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 곱한 것과 같다.

따라서 $(3a+b)^3$ 을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(2) $(a-b)^5 = (a-b)(a-b)(a-b)(a-b)(a-b)$

이므로 $(a-b)^5$ 을 전개할 때 생기는 각 항은 2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 5개를 택해 곱한 것과 같다.

따라서 $(a-b)^5$ 을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

답 (1) 4 (2) 6

31

$$\begin{aligned} (x+y+z+w)^3 &= (x+y+z+w)(x+y+z+w)(x+y+z+w) \end{aligned}$$

이므로 $(x+y+z+w)^3$ 을 전개할 때 생기는 각 항은 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해

곱한 것과 같다.

따라서 $(x+y+z+w)^3$ 을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

답 20

32

$$(x-y)^4 = (x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$$

즉 $(x-y)^4$ 을 전개할 때 생기는 각 항은 2개의 문자 x, y 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 곱한 것과 같으므로 항의 개수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

즉 $(a+b+c)^3$ 을 전개할 때 생기는 각 항은 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 곱한 것과 같으므로 항의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$5 \times 10 = 50$$

답 50

33

(1) 방정식 $x+y+z+w=10$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286$$

(2) $x=X+1, y=Y+1, z=Z+1, w=W+1$ 이라 하면 $x+y+z+w=10$ 에서

$$(X+1) + (Y+1) + (Z+1) + (W+1) = 10$$

$$\therefore X+Y+Z+W=6$$

(단, X, Y, Z, W 는 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 자연수인 해의 개수는 방정식

$X+Y+Z+W=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

답 (1) 286 (2) 84

34

$x=X+1, y=Y+2, z=Z+3$ 이라 하면

$x+y+z=10$ 에서

$$(X+1) + (Y+2) + (Z+3) = 10$$

$\therefore X+Y+Z=4$ (단, X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $X+Y+Z=4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

답 15

35

주어진 조건에서 $f(3) \leq f(2) \leq f(1)$

즉 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례로 $f(3), f(2), f(1)$ 에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

답 35

36

(가)에서 $f(2)=2$ 이고 (나)에서 $f(1) \leq f(2)$ 이므로 집합 Y 의 원소 1, 2의 2개 중에서 1개를 택하여 $f(1)$ 에 대응시키면 된다.

즉 그 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

또 $f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로 집합 Y 의 원소 2, 3, 4, 5의 4개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 차례로 $f(3), f(4)$ 에 대응시키면 된다.

즉 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \times 10 = 20$$

답 20

연습문제

p.34~39

1

S를 양 끝에 놓은 후 그 사이에 4개의 문자 M, M, A, O를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

답 12

2

서로 다른 5권의 노트를 4명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_5$

답 ③

3

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지
이 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는
1, 2, 3의 3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑
아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$$2 \times 27 = 54$$

4

$${}_3H_r = {}_{3+r-1}C_r = {}_{r+2}C_r = {}_{r+2}C_2 \text{이므로 } {}_{r+2}C_2 = {}_8C_2$$

$$r+2=8 \quad \therefore r=6$$

$$\therefore {}_4H_r = {}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

답 ⑤

5

각 상자에 공이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣어야 하
므로 3개의 상자에 공을 하나씩 먼저 넣은 후 남은 3개의
공을 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개 중에서 3개를
택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

답 ⑤

6

주머니 A에 넣을 3개의 공을 고르는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의
수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 8 = 160$$

답 160

7

도로망에서 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한
칸 가는 것을 b 라 하자.

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수
는 a, a, a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같

으므로

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수
는 a, a, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(i), (ii)에서 A 지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점
까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$15 \times 3 = 45$$

답 45

8

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있
는 숫자는 1, 2의 2가지

이 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는
0, 1, 2의 3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑
아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

이때 각 자리 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222의 1가
지이므로 구하는 자연수의 개수는

$$2 \times 27 - 1 = 53$$

답 ⑤

9

짝수인 2, 2를 짝수 번째 자리에 배열하는 경우는

$$\square 2 \square 2 \square \square, \square 2 \square \square \square 2, \square \square \square 2 \square 2 \text{의 3가지}$$

나머지 자리에 짝수인 2를 제외한 4개의 숫자 1, 3, 3, 3
을 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

답 ⑤

10

방정식 $x+y+z=k$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 3개
의 문자 x, y, z 중에서 k 개를 택하는 중복조합의 수와 같
으므로

$${}_3H_k = {}_{k+2}C_k = {}_{k+2}C_2 = 78$$

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2!} = 78, (k+1)(k+2) = 156 = 12 \times 13$$

$$\therefore k=11 (\because k \text{는 자연수})$$

답 ②

11

일렬로 세운 후 앞의 A에는 키가 작은 여학생,
뒤의 A에는 키가 큰 여학생을 세우면 된다.

여학생 2명을 같은 문자 A, A라 하고, 남학생 4명을 B, C, D, E라 하면 A, A, B, C, D, E를 일렬로 세우는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

여학생끼리 이웃하는 경우의 수는 A, A를 하나로 생각하여 AA, B, C, D, E를 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$$5! = 120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$360 - 120 = 240$$

답 240

12

두 기호 $\cdot, -$ 중에서 중복을 허용하여 택한 n 개의 기호를 나열하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n = 2^n$$

이때 200가지의 신호를 만들려면

$${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + \cdots + {}_2\Pi_n \geq 200$$

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \geq 200$$

$$\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \geq 200, 2^{n+1} - 2 \geq 200$$

$$\therefore 2^{n+1} \geq 202$$

이때 $2^7 = 128, 2^8 = 256$ 이므로

$$n + 1 \geq 8 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 기호를 최소 7개까지 배열해야 한다.

답 ③

Lecture 등비수열의 합

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$(1) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(2) r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

13

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2의 2가지

이 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

10 I. 경우의 수

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$3 \times 2 \times 64 = 384$$

답 ④

14

4개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

세 수의 곱이 200이 넘는 경우는

(4, 8, 8), (8, 8, 8)의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 - 2 = 18$$

답 ③

15

파란색 의자 2개, 빨간색 의자 2개, 노란색 의자 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

노란색 의자끼리 이웃하는 경우의 수는 노란색 의자 2개를 하나로 생각하여 파란색 의자 2개, 빨간색 의자 2개, 노란색 의자 1개를 일렬로 배열하면 되므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$90 - 30 = 60$$

답 ②

16

현지가 12개의 계단을 오르는 경우를 순서쌍 (한 계단, 두 계단)으로 나타내면 다음과 같다.

(0, 6), (2, 5), (4, 4), (6, 3), (8, 2), (10, 1), (12, 0)

(0, 6) $\Rightarrow$ 1가지

$$(2, 5) \Rightarrow \frac{7!}{2! \times 5!} = 21(\text{가지})$$

$$(4, 4) \Rightarrow \frac{8!}{4! \times 4!} = 70(\text{가지})$$

$$(6, 3) \Rightarrow \frac{9!}{6! \times 3!} = 84(\text{가지})$$

$$(8, 2) \Rightarrow \frac{10!}{8! \times 2!} = 45(\text{가지})$$

$$(10, 1) \Rightarrow \frac{11!}{10!} = 11(\text{가지})$$

(12, 0) $\Rightarrow$ 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$1+21+70+84+45+11+1=233$$

답 ④

17

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ 이라 하면

$$2x+y+z=10 \text{에서}$$

$$2(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=10$$

$\therefore 2X+Y+Z=6$ (단, X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)

즉 구하는 자연수인 해의 개수는 방정식 $2X+Y+Z=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

(i) $X=0$ 일 때, $Y+Z=6$

방정식 $Y+Z=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

(ii) $X=1$ 일 때, $Y+Z=4$

방정식 $Y+Z=4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(iii) $X=2$ 일 때, $Y+Z=2$

방정식 $Y+Z=2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(iv) $X=3$ 일 때, $Y+Z=0$

방정식 $Y+Z=0$ 의 음이 아닌 정수해는

$$Y=0, Z=0 \text{의 1개}$$

(i)~(iv)에서 구하는 해의 개수는

$$7+5+3+1=16$$

답 ③

18

(가)에서 네 자연수의 합이 6인 경우는

$$1+1+1+3 \text{ 또는 } 1+1+2+2 \text{의 2가지}$$

(i) $1+1+1+3$ 인 경우

$$1 \times 1 \times 1 \times 3 = 3 \text{이므로 (나)에 모순이다.}$$

(ii) $1+1+2+2$ 인 경우

$$1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4 \text{이므로 네 수의 곱이 4의 배수이다.}$$

(i), (ii)에서 (가), (나)를 만족시키는 네 자연수는 1, 1, 2, 2이다.

따라서 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

답 6

19

이웃한 두 숫자의 합이 모두 4 이하이므로 3은 2와 이웃할 수 없다. 즉 3의 양옆에는 1만 있을 수 있다.

(i) 3이 맨 앞에 있는 경우, 즉 $31\square\square\square\square$ 인 경우

나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \dots\dots ①$$

(ii) 3이 맨 뒤에 있는 경우, 즉 $\square\square\square\square 13$ 인 경우

나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \dots\dots ②$$

(iii) 3의 양옆에 1이 있는 경우, 즉 $131\square\square\square$,

$$\square 131\square\square, \square\square 131\square, \square\square\square 131 \text{인 경우}$$

각 경우의 나머지 자리에 1, 2, 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times \frac{3!}{2!} = 12 \quad \dots\dots ③$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$6+6+12=24 \quad \dots\dots ④$$

답 24

채점 기준	비율
① 3이 맨 앞에 있는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② 3이 맨 뒤에 있는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 3의 양옆에 1이 있는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 이웃한 두 숫자의 합이 모두 4 이하가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	10%

20

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 부등식 $a+b+c \leq 9$ 를 만족시키는 6 이하의 자연수인 해의 개수와 같다.

$$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1 \text{이라 하면}$$

$$a+b+c \leq 9 \text{에서}$$

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1) \leq 9$$

$$\therefore a'+b'+c' \leq 6$$

(단, a', b', c' 은 5 이하의 음이 아닌 정수)

즉 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 부등식

$a'+b'+c' \leq 6$ 을 만족시키는 5 이하의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

(i) $a'+b'+c'=6$ 인 경우

방정식 $a'+b'+c'=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

이때 $a' \geq 6$ 또는 $b' \geq 6$ 또는 $c' \geq 6$ 인 음이 아닌 정수해는 $(6, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$, $(0, 0, 6)$ 의 3개이다.

즉 방정식 $a'+b'+c'=6$ 의 5 이하의 음이 아닌 정수해의 개수는

$$28 - 3 = 25$$

(ii) $a' + b' + c' = 5$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 5$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(iii) $a' + b' + c' = 4$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(iv) $a' + b' + c' = 3$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 3$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(v) $a' + b' + c' = 2$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(vi) $a' + b' + c' = 1$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 1$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(vii) $a' + b' + c' = 0$ 인 경우

방정식 $a' + b' + c' = 0$ 의 음이 아닌 정수해는

$(0, 0, 0)$ 의 1개

(i)~(vii)에서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$25 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 81$$

답 81

21

A와 B를 같은 문자 P라 하고, E와 F를 같은 문자 Q라 하자.

이때 P, P, C, D, Q, Q를 일렬로 나열한 후 앞의 P는 A, 뒤의 P는 B로 바꾸고, 앞의 Q는 F, 뒤의 Q는 E로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 P, P, C, D, Q, Q를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

답 180

22

과반의 표를 얻으려면 10표 이상을 얻어야 한다.

즉 후보자 A에게 먼저 10표를 얻게 하고, 나머지 9표를 중복을 허용하여 A, B, C 세 명의 후보자에게 투표하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

답 ⑤

23

4명의 학생에게 우유를 1개씩 먼저 나누어 준 후 남은 2개의 우유를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

오렌지 주스 5개를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 56 = 560$$

답 ⑤

24

$x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1, w = W + 1$ 이라 하면

$x + y + z + w \leq 6$ 에서

$$(X + 1) + (Y + 1) + (Z + 1) + (W + 1) \leq 6$$

$$\therefore X + Y + Z + W \leq 2$$

(단, X, Y, Z, W 는 음이 아닌 정수)

즉 구하는 자연수인 해의 개수는 부등식

$X + Y + Z + W \leq 2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

(i) $X + Y + Z + W = 2$ 인 경우

방정식 $X + Y + Z + W = 2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

(ii) $X + Y + Z + W = 1$ 인 경우

방정식 $X + Y + Z + W = 1$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) $X + Y + Z + W = 0$ 인 경우

방정식 $X + Y + Z + W = 0$ 의 음이 아닌 정수해는

$X = 0, Y = 0, Z = 0, W = 0$ 의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 자연수인 해의 개수는

$$10 + 4 + 1 = 15$$

답 15

25

Step by Step

a가 2번 나오는 경우의 수를 구한다.



a가 3번 나오는 경우의 수를 구한다.



a가 4번 나오는 경우의 수를 구한다.



a가 2번 이상 나오는 경우의 수를 구한다.

(i) a 가 2번 나오는 경우

④ a 가 2번, b 가 2번 나오는 경우의 수는 a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

⑤ a 가 2번, c 가 2번 나오는 경우의 수는 a, a, c, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

⑥ a 가 2번, b 가 1번, c 가 1번 나오는 경우의 수는 a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

④~⑥에서 a 가 2번 나오는 경우의 수는

$$6 + 6 + 12 = 24$$

(ii) a 가 3번 나오는 경우

④ a 가 3번, b 가 1번 나오는 경우의 수는 a, a, a, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

⑤ a 가 3번, c 가 1번 나오는 경우의 수는 a, a, a, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

④, ⑤에서 a 가 3번 나오는 경우의 수는

$$4 + 4 = 8$$

(iii) a 가 4번 나오는 경우

a 가 4번 나오는 경우는 $aaaa$ 의 1가지

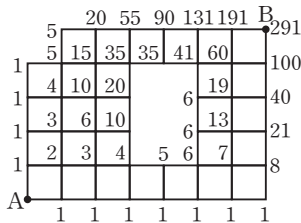
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 8 + 1 = 33$$

☞ 33

26

다음 그림과 같이 합의 법칙을 이용하면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 291이다.



☞ 4

27

a_k 는 주사위의 눈의 수이므로

$$1 \leq a_k \leq 6 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, a_k \text{는 자연수})$$

$$\therefore 1 \leq a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4 < a_5 \leq 6$$

(i) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 6$ 을 만족시키는 경우

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = 252$$

(ii) $1 \leq a_1 \leq a_2 = a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 6$ 을 만족시키는 경우

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

(iii) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 = a_5 \leq 6$ 을 만족시키는 경우

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

(iv) $1 \leq a_1 \leq a_2 = a_3 \leq a_4 = a_5 \leq 6$ 을 만족시키는 경우

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$252 - 126 - 126 + 56 = 56$$

☞ ③

28

$(2a - b + c)^7$ 을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$m = {}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

$$a^2b^x c^y \text{에서 } 2 + x + y = 7 \text{이므로 } x + y = 5$$

즉 $a^2b^x c^y$ 꼴의 항의 개수는 방정식 $x + y = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$$n = {}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

$$\therefore m + n = 36 + 6 = 42$$

☞ ④

29

(i) $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$ 인 경우

집합 Y 의 원소 9개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_9H_3 = {}_{11}C_3 = 165$$

(ii) $f(a) = f(b) \leq f(c)$ 인 경우

집합 Y 의 원소 9개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_9H_2 = {}_{10}C_2 = 45$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$165 - 45 = 120$$

답 ⑤

다른 풀이

함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 $f(a) < f(b) \leq f(c)$ 를 만족시키는 경우는

$$f(a) < f(b) = f(c) \text{ 또는 } f(a) < f(b) < f(c)$$

(i) $f(a) < f(b) = f(c)$ 인 경우

집합 Y 의 원소 9개 중에서 2개를 택하여 작은 수부터 차례로 $f(a)$, $f(b) = f(c)$ 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_9C_2 = 36$$

(ii) $f(a) < f(b) < f(c)$ 인 경우

집합 Y 의 원소 9개 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례로 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$36 + 84 = 120$$

씩 사용해야 하므로 짝수 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

위에서 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

즉 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 30 = 270$$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 택하는 경우

홀수 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

이 각각에 대하여 짝수는 3개 중에서 1개를 택하여 2번 사용해야 하므로 짝수 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

위에서 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

즉 구하는 경우의 수는

$$1 \times 3 \times 60 = 180$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$270 + 180 = 450$$

답 450

Level Up 연습문제

p. 40

1

(나)에서 $c \geq d$ 이므로 $c - d \geq 0$

즉 $c - d = c'$ 이라 하면 (가)에서

$$a + b + c' = 9 \text{ (단, } a, b, c' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

방정식 $a + b + c' = 9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c' 의 순서쌍 (a, b, c') 의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

이때 (나)에서 $d \leq 4$ 이므로 $d = 0, 1, 2, 3, 4$ 의 5가지

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$55 \times 5 = 275$$

답 ③

2

(가), (나)를 만족시키는 경우는 다음 두 가지 경우뿐이다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 택하는 경우

홀수 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 2번

3

네 자리 자연수를

$$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d \quad (a \geq 1)$$

라 하자.

(나)에서 $a + b + c + d \leq 7$ 이고 (가)에서 $d = 1$ 또는 $d = 3$ 또는 $d = 5$

이때 $a = A + 1$ ($A \geq 0$)이라 하면

$$a + b + c + d \leq 7 \text{에서}$$

$$A + b + c + d \leq 6 \text{ (단, } A, b, c, d \text{는 음이 아닌 정수)}$$

(i) $d = 1$ 인 경우

부등식 $A + b + c \leq 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (A, b, c) 의 개수는

$$A + b + c = 5 \text{일 때, } {}_3H_5$$

$$A + b + c = 4 \text{일 때, } {}_3H_4$$

$\vdots$

$$A + b + c = 0 \text{일 때, } {}_3H_0$$

$$\therefore {}_3H_5 + {}_3H_4 + {}_3H_3 + {}_3H_2 + {}_3H_1 + {}_3H_0$$

$$= {}_7C_5 + {}_6C_4 + {}_5C_3 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0$$

$$= {}_7C_2 + {}_6C_2 + {}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0$$

$$= 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$$

$$= 56$$

(ii) $d=3$ 인 경우

부등식 $A+b+c \leq 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수의
순서쌍 (A, b, c) 의 개수는

$$A+b+c=3 \text{ 일 때, } {}_3H_3$$

$$A+b+c=2 \text{ 일 때, } {}_3H_2$$

$$A+b+c=1 \text{ 일 때, } {}_3H_1$$

$$A+b+c=0 \text{ 일 때, } {}_3H_0$$

$$\begin{aligned} \therefore {}_3H_3 + {}_3H_2 + {}_3H_1 + {}_3H_0 &= {}_5C_3 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0 \\ &= 10 + 6 + 3 + 1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

(iii) $d=5$ 인 경우

부등식 $A+b+c \leq 1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수의
순서쌍 (A, b, c) 의 개수는

$$A+b+c=1 \text{ 일 때, } {}_3H_1$$

$$A+b+c=0 \text{ 일 때, } {}_3H_0$$

$$\begin{aligned} \therefore {}_3H_1 + {}_3H_0 &= {}_3C_1 + {}_2C_0 \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 자연수의 개수는

$$56 + 20 + 4 = 80$$

 80

다른 풀이

(i) $d=1$ 인 경우

부등식 $A+b+c \leq 5$ 에서 $w=5-(A+b+c)$ 라 하면
 $A+b+c+w=5$ 이고, w 는 음이 아닌 정수이므로 부
등식 $A+b+c \leq 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수의
순서쌍 (A, b, c) 의 개수는 방정식 $A+b+c+w=5$
의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$\therefore {}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

(ii) $d=3$ 인 경우

부등식 $A+b+c \leq 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수의
순서쌍 (A, b, c) 의 개수는 방정식 $A+b+c+w=3$
의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$\therefore {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(iii) $d=5$ 인 경우

부등식 $A+b+c \leq 1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수의
순서쌍 (A, b, c) 의 개수는 방정식 $A+b+c+w=1$
의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$\therefore {}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 자연수의 개수는

$$56 + 20 + 4 = 80$$

2 이항정리

확인 문제

p.43~54

01

(1) $(2x+3y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r = {}_5C_r \times 2^{5-r} \times 3^r \times x^{5-r} y^r$$

 x^2y^3 항은 $5-r=2$ 일 때이므로 $r=3$ 따라서 x^2y^3 의 계수는

$${}_5C_3 \times 2^2 \times 3^3 = 1080$$

(2) $(3-2x)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r 3^{6-r} (-2x)^r = {}_6C_r \times 3^{6-r} \times (-2)^r \times x^r$$

 x^2 항은 $r=2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$${}_6C_2 \times 3^4 \times (-2)^2 = 4860$$

답 (1) 1080 (2) 4860

02

 $(ax-y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(ax)^{5-r}(-y)^r = {}_5C_r \times a^{5-r} \times (-1)^r \times x^{5-r} y^r$$

 x^3y^2 항은 $5-r=3$ 일 때이므로 $r=2$ 이때 x^3y^2 의 계수가 80이므로

$${}_5C_2 \times a^3 \times (-1)^2 = 80, 10a^3 = 80$$

$$a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$$

답 2

03

(1) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r \times (-2)^r \times x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}_6C_r \times (-2)^r \times x^{6-2r}$$

상수항은 $6-2r=0$ 일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은

$${}_6C_3 \times (-2)^3 = -160$$

(2) $\left(x + \frac{2}{y}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r} \left(\frac{2}{y}\right)^r = {}_7C_r \times 2^r \times x^{7-r} \times \left(\frac{1}{y}\right)^r$$

$$= {}_7C_r \times 2^r \times x^{7-r} y^{-r}$$

 $\frac{x^5}{y^2}$ 항, 즉 x^5y^{-2} 항은 $7-r=5$ 일 때이므로 $r=2$ 따라서 $\frac{x^5}{y^2}$ 의 계수는

$${}_7C_2 \times 2^2 = 84$$

답 (1) -160 (2) 84

04

 $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (ax)^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r \times a^{4-r} \times x^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}_4C_r \times a^{4-r} \times x^{4-2r}$$

상수항은 $4-2r=0$ 일 때이므로 $r=2$

이때 상수항이 54이므로

$${}_4C_2 \times a^2 = 54$$

$$6a^2 = 54, a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

답 3

05

$$(1) (x^2+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8 = x^2 \underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^8}_{\text{㉠}} + \underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^8}_{\text{㉡}}$$

 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r \times (-1)^r \times x^{8-2r} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x^2 \times \left(\text{㉠의 } \frac{1}{x^2} \text{항}\right)$ 일 때이다.㉠에서 $\frac{1}{x^2}$ 항, 즉 x^{-2} 항은 $8-2r=-2$ 일 때이므로 $r=5$

$$\therefore {}_8C_5 \times (-1)^5 \times x^{-2} = -\frac{56}{x^2}$$

$$\text{즉 상수항은 } x^2 \times \left(-\frac{56}{x^2}\right) = -56$$

(ii) ㉡의 전개식에서 상수항은 ㉠에서 $8-2r=0$ 일 때이므로 $r=4$

$$\text{즉 상수항은 } {}_8C_4 \times (-1)^4 = 70$$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은
 $-56 + 70 = 14$

$$(2) (x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^2 \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}_{\text{㉠}} + x \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}_{\text{㉡}} + \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}_{\text{㉢}}$$

 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r x^{6-2r} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x^2 \times \left(\text{㉠의 } \frac{1}{x^2} \text{항}\right)$ 일 때이다.

①에서 $\frac{1}{x^2}$ 항, 즉 x^{-2} 항은 $6-2r=-2$ 일 때
 $r=4$

$$\therefore {}_6C_4 x^{-2} = \frac{15}{x^2}$$

즉 상수항은 $x^2 \times \frac{15}{x^2} = 15$

(ii) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x \times \left(\textcircled{1} \text{의 } \frac{1}{x} \text{ 항} \right)$ 일 때이다.

①에서 $\frac{1}{x}$ 항이 없으므로 ㉠의 전개식에서 상수항은 없다.

(iii) ㉡의 전개식에서 상수항은 ①에서 $6-2r=0$ 일 때
 이므로 $r=3$

즉 상수항은 ${}_6C_3 = 20$

(i)~(iii)에서 구하는 상수항은

$$15 + 20 = 35 \quad \text{답 1) 14 (2) 35}$$

06

$$(x^2+2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^4 = \underbrace{x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^4}_{\textcircled{1}} + 2\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^4}_{\textcircled{2}}$$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r \times (-1)^r \times x^{4-2r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) ㉠의 전개식에서 x^2 항은 $x^2 \times (\textcircled{1} \text{의 상수항})$ 일 때이다.

①에서 상수항은 $4-2r=0$ 일 때이므로 $r=2$

$$\therefore {}_4C_2 \times (-1)^2 = 6$$

즉 x^2 항은 $x^2 \times 6 = 6x^2$

(ii) ㉡의 전개식에서 x^2 항은 $2 \times (\textcircled{1} \text{의 } x^2 \text{ 항})$ 일 때이다.

①에서 x^2 항은 $4-2r=2$ 일 때이므로 $r=1$

$$\therefore {}_4C_1 \times (-1)^1 \times x^2 = -4x^2$$

즉 x^2 항은 $2 \times (-4x^2) = -8x^2$

(i), (ii)에서 구하는 x^2 의 계수는

$$6 + (-8) = -2 \quad \text{답 -2}$$

07

$(1+2x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 1^{4-r} (2x)^r = {}_4C_r \times 2^r \times x^r \quad (0 \leq r \leq 4)$$

$(1-x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s 1^{5-s} (-x)^s = {}_5C_s \times (-1)^s \times x^s \quad (0 \leq s \leq 5)$$

즉 $(1+2x)^4(1-x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times 2^r \times x^r \times {}_5C_s \times (-1)^s \times x^s$$

$$= {}_4C_r \times {}_5C_s \times 2^r \times (-1)^s \times x^{r+s}$$

이때 x^8 항은 $r+s=8$ 일 때이므로

$$(i) \ r=3, s=5 \text{ 이면 } {}_4C_3 \times {}_5C_5 \times 2^3 \times (-1)^5 = -32$$

$$(ii) \ r=4, s=4 \text{ 이면 } {}_4C_4 \times {}_5C_4 \times 2^4 \times (-1)^4 = 80$$

(i), (ii)에서 x^8 의 계수는

$$-32 + 80 = 48$$

답 48

08

$(1-2x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r 1^{5-r} (-2x)^r = {}_5C_r \times (-2)^r \times x^r \quad (0 \leq r \leq 5)$$

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s 1^{n-s} x^s = {}_nC_s x^s \quad (0 \leq s \leq n)$$

$(1-2x)^5(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r \times (-2)^r \times x^r \times {}_nC_s x^s = {}_5C_r \times {}_nC_s \times (-2)^r \times x^{r+s}$$

이때 x^2 항은 $r+s=2$ 일 때이므로

$$(i) \ r=0, s=2 \text{ 이면 } {}_5C_0 \times {}_nC_2 \times (-2)^0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(ii) \ r=1, s=1 \text{ 이면 } {}_5C_1 \times {}_nC_1 \times (-2)^1 = -10n$$

$$(iii) \ r=2, s=0 \text{ 이면 } {}_5C_2 \times {}_nC_0 \times (-2)^2 = 40$$

(i)~(iii)에서 x^2 의 계수는

$$\frac{n(n-1)}{2} + (-10n) + 40 = \frac{n^2 - 21n + 80}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2 - 21n + 80}{2} = 13 \text{ 이므로}$$

$$n^2 - 21n + 54 = 0, (n-3)(n-18) = 0$$

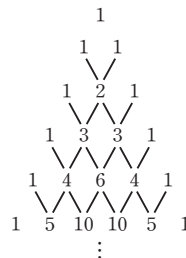
$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=18$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

답 3

09

(i) 파스칼의 삼각형에서 다항식 $(a+b)^4$ 의 전개식의 상수항과 각 항의 계수는 차례로 1, 4, 6, 4, 1이다.



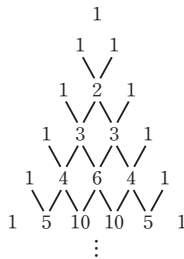
$$\therefore (2x+3)^4$$

$$= 1 \times (2x)^4 + 4 \times (2x)^3 \times 3$$

$$+ 6 \times (2x)^2 \times 3^2 + 4 \times 2x \times 3^3 + 1 \times 3^4$$

$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

(2) 파스칼의 삼각형에서 다항식 $(a+b)^5$ 의 전개식의 상수항과 각 항의 계수는 차례로 1, 5, 10, 10, 5, 1이다.

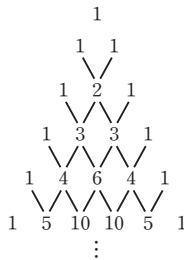


$$\begin{aligned} \therefore (2x-y)^5 &= 1 \times (2x)^5 + 5 \times (2x)^4(-y) \\ &\quad + 10 \times (2x)^3(-y)^2 + 10 \times (2x)^2(-y)^3 \\ &\quad + 5 \times 2x(-y)^4 + 1 \times (-y)^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5 \\ \text{답 (1)} &16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81 \\ \text{(2)} &32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5 \end{aligned}$$

10

$$(-2x+1)^4(x-3) = \underbrace{x(-2x+1)^4}_{\text{㉠}} - \underbrace{3(-2x+1)^4}_{\text{㉡}}$$

파스칼의 삼각형에서 다항식 $(a+b)^4$ 의 전개식의 상수항과 각 항의 계수는 차례로 1, 4, 6, 4, 1이다.



$$\begin{aligned} \therefore (-2x+1)^4 &= 1 \times (-2x)^4 + 4 \times (-2x)^3 \times 1 \\ &\quad + 6 \times (-2x)^2 \times 1^2 + 4 \times (-2x) \times 1^3 + 1 \times 1^4 \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

(i) ㉠의 전개식에서 x^2 항은 $x \times$ (㉠의 x 항)일 때이다.
 ㉠에서 x 항의 계수는 -8 이므로
 ㉠에서 x^2 항은 $x \times (-8x) = -8x^2$

(ii) ㉡의 전개식에서 x^2 항은 $-3 \times$ (㉠의 x^2 항)일 때이다.
 ㉠에서 x^2 항의 계수는 24 이므로
 ㉡에서 x^2 항은 $-3 \times 24x^2 = -72x^2$

(i), (ii)에서 구하는 x^2 의 계수는
 $-8 + (-72) = -80$

답 -80

11

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_{n-1} &= 2^n - {}_nC_0 - {}_nC_n = 2^n - 2 \\ \text{즉 } 2^{13} &< 2^n - 2 < 2^{14} \text{이므로} \\ 2^{13} + 2 &< 2^n < 2^{14} + 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 14이다.

답 14

12

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n &= 2^n - {}_nC_0 = 2^n - 1 \\ \text{즉 } 2^n - 1 &= 255 \text{이므로} \\ 2^n &= 256 = 2^8 \\ \therefore n &= 8 \end{aligned}$$

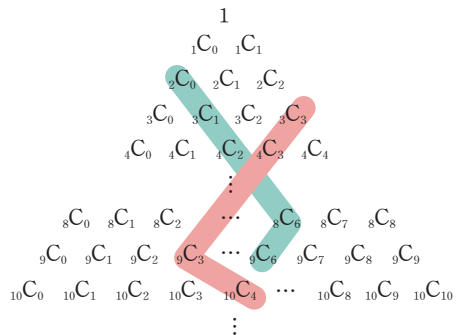
답 8

13

$$\begin{aligned} {}_{16}C_0 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + \dots + {}_{16}C_{16} &= 2^{16-1} = 2^{15} \text{이므로} \\ {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + {}_{16}C_6 + \dots + {}_{16}C_{14} &= 2^{15} - {}_{16}C_0 - {}_{16}C_{16} \\ &= 2^{15} - 2 \end{aligned}$$

답 $2^{15} - 2$

14



(1) 구하는 식의 값은 위의 파스칼의 삼각형에서 ${}_2C_0$ 부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_8C_6$ 까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_8C_6$ 의 왼쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_9C_6$ 과 같다.
 $\therefore {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \dots + {}_8C_6 = {}_9C_6 = 84$

(2) 구하는 식의 값은 위의 파스칼의 삼각형에서 ${}_3C_3$ 부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_9C_3$ 까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_9C_3$ 의 오른쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_{10}C_4$ 와 같다.
 $\therefore {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_9C_3 = {}_{10}C_4 = 210$

답 (1) 84 (2) 210

다른 풀이

(1) 조합의 수의 성질을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \\
 &= ({}_3C_0 + {}_3C_1) + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \quad (\because {}_2C_0 = {}_3C_0) \\
 &= ({}_4C_1 + {}_4C_2) + {}_5C_3 + \cdots + {}_8C_6 \quad (\because {}_3C_0 + {}_3C_1 = {}_4C_1) \\
 &= ({}_5C_2 + {}_5C_3) + {}_6C_4 + {}_7C_5 + {}_8C_6 \quad (\because {}_4C_1 + {}_4C_2 = {}_5C_2) \\
 &\quad \vdots \\
 &= {}_8C_5 + {}_8C_6 \\
 &= {}_9C_6 = 84
 \end{aligned}$$

15

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r 1^{n-r} (x^2)^r = {}_nC_r x^{2r}$

x^6 항은 $2r=6$ 일 때이므로 $r=3$

이때 $3 \leq n \leq 8$ 인 경우에만 x^6 항이 나오므로

$(1+x^2)^3$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x^2)^4$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_4C_3$

$\vdots$

$(1+x^2)^8$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_8C_3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & \\
 & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & \\
 & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 \\
 & {}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & {}_8C_0 & & {}_8C_1 & & {}_8C_2 & & {}_8C_3 & & \cdots & & {}_8C_7 & & {}_8C_8 \\
 & {}_9C_0 & & {}_9C_1 & & {}_9C_2 & & {}_9C_3 & & {}_9C_4 & & \cdots & & {}_9C_7 & & {}_9C_8 & & {}_9C_9 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

위의 파스칼의 삼각형에서 x^6 의 계수는 ${}_3C_3$ 부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_8C_3$ 까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_8C_3$ 의 오른쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_9C_4$ 와 같다.

따라서 x^6 의 계수는 ${}_9C_4 = 126$

답 126

16

이항정리를 이용하여 $(1+x)^{21}$ 을 전개하면

$$(1+x)^{21} = {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 x + {}_{21}C_2 x^2 + \cdots + {}_{21}C_{21} x^{21}$$

이 식의 양변에 $x=7$ 을 대입하면

$$8^{21} = {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \times 7 + {}_{21}C_2 \times 7^2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 7^{21}$$

$$\therefore {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \times 7 + {}_{21}C_2 \times 7^2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 7^{21}$$

$$= 8^{21} = (2^3)^{21} = 2^{63}$$

$$\therefore k = 63$$

답 63

17

이항정리를 이용하여 $(1+x)^{12}$ 을 전개하면

$$(1+x)^{12} = {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 x + {}_{12}C_2 x^2 + \cdots + {}_{12}C_{12} x^{12} \quad \text{㉠}$$

(i) ㉠의 양변에 $x=21$ 을 대입하면

$$22^{12} = {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 \times 21 + {}_{12}C_2 \times 21^2 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 21^{12}$$

이때 세 번째 항부터는 모두 441, 즉 21^2 으로 나누어 떨어지므로 22^{12} 을 441로 나누었을 때의 나머지는

$${}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 \times 21 = 253 \text{을 } 441 \text{로 나누었을 때의 나머지와 같다.}$$

와 같다.

즉 22^{12} 을 441로 나누었을 때의 나머지는 253이다.

(ii) ㉠의 양변에 $x=12$ 을 대입하면

$$13^{12} = {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 \times 12 + {}_{12}C_2 \times 12^2 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 12^{12}$$

이때 두 번째 항부터는 모두 144, 즉 12^2 으로 나누어 떨어지므로 13^{12} 을 144로 나누었을 때의 나머지는

$${}_{12}C_0 = 1 \text{을 } 144 \text{로 나누었을 때의 나머지와 같다.}$$

즉 13^{12} 을 144로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

(i), (ii)에서 $a=253, b=1$

$$\therefore a+b=253+1=254$$

답 254

연습문제

p.55~57

1

$(x-a)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} (-a)^r$$

(i) x 항은 $5-r=1$ 일 때이므로 $r=4$

$$\text{즉 } x \text{의 계수는 } {}_5C_4 \times (-a)^4 = 5a^4$$

(ii) 상수항은 $5-r=0$ 일 때이므로 $r=5$

$$\text{즉 상수항은 } {}_5C_5 \times (-a)^5 = -a^5$$

이때 x 의 계수와 상수항의 합이 0이므로

$$5a^4 + (-a^5) = 0, \quad a^5 - 5a^4 = 0$$

$$a^4(a-5) = 0 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

답 ⑤

2

Step by Step

$(2+3x)^5$ 의 전개식의 일반항을 구한다.



$(kx+1)^6$ 의 전개식의 일반항을 구한다.



조건을 만족시키는 k^2 의 값을 구한다.

(i) $(2+3x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r 2^{5-r} (3x)^r = {}_5C_r \times 2^{5-r} \times 3^r \times x^r$$

x^2 항은 $r=2$ 일 때이므로

$$x^2 \text{의 계수는 } {}_5C_2 \times 2^3 \times 3^2 = 720$$

(ii) $(kx+1)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (kx)^{6-r} 1^r = {}_6C_r \times k^{6-r} \times x^{6-r}$$

x^2 항은 $6-r=2$ 일 때이므로 $r=4$

$$\text{즉 } x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_4 \times k^2 = 15k^2$$

이때 두 다항식의 x^2 의 계수가 서로 같으므로

$$15k^2 = 720 \quad \therefore k^2 = 48$$

답 48

3

$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (2x)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r \times 2^{6-r} \times (-1)^r \times x^{6-2r}$$

(i) x^2 항은 $6-2r=2$ 일 때이므로 $r=2$

$$\text{즉 } x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_2 \times 2^4 \times (-1)^2 = 240$$

(ii) 상수항은 $6-2r=0$ 일 때이므로 $r=3$

$$\text{즉 상수항은 } {}_6C_3 \times 2^3 \times (-1)^3 = -160$$

(i), (ii)에서 $\alpha=240$, $\beta=-160$

$$\therefore \alpha + \beta = 240 + (-160) = 80$$

답 ③

4

$$\log_4 \left(\sum_{k=0}^8 {}_{17}C_k \right) = \log_4 ({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8)$$

${}_{17}C_r = {}_{17}C_{17-r} (r=0, 1, 2, \dots, 17)$ 이므로

$${}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8$$

$$= {}_{17}C_{17} + {}_{17}C_{16} + {}_{17}C_{15} + \cdots + {}_{17}C_9$$

이때 ${}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_{17} = 2^{17}$ 이므로

$${}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8 = \frac{1}{2} \times 2^{17} = 2^{16}$$

$$\therefore \log_4 \left(\sum_{k=0}^8 {}_{17}C_k \right)$$

$$= \log_4 ({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8)$$

$$= \log_4 2^{16}$$

$$= \log_4 4^8$$

$$= 8$$

답 ①

5

${}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + \cdots + {}_6C_6 = 3 \times {}_n C_{n-2}$ 에서

$$({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + \cdots + {}_6C_6) - {}_6C_0 = 3 \times {}_n C_{n-2}$$

$$2^6 - 1 = 3 \times {}_n C_{n-2}, 63 = 3 {}_n C_2$$

$${}_n C_2 = 21, \frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$$n(n-1) = 42, n^2 - n - 42 = 0$$

$$(n+6)(n-7) = 0 \quad \therefore n = 7 (\because n \geq 2)$$

답 ⑤

6

이항정리를 이용하여 $(1+x)^4$ 를 전개하면

$$(1+x)^4 = {}_4C_0 + {}_4C_1 x + {}_4C_2 x^2 + {}_4C_3 x^3 + {}_4C_4 x^4$$

이 식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$4^4 = {}_4C_0 + {}_4C_1 \times 3 + {}_4C_2 \times 3^2 + {}_4C_3 \times 3^3 + {}_4C_4 \times 3^4$$

$$\therefore {}_4C_0 + {}_4C_1 \times 3 + {}_4C_2 \times 3^2 + {}_4C_3 \times 3^3 + {}_4C_4 \times 3^4$$

$$= 4^4 = 256$$

답 ⑤

7

$$\sum_{k=2}^{10} k {}_6C_{k-2}$$

$$= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_8$$

$$= ({}_3C_0 + {}_3C_1) + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_8 (\because {}_2C_0 = {}_3C_0)$$

$$= ({}_4C_1 + {}_4C_2) + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_8 (\because {}_3C_0 + {}_3C_1 = {}_4C_1)$$

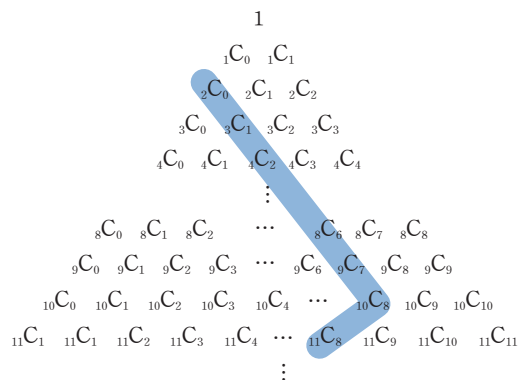
$$= ({}_5C_2 + {}_5C_3) + {}_6C_4 + \cdots + {}_{10}C_8 (\because {}_4C_1 + {}_4C_2 = {}_5C_2)$$

$\vdots$

$$= {}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 = {}_{11}C_8$$

답 ③

다른 풀이



구하는 식의 값은 위의 파스칼의 삼각형에서 ${}_2C_0$ 부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_{10}C_8$ 까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_{10}C_8$ 의 왼쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_{11}C_8$ 과 같다.

$$\therefore \sum_{k=2}^{10} k {}_6C_{k-2} = {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_8 = {}_{11}C_8$$

8

원소의 개수가 2인 A 의 부분집합의 개수는 1, 2, 3, ... 10의 10개 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_2$ 같은 방법으로 원소의 개수가 4, 6, 8, 10인 A 의 부분집합의 개수는 각각 ${}_{10}C_4, {}_{10}C_6, {}_{10}C_8, {}_{10}C_{10}$ 이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$${}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10} = 2^9 - {}_{10}C_0 = 2^9 - 1 = 511$$

답 511

9

$(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 1^{4-r} x^r = {}_4C_r x^r \quad (0 \leq r \leq 4)$$

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s 1^{n-s} (x^2)^s = {}_nC_s x^{2s} \quad (0 \leq s \leq n)$$

$(1+x)^4(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times {}_nC_s \times x^{r+2s} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

이때 x^2 항은 $r+2s=2$ 일 때이므로

$$(i) r=0, s=1 \text{이면 } {}_4C_0 \times {}_nC_1 = n$$

$$(ii) r=2, s=0 \text{이면 } {}_4C_2 \times {}_nC_0 = 6$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } n+6 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$\text{즉 } n+6=12 \text{이므로 } n=6 \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

답 6

채점 기준	비율
① $(1+x)^4(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	40%
② $(1+x)^4(1+x^2)^n$ 의 전개식에서 x^2 항을 구할 수 있다.	40%
③ n 의 값을 구할 수 있다.	20%

참고 $(1+x^2)^n$ 의 전개식에서 x 항이 존재하려면 ${}_nC_2 x^{2s}$ 에서 $2s=1$ 을 만족시키는 양의 정수 s 의 값이 존재해야 한다. 그러나 이를 만족시키는 양의 정수 s 의 값은 존재하지 않으므로 x 항은 존재하지 않는다.

10

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n ({}_kC_1 + {}_kC_3 + {}_kC_5 + \dots + {}_kC_{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 4^k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{2(4^n - 1)}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore f(5) = \frac{2(4^5 - 1)}{3} = 682$$

답 682

Lecture 등비수열의 합

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$(1) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(2) r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

11

이항정리를 이용하여 $(1+x)^8$ 을 전개하면

$$(1+x)^8 = {}_8C_0 + {}_8C_1 x + {}_8C_2 x^2 + \dots + {}_8C_8 x^8$$

이 식의 양변에 $x=10$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 11^8 &= {}_8C_0 + {}_8C_1 \times 10 + {}_8C_2 \times 10^2 + \dots + {}_8C_8 \times 10^8 \\ &= 1 + 8 \times 10 + 10^2 ({}_8C_2 + {}_8C_3 \times 10 + \dots + {}_8C_8 \times 10^6) \\ &= 81 + 10^2 ({}_8C_2 + {}_8C_3 \times 10 + \dots + {}_8C_8 \times 10^6) \end{aligned}$$

즉 세 번째 항부터는 십의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 11^8 의 일의 자리, 십의 자리의 숫자는 각각 1, 8이다.

따라서 $a=1, b=8$ 이므로

$$a+b=1+8=9$$

답 ④

12

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_nC_r x^{n-2r}$$

이때 $n=2, 4, 6$ 인 경우에만 x^2 항이 나오므로

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_2C_0 = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_4C_1 = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_2 = 15$$

따라서 구하는 값은

$$1 + 4 + 15 = 20$$

답 ②

13

$$\begin{aligned} (i) {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_8 \\ &= ({}_3C_0 + {}_3C_1) + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_8 \quad (\because {}_2C_0 = {}_3C_0) \\ &= ({}_4C_1 + {}_4C_2) + {}_5C_3 + \dots + {}_{10}C_8 \quad (\because {}_3C_0 + {}_3C_1 = {}_4C_1) \\ &= ({}_5C_2 + {}_5C_3) + {}_6C_4 + \dots + {}_{10}C_8 \quad (\because {}_4C_1 + {}_4C_2 = {}_5C_2) \\ &\vdots \\ &= {}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 \\ &= {}_{11}C_8 = 165 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(ii)} \quad {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 \\
&= ({}_2C_0 + {}_2C_1) + {}_3C_2 + \cdots + {}_{10}C_9 \quad (\because {}_1C_0 = {}_2C_0) \\
&= ({}_3C_1 + {}_3C_2) + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 \quad (\because {}_2C_0 + {}_2C_1 = {}_3C_1) \\
&= ({}_4C_2 + {}_4C_3) + {}_5C_4 + \cdots + {}_{10}C_9 \quad (\because {}_3C_1 + {}_3C_2 = {}_4C_2) \\
&\quad \vdots \\
&= {}_{10}C_8 + {}_{10}C_9 = {}_{11}C_9 \\
&\therefore {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 = {}_{11}C_9 - {}_1C_0 \\
&= 55 - 1 = 54
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(iii)} \quad {}_2C_2 + {}_3C_3 + {}_4C_4 + \cdots + {}_{10}C_{10} \\
&= \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{9\text{개}} \\
&= 9
\end{aligned}$$

(i)~(iii)에서 어두운 부분의 모든 수들의 합은
 $165 + 54 + 9 = 228$

답 ③

다른 풀이

어두운 부분의 모든 수들의 합을 수열의 합으로 나타내면

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{10} ({}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n) \\
&= \sum_{n=2}^{10} ({}_nC_2 + {}_nC_1 + 1) \\
&= \sum_{n=2}^{10} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 \right\} \\
&= \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \right) \\
&= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 - 2 \\
&= 228
\end{aligned}$$

14

B에게 주는 지우개의 개수를 r ($r=0, 1, 2, \dots, 6$)라 하면

B에게 주는 연필의 개수는 $(6-r)$

서로 다른 지우개 6개 중에서 r 개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_r$$

똑같은 연필 6개 중에서 $(6-r)$ 개를 택하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + \cdots + {}_6C_6 = 2^6 = 64$$

답 64

15

$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (2x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_nC_r \times 2^{n-r} \times x^{2n-3r}$$

이때 상수항이 존재하려면 $2n-3r=0$ 이어야 하므로

$$r = \frac{2n}{3}$$

이때 r 은 $0 \leq r \leq n$ 인 정수이므로 $r = \frac{2n}{3}$ 을 만족시키는

자연수 n 은 3의 배수이어야 한다.

즉 n 의 최솟값은 3이므로 $r=2$ 이고 그때의 상수항은

$${}_3C_2 \times 2 = 3 \times 2 = 6$$

따라서 $a=3, b=6$ 이므로

$$a+b=3+6=9$$

답 ①

16

$\left(ax - \frac{2}{ax}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_rC_r (ax)^{7-r} \left(-\frac{2}{ax}\right)^r = {}_rC_r \times a^{7-2r} \times (-2)^r \times x^{7-2r}$$

$\left(ax - \frac{2}{ax}\right)^7$ 의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1이

므로

$$\left(a - \frac{2}{a}\right)^7 = 1$$

$$\text{즉 } a - \frac{2}{a} = 1 \text{ 이므로 } a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

이때 $\frac{1}{x}$ 항, 즉 x^{-1} 항은 $7-2r=-1$ 일 때이므로 $r=4$

따라서 $\frac{1}{x}$ 의 계수는

$${}_rC_4 \times 2^{-1} \times (-2)^4 = 280$$

답 ④

참고 x 에 대한 다항식의 각 항의 계수의 총합은 $x=1$ 을 대입하여 구할 수 있다.

Level Up 연습문제

p. 58

1

주어진 숫자 카드를 2장 이상으로 분리하는 경우의 수는 8개의 점선 중에서 r ($1 \leq r \leq 8$)개를 택하는 모든 경우의 수의 합과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_8C_1 + {}_8C_2 + {}_8C_3 + \cdots + {}_8C_8 \\ &= ({}_8C_0 + {}_8C_1 + \cdots + {}_8C_8) - {}_8C_0 \\ &= 2^8 - 1 = 255 \end{aligned}$$

답 255

2

$$\sum_{k=0}^5 {}_5C_k \left(\frac{13}{4}\right)^{5-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{13}{4} + \frac{3}{4}\right)^5 = 4^5 = 2^{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 {}_5C_k \left(\frac{13}{4}\right)^{5-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^5 {}_5C_k \left(\frac{13}{4}\right)^{5-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k - {}_5C_0 \left(\frac{13}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 2^{10} - \left(\frac{13}{4}\right)^5 \\ &= \frac{2^{20} - 13^5}{2^{10}} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{2^{20} - 13^5}{2^{10}} = \frac{2^a - b^5}{2^{10}} \text{이므로}$$

$$a=20, b=13$$

$$\therefore a+b=20+13=33$$

답 33

3

$(1+x)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r 1^{10-r} x^r = {}_{10}C_r x^r$$

x^k 항은 $r=k$ 일 때이므로 x^k 의 계수는 ${}_{10}C_k$

x^{5-k} 항은 $r=5-k$ 일 때이므로 x^{5-k} 의 계수는 ${}_{10}C_{5-k}$

$(1+x)^{10}(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^5 항은

$((1+x)^{10} \text{의 } x^k \text{항}) \times ((1+x)^{10} \text{의 } x^{5-k} \text{항})$ 일 때이므로

$$\sum_{k=0}^5 {}_{10}C_k \times {}_{10}C_{5-k} \text{는 } (1+x)^{10}(1+x)^{10}, \text{ 즉 } (1+x)^{20} \text{의}$$

전개식에서 x^5 의 계수를 의미한다.

이때 $(1+x)^{20}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{20}C_r 1^{20-r} x^r = {}_{20}C_r x^r$$

x^5 항은 $r=5$ 일 때이므로 x^5 의 계수는 ${}_{20}C_5$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 {}_{10}C_k \times {}_{10}C_{5-k} &= \sum_{k=0}^5 {}_{10}C_k \times {}_{10}C_{5-k} - {}_{10}C_0 \times {}_{10}C_5 \\ &= {}_{20}C_5 - {}_{10}C_0 \times {}_{10}C_5 \\ &= {}_{20}C_5 - {}_{10}C_5 \end{aligned}$$

따라서 $m=20, n=10, k=5$ 이므로

$$m+n+k=20+10+5=35$$

답 35

4

(가)에서 집합 A 는 1, 2, 3은 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는다.

(나)에서 $n(A) \geq 14$ 이므로 집합 A 의 개수는 집합 U 에서 원소 1, 2, 3, 4를 제외한 집합 $\{5, 6, 7, \dots, 25\}$ 의 원소 중 각각 11개, 12개, $\dots$, 21개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수의 합과 같다.

${}_{21}C_r = {}_{21}C_{21-r} (r=0, 1, 2, \dots, 21)$ 이므로

$$\begin{aligned} & {}_{21}C_{11} + {}_{21}C_{12} + {}_{21}C_{13} + \cdots + {}_{21}C_{21} \\ &= {}_{21}C_{10} + {}_{21}C_9 + {}_{21}C_8 + \cdots + {}_{21}C_0 \end{aligned}$$

이때 ${}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + {}_{21}C_2 + \cdots + {}_{21}C_{21} = 2^{21}$ 이므로

$${}_{21}C_{11} + {}_{21}C_{12} + {}_{21}C_{13} + \cdots + {}_{21}C_{21} = \frac{1}{2} \times 2^{21} = 2^{20}$$

즉 $2^{20} = 2^k$ 이므로 $k=20$

답 20

참고 원소의 개수가 n 인 집합 A 의 원소 중 m 개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 ${}_nC_m$ 이다. (단, $m \leq n$)

1 확률의 개념과 활용

특강 확인 문제

p.64

1

각 회전판에는 4개의 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있으므로 서로 다른 두 개의 회전판을 동시에 돌릴 때, 나오는 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

두 회전판에서 나온 수의 합이 5가 되는 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로 두 수의 합이 5가 될 확률은

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

두 회전판에서 나온 수의 합이 7이 되는 경우는 (3, 4), (4, 3)의 2가지이므로 두 수의 합이 7이 될 확률은

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

2

(1) 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

주사위가 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(2) 동전의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

주사위가 5보다 큰 수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{12}$

3

지수가 자유투를 실패할 확률은 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

민지가 자유투를 실패할 확률은 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

답 $\frac{9}{20}$

4

수진이가 불합격할 확률은 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

영호가 불합격할 확률은 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ (적어도 한 사람은 합격할 확률)

$$= 1 - (\text{두 사람 모두 불합격할 확률})$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

확인 문제

p.66~84

01

$A = \{4, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, C = \{2, 3, 5, 7\},$

$D = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$A \cap B = \{8\}, A \cap C = \emptyset, A \cap D = \emptyset, B \cap C = \{5, 7\},$

$B \cap D = \{9\}, C \cap D = \{3\}$

따라서 서로 배반인 두 사건은 A 와 C, A 와 D 이다.

답 A 와 C, A 와 D

02

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이때 $A = \{5, 6\}$ 이므로 사건 A 의 여사건 A^C 은

$A^C = \{1, 2, 3, 4\}$

답 $\{1, 2, 3, 4\}$

03

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A 의 여사건, 즉

$A^C = \{1, 3, 4, 6\}$ 의 부분집합이다.

따라서 구하는 사건의 개수는

$$2^4 = 16$$

답 16

04

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A 의 여사건, 즉

$A^C = \{2, 4, 6, 8\}$ 의 부분집합이고
 사건 B 와 서로 배반인 사건은 B 의 여사건, 즉
 $B^C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합이다.
 즉 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은
 $A^C \cap B^C = \{2, 6\}$ 의 부분집합이다.
 따라서 구하는 사건의 개수는
 $2^2 = 4$

답 4

05

표본공간을 S 라 하면 $n(S) = 6 \times 6 = 36$

(1) 나오는 두 눈의 수의 합이 5보다 작은 사건을 A 라 하면
 $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$
 이므로 $n(A) = 6$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 B 라 하면
 주사위의 눈의 수 중에서 홀수는 1, 3, 5의 3개, 짝수
 는 2, 4, 6의 3개이고 (홀수) $\times$ (짝수) = (짝수),
 (짝수) $\times$ (홀수) = (짝수), (짝수) $\times$ (짝수) = (짝수)이므로
 $n(B) = 3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 = 27$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

(3) 나오는 두 눈의 수의 차가 3 이상인 사건을 C 라 하자.

(i) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의
 6가지

(ii) 나오는 두 눈의 수의 차가 4인 경우

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

(iii) 나오는 두 눈의 수의 차가 5인 경우

(1, 6), (6, 1)의 2가지

(i)~(iii)에서 $n(C) = 6 + 4 + 2 = 12$

따라서 구하는 확률은

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$

06

집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합의 개수는

$$2^3 = 8$$

집합 A 의 부분집합 중 원소 2를 포함하는 부분집합의 개

수는

$$2^{3-1} = 2^2 = 4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

참고 원소의 개수가 n 인 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 에
 대하여

(1) 특정한 k 개의 원소를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집
 합의 개수 $\Rightarrow 2^{n-k}$ (단, $k < n$)

(2) 특정한 m 개의 원소를 포함하지 않는 집합 A 의 부분집
 합의 개수 $\Rightarrow 2^{n-m}$ (단, $m < n$)

07

6명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$$6! = 720$$

A, B 사이에 앉을 2명을 택하여 일렬로 앉히는 경우의
 수는

$${}_4P_2 = 12$$

A, B 를 포함한 4명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬
 로 앉히는 경우의 수는

$$3! = 6$$

A 와 B 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

즉 A, B 사이에 2명이 앉는 경우의 수는

$$12 \times 6 \times 2 = 144$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{144}{720} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

08

5명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$$5! = 120$$

부모를 제외한 3명의 자녀가 일렬로 앉는 경우의 수는

$$3! = 6$$

$$\vee \boxed{\text{자녀}} \vee \boxed{\text{자녀}} \vee \boxed{\text{자녀}} \vee$$

자녀 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2곳에 부모가 앉
 는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

즉 부모가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$$6 \times 12 = 72$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

$$\text{답 } \frac{3}{5}$$

Lecture 이웃하지 않는 조건이 있는 순열

이웃하지 않는 대상을 포함한 순열의 수는 다음과 같이 구한다.

- ① 이웃하지 않는 대상을 제외한 나머지를 일렬로 나열하는 순열의 수를 구한다.
- ② 이웃하지 않는 대상을 ①에서 나열한 대상들의 사이사이와 양 끝에 나열하는 순열의 수를 구한다.
- ③ ①, ②에서 얻은 순열의 수를 곱한다.

09

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$$4 \times 4! = 96$$

이때 5의 배수이라면 일의 자리의 숫자가 0이어야 하므로 5의 배수인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

$$\text{답 } \frac{1}{4}$$

10

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

이때 4의 배수이라면 끝의 두 자리의 숫자가 4의 배수, 즉 12, 24, 32, 52이어야 하므로 4의 배수인 자연수의 개수는

$$4 \times {}_3P_2 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$\text{답 } \frac{1}{5}$$

11

6개의 문자 p, e, n, c, i, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

양 끝에 p와 l을 고정시키고 그 사이에 나머지 4개의 문

자 e, n, c, i를 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

p와 l이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

즉 p와 l이 양 끝에 오는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

$$\text{답 } \frac{1}{15}$$

12

천의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 3, 4의 5가지이므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4 \times {}_5\Pi_3 = 4 \times 5^3 = 500$$

이때 짝수이라면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 하므로 짝수의 개수는

$$3 \times 4 \times {}_5\Pi_2 = 3 \times 4 \times 5^2 = 300$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{300}{500} = \frac{3}{5}$

$$\text{답 } \frac{3}{5}$$

13

짝수인 네 자리 자연수는 일의 자리의 숫자가 2이어야 하므로 3개의 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 짝수인 네 자리 자연수의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

이때 짝수이면서 2000보다 작은 네 자리 자연수는

$$1\square\square 2 \text{ 꼴이어야 하므로 그 개수는}$$

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\text{답 } \frac{1}{3}$$

14

서로 다른 종류의 노트 4권을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

서로 다른 종류의 노트 4권 중에서 A가 받을 1권을 선택

하는 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

나머지 노트 3권을 B와 C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

즉 A가 1권만 받는 경우의 수는

$$4 \times 8 = 32$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{81}$

$$\text{답 } \frac{32}{81}$$

15

7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7! = 5040$$

A, B, C의 순서가 정해져 있으므로 A, B, C를 모두 같은 문자 X로 생각하면 X, X, X, D, E, F, G의 7개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 X를 각각 A, B, C로 바꾸면 된다.

즉 A, B, C를 이 순서대로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{840}{5040} = \frac{1}{6}$$

$$\text{답 } \frac{1}{6}$$

16

7개의 문자 b, a, l, l, b, o, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

b와 l을 제외한 나머지 문자 a, o, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

a, o, y 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 b, b, l, l을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

즉 b, b, l, l 중에서 어느 두 문자도 이웃하지 않는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{36}{1260} = \frac{1}{35}$$

$$\text{답 } \frac{1}{35}$$

17

7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

(1) 흰 공 2개 중에서 1개, 빨간 공 3개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_2 = 2 \times 3 = 6$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{35}$

(2) 검은 공 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_2C_2 = 1$$

이때 나머지 1개의 공을 흰 공 또는 빨간 공 중에서 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

즉 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$$1 \times 5 = 5$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

$$\text{답 } (1) \frac{6}{35} \quad (2) \frac{1}{7}$$

18

8자루의 볼펜 중에서 3자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

(i) 빨간색 볼펜 2자루, 다른 색 볼펜 1자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$$

(ii) 빨간색 볼펜 3자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$

(iii) 파란색 볼펜 2자루, 다른 색 볼펜 1자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_5C_1 = 3 \times 5 = 15$$

(iv) 파란색 볼펜 3자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

(i)~(iv)에서 같은 색의 볼펜을 2자루 이상 꺼내는 경우의 수는

$$24 + 4 + 15 + 1 = 44$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{44}{56} = \frac{11}{14}$$

$$\text{답 } \frac{11}{14}$$

19

방정식 $x+y+z=12$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = 91$$

$x=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 방정식 $y+z=8$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_2H_8={}_9C_8=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{91}$

$$\boxed{\frac{9}{91}}$$

참고 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

20

전체 학생 수는 100명
읽은 책의 권수가 3권 미만인 학생 수는 $28+32=60$ (명)
따라서 구하는 확률은

$$\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\frac{3}{5}}$$

21

주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 n , 검은 공의 개수를 m 이라 하자.

$(m+n)$ 개의 공 중에서 1개를 꺼낼 때, 흰 공일 확률은

$$\frac{{}_n C_1}{{}_{m+n} C_1}=\frac{n}{m+n}$$

여러 번의 시행에서 5번에 2번 꼴로 흰 공이었으므로 통계적 확률은 $\frac{2}{5}$

$$\text{즉 } \frac{n}{m+n}=\frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$2m+2n=5n \quad \therefore n=\frac{2}{3}m$$

따라서 흰 공의 개수는 검은 공의 개수의 $\frac{2}{3}$ 배이다.

$$\boxed{\frac{2}{3} \text{배}}$$

22

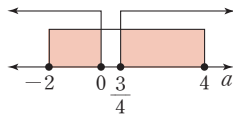
이차방정식 $x^2-4ax+3a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3a=4a^2-3a=a(4a-3)$$

실근을 가지려면 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$a(4a-3) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq \frac{3}{4}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-2)\}+\left(4-\frac{3}{4}\right)}{4-(-2)}=\frac{7}{8}$$

$$\boxed{\frac{7}{8}}$$

23

원판의 넓이는 $\pi \times 5^2=25\pi$

$2 \leq \overline{OA} \leq 3$ 을 만족시키는 점 A의 영역의 넓이는

$$\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2 = 5\pi$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5\pi}{25\pi}=\frac{1}{5}$$

$$\boxed{\frac{1}{5}}$$

24

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}}$$

25

$$P(A^c \cup B^c) = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

이때 $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{1}{4} = P(A) - \frac{1}{5} \quad \therefore P(A) = \frac{9}{20}$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

$$\boxed{\frac{11}{20}}$$

26

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{5} \text{에서}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

$$\text{답 } \frac{9}{20}$$

27

사과를 생산하는 농가인 사건을 A , 배를 생산하는 농가인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.25$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.6 + 0.5 - 0.25 = 0.85$$

$$\text{답 } 0.85$$

28

나오는 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 사건을 A , 4의 배수인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 3과 4의 최소공배수인 12의 배수인 사건이다.

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), \\ (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$\text{이므로 } n(A) = 12$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), \\ (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

$$\text{이므로 } n(B) = 9$$

$$A \cap B = \{(6, 6)\} \text{이므로 } n(A \cap B) = 1$$

$$\therefore P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{5}{9}$$

$$\text{답 } \frac{5}{9}$$

29

8송이의 장미 중에서 3송이를 고를 때, 3송이 모두 붉은 장미인 사건을 A , 3송이 모두 노란 장미인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}, P(B) = \frac{{}_3C_3}{{}_8C_3} = \frac{1}{56}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{28} + \frac{1}{56} = \frac{11}{56}$$

$$\text{답 } \frac{11}{56}$$

30

7개의 문자 t, e, a, c, h, e, r를 일렬로 나열할 때, 맨 앞에 t가 오는 사건을 A , 맨 앞에 e가 오는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}} = \frac{1}{7}, P(B) = \frac{\frac{6!}{7!}}{\frac{2!}{2!}} = \frac{2}{7}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{답 } \frac{3}{7}$$

31

검은 공이 흰 공보다 많이 나오려면 꺼낸 4개의 공 중에서 검은 공이 3개 또는 4개이어야 한다.

검은 공이 3개인 사건을 A , 검은 공이 4개인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_7C_3 \times {}_4C_1}{{}_{11}C_4} = \frac{14}{33}$$

$$P(B) = \frac{{}_7C_4 \times {}_4C_0}{{}_{11}C_4} = \frac{7}{66}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{14}{33} + \frac{7}{66} = \frac{35}{66}$$

$$\text{답 } \frac{35}{66}$$

32

택한 자연수가 2의 배수인 사건을 A , 3의 배수인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 2와 3의 최소공배수인 6의 배수인 사건이다.

$$\text{이때 } P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{20} \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\text{답 } \frac{7}{20}$$

참고 택한 자연수가 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다. 즉 택한 자연수가 6과 서로소인 사건은

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$$

33

10개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 빨간 공을 적어도 한 개 이상 꺼내는 사건을 A 라 하면 A^C 은 2개 모두 파란 공을 꺼내는 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_{10-n}C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

이때 $P(A) = 1 - P(A^C)$ 이므로

$$\frac{14}{15} = 1 - \frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

$$\frac{(10-n)(9-n)}{90} = \frac{1}{15}, n^2 - 19n + 84 = 0$$

$$(n-7)(n-12) = 0 \quad \therefore n = 7 \quad (\because 0 < n < 10)$$

답 7

34

9개의 공 중에서 3개를 꺼낼 때, 흰 공이 2개 이하로 나오는 사건을 A 라 하면 A^C 은 흰 공이 3개 나오는 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

답 $\frac{20}{21}$

35

네 자리 자연수가 5600 이하인 사건을 A 라 하면 A^C 은 5600 초과인 사건이다.

이때 5600 초과인 자연수는 56□□ 또는 6□□□ 꼴이다.

(i) 56□□ 꼴일 확률은

$$\frac{{}_4P_2}{{}_6P_4} = \frac{1}{30}$$

(ii) 6□□□ 꼴일 확률은

$$\frac{{}_5P_3}{{}_6P_4} = \frac{1}{6}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^C) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

연습문제

p.85~89

1

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A 의 여사건, 즉

$A^C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ 의 부분집합이고

사건 B 와 서로 배반인 사건은 B 의 여사건, 즉

$B^C = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합이다.

즉 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은

$A^C \cap B^C = \{4, 7, 8\}$ 의 부분집합이다.

따라서 구하는 사건의 개수는

$$2^3 = 8$$

답 8

2

한 개의 주사위를 4번 던져서 나오는 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

나오는 네 눈의 수가 서로 다른 경우의 수는

$${}_6P_4 = 360$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$$

답 ⑤

3

7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7! = 5040$$

2와 3을 한 숫자로 생각하여 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

2와 3이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

즉 2와 3이 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$720 \times 2 = 1440$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1440}{5040} = \frac{2}{7}$$

답 ②

4

6명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

B를 먼저 뽑고, A를 제외한 나머지 4명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

답 ②

5

정사면체를 두 번 던졌을 때, 나오는 경우의 수는

$$4 \times 4=16$$

$$\overline{OA} \geq 3 \text{에서 } \sqrt{x^2+y^2} \geq 3$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 9$$

$x^2+y^2 \geq 9$ 를 만족시키는 x, y 의 값을 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

$$(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

의 7가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7}{16}$$

답 ⑤

6

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 4P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= 3P(A \cap B)$$

$$\text{즉 } 3P(A \cap B) = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

답 ④

7

9개의 공 중에서 3개를 꺼낼 때, 3개 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 3개 모두 검은 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{21}$$

$$P(B) = \frac{{}_5C_3}{{}_9C_3} = \frac{5}{42}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{21} + \frac{5}{42} = \frac{1}{6}$$

답 ②

8

9개의 제품 중에서 2개를 꺼낼 때, 적어도 한 개가 불량품인 사건을 A라 하면 A^C 은 꺼낸 2개의 제품 모두 불량품이 아닌 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_6C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

답 ④

9

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이차방정식 $x^2 + 2ax + 3b = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3b$$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2ax + 3b > 0$ 이

성립하려면 $\frac{D}{4} < 0$ 이어야 하므로

$$a^2 - 3b < 0 \quad \therefore a^2 < 3b$$

$a^2 < 3b$ 를 만족시키는 a, b 의 값을 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2),$$

$$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$

$$(4, 6) \text{의 15가지이다.}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

답 ②

10

집합 X에서 X로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

$f(2) + f(3) + f(4) = 7$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

답 ①

11

두 사건 A^C, B^C 이 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}
 P(A^c \cap B^c) &= 0 \\
 P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0 \\
 \therefore P(A \cup B) &= 1 \\
 \text{이때 } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ 이므로} \\
 1 &= \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{8} \\
 \therefore P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

12

흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A 라 하면 A^c 은 흰색 손수건이 없거나 1장인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_4C_0 \times {}_5C_4 + {}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

답 ③

13

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

주어진 조건에서 $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$ 이므로 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례로 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키면 된다.

즉 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

답 5/16

14

나오는 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A , 차가 3인 사건을 B 라 하면

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

이므로 $n(A) = 5$

$$B = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

이므로 $n(B) = 6$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{36}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

답 11/36

15

만의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 3, 4의 5가지이므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$$4 \times {}_5\Pi_4 = 4 \times 5^4 = 2500$$

이때 4의 배수이라면 끝의 두 자리의 숫자가 00, 04, 12, 20, 24, 32, 40, 44이어야 하므로 4의 배수인 자연수의 개수는

$$8 \times 4 \times {}_5\Pi_2 = 8 \times 4 \times 5^2 = 800$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{800}{2500} = \frac{8}{25}$$

답 ④

16

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{6! \times 3!} = 84 \quad \dots\dots ①$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 45 \quad \dots\dots ②$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{45}{84} = \frac{15}{28} \quad \dots\dots ③$$

답 15/28

채점 기준	비율
① A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
② A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
③ A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, P 지점을 거쳐서 갈 확률을 구할 수 있다.	20%

참고 주어진 도로망에서 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, a, a, b, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

17

1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

이때 $a, 6, c$ 에서 $a \leq 5, c \geq 7$ 이어야 하므로 b 가 6인 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 = 5 \times 4 = 20$$

즉 b 가 6일 확률은

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

따라서 $p=6, q=1$ 이므로

$$p+q=6+1=7$$

답 7

18

9개의 자연수 중에서 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

세 자연수의 곱이 10의 배수이려면 세 자연수 중에서 5가 반드시 포함되고 짝수가 적어도 하나 포함되어야 한다.

5를 먼저 뽑고, 나머지 8개 중에서 2개의 자연수를 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

5를 먼저 뽑고, 짝수를 제외한 1, 3, 7, 9 중에서 2개의 자연수를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

즉 세 자연수의 곱이 10의 배수인 경우의 수는

$$28 - 6 = 22$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{22}{84} = \frac{11}{42}$$

답 $\frac{11}{42}$

19

6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되는 사건을 A 라 하면 A^c 은 두 수의 합이 10 초과가 되는 사건, 즉 양 끝에 5와 6이 적힌 카드가 놓이는 사건이다.

양 끝에 5와 6이 적힌 카드를 놓고 그 사이에 1, 2, 3, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

5와 6이 적힌 카드를 서로 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

즉 양 끝에 5와 6이 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

답 ⑤

20

t끼리 이웃하는 사건을 A , e끼리 이웃하는 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 t끼리 이웃하고 e끼리 이웃하는 사건이므로

$$n(A) = \frac{5!}{2!} = 60, n(B) = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$n(A \cap B) = 4! = 24$$

이때 6개의 문자 l, e, t, t, e, r를 일렬로 나열하는 경우

의 수가 $\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$ 이므로

$$P(A) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{24}{180} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{15}$

Lecture 이웃하는 조건이 있는 순열

이웃하는 대상을 포함한 순열의 수는 이웃하는 대상을 한 문자로 생각하고 대상을 포함한 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

21

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - P(A \cap B)$$

$$= \frac{27}{20} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{27}{20} - P(A \cup B) \quad \dots\dots ①$$

이때 $P(A \cup B) \geq P(A), P(A \cup B) \geq P(B)$ 이므로

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{4}, P(A \cup B) \geq \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1 (\because 0 \leq P(A \cup B) \leq 1)$$

㉠에서 $P(A \cup B)$ 의 값이 최대일 때, $P(A \cap B)$ 의 값이 최소이다.

즉 $P(A \cap B)$ 의 값은 $P(A \cup B)=1$ 일 때 최소이고, 최소값 m 은

$$m = \frac{27}{20} - 1 = \frac{7}{20}$$

$$\therefore 20m = 20 \times \frac{7}{20} = 7$$

답 7

22

Step by Step

집합 X 에서 X 로의 함수의 개수를 구한다.

$f(2)f(3)f(4)$ 의 값이 8의 배수인 사건의 여사건을 구한다.

여사건의 확률을 구한 후, 이 값을 1에서 뺀다.

집합 X 에서 X 로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

$f(2)f(3)f(4)$ 의 값이 8의 배수이라면 세 함수값의 곱에 소인수 2가 3개 이상이어야 한다.

$f(2)f(3)f(4)$ 의 값이 8의 배수인 사건을 A 라 하면 A^c 은 $f(2)f(3)f(4)$ 의 값이 8의 배수가 아닌 사건, 즉 세 함수값의 곱에 소인수 2가 2개 이하인 사건이다.

(i) 소인수 2의 개수가 0인 경우

3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우이므로 그 개수는

$$\frac{3!}{3!} = 1$$

(ii) 소인수 2의 개수가 1인 경우

2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우이므로 그 개수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(iii) 소인수 2의 개수가 2인 경우

2, 2, 3 또는 4, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우이므로 그 개수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

(i)~(iii)에서 $n(A^c) = 1 + 3 + 6 = 10$

$$\therefore P(A^c) = \frac{10}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$$

답 ②

23

$a^2 - 3ab + 2b^2 \neq 0$ 인 사건을 A 라 하면

A^c 은 $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ 인 사건이다.

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \text{에서 } (a-b)(a-2b) = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } a=2b$$

(i) $a=b$ 인 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

(ii) $a=2b$ 인 경우는

(2, 1), (4, 2), (6, 3)의 3가지

(i), (ii)에서 $n(A^c) = 6 + 3 = 9$

$$\therefore P(A^c) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

24

6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 2가 적어도 하나 있는 사건을 A 라 하면 A^c 은 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 2가 없는 사건이다.

이때 가능한 경우의 수는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1, 1, 1, 3만 나열하는 경우의 수와 같다.

(i) 1, 1, 1을 나열하는 경우

1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{3!} = 1$$

나머지 세 자리에 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

즉 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1, 1, 1을 나열하는 경우의 수는

$$1 \times 3 = 3$$

(ii) 1, 1, 3을 나열하는 경우

1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

나머지 세 자리에 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

즉 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

$$(i), (ii) \text{에서 } n(A^C) = 3 + 9 = 12$$

$$\text{즉 } P(A^C) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

따라서 $a=5, b=4$ 이므로

$$a-b=5-4=1$$

답 1

Level Up 연습문제

p. 90

1

8개의 원소 중에서 서로 다른 두 원소 m, n 을 택하는 경우의 수는 8개의 원소 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_8P_2 = 56$$

$3'''$ 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고, $8''$ 의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 반복되므로 $3''' + 8''$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우는 다음과 같다.

(i) $3'''$, $8''$ 의 일의 자리의 숫자가 각각 9, 4인 경우

m 의 값은 2, 6의 2개, n 의 값은 2, 6의 2개이므로

(m, n) 의 순서쌍은 (2, 6), (6, 2)의 2가지

(ii) $3'''$, $8''$ 의 일의 자리의 숫자가 각각 7, 6인 경우

m 의 값은 3, 7의 2개, n 의 값은 4, 8의 2개이므로

(m, n) 의 순서쌍은 (3, 4), (3, 8), (7, 4), (7, 8)의 4가지

(iii) $3'''$, $8''$ 의 일의 자리의 숫자가 각각 1, 2인 경우

m 의 값은 4, 8의 2개, n 의 값은 3, 7의 2개이므로

(m, n) 의 순서쌍은 (4, 3), (4, 7), (8, 3), (8, 7)의 4가지

(i)~(iii)에서 $3''' + 8''$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는 $2 + 4 + 4 = 10$ 이므로 그 확률은

$$\frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

따라서 $p=28, q=5$ 이므로

$$p+q=28+5=33$$

답 33

2

4개의 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 문자열의 개수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

(i) a 가 한 개만 포함되는 경우

네 자리 중에서 a 가 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

나머지 세 자리에 b, c, d 를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

즉 a 가 한 개만 포함되는 경우의 수는

$$4 \times 27 = 108$$

(ii) b 가 한 개만 포함되는 경우

네 자리 중에서 b 가 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

나머지 세 자리에 a, c, d 를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

즉 b 가 한 개만 포함되는 경우의 수는

$$4 \times 27 = 108$$

(iii) a, b 가 각각 한 개씩 포함되는 경우

네 자리 중에서 a, b 가 들어갈 두 자리를 선택해서 a, b 를 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

나머지 두 자리에 c, d 를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

즉 a, b 가 각각 한 개씩 포함되는 경우의 수는

$$12 \times 4 = 48$$

(i)~(iii)에서 a 가 한 개만 포함되거나 b 가 한 개만 포함되는 경우의 수는 $108 + 108 - 48 = 168$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{168}{256} = \frac{21}{32}$$

답 ③

3

7장의 카드 중에서 임의로 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

뽑은 3장의 카드에 적힌 숫자 중에서 2개 이상의 숫자가 연속인 사건을 A 라 하면 A^C 은 3개의 숫자가 모두 연속이 아닌 사건이다.

$$A^C = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 3, 7), (1, 4, 6), (1, 4, 7), (1, 5, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 7)\}$$

이므로 $n(A^c)=10$

$$\therefore P(A^c)=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7} \quad \text{답 } \frac{5}{7}$$

4

$a+b=8$ 인 사건을 A , $b \geq c$ 인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 $a+b=8$ 이고 $b \geq c$ 인 사건이다.

(i) $a+b=8$ 인 경우

$a+b=8$ 을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 의 5가지이고 c 의 값은 1부터 6까지의 모든 자연수가 가능하므로

$$P(A)=\frac{5}{6^2} \times \frac{6}{6}=\frac{5}{36}$$

(ii) $b \geq c$ 인 경우

$b \geq c$ 를 만족시키는 b, c 의 순서쌍 (b, c) 의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

a 의 값은 1부터 6까지의 모든 자연수가 가능하므로

$$P(B)=\frac{6}{6} \times \frac{21}{6^2}=\frac{7}{12}$$

(iii) $a+b=8$ 이고 $b \geq c$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 에 대하여 c 의 값을 구하면 다음과 같다.

$(2, 6)$ 일 때, $c \leq 6$ 이므로 c 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

$(3, 5)$ 일 때, $c \leq 5$ 이므로 c 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

$(4, 4)$ 일 때, $c \leq 4$ 이므로 c 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지

$(5, 3)$ 일 때, $c \leq 3$ 이므로 c 의 값은 1, 2, 3의 3가지

$(6, 2)$ 일 때, $c \leq 2$ 이므로 c 의 값은 1, 2의 2가지

$$\therefore P(A \cap B)=\frac{6+5+4+3+2}{6^3}=\frac{5}{54}$$

(i)~(iii)에서 $a+b=8$ 또는 $b \geq c$ 일 확률은

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$=\frac{5}{36}+\frac{7}{12}-\frac{5}{54}=\frac{17}{27}$$

따라서 $p=27, q=17$ 이므로

$$p+q=27+17=44 \quad \text{답 } 44$$

2 조건부확률

확인 문제

p.93~106

01

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= P(A) + 0.4 - 0.6 \\ &= P(A) - 0.2 \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) - P(A \cap B) = 0.2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.2 \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap B) = 0.2 \times P(A) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{0.4} = \frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

02

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B^c|A^c) &= \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{P((A \cup B)^c)}{P(A^c)} \\ &= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \frac{5}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

03

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \text{ 이므로}$$

$$P(A^c \cap B) = P(B)P(A^c|B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

이때 $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ 이고 $A \cap B$ 와 $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cap B) &= P(B) - P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

04

임의로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 A , 소수인 사건을 B 라 하면

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

05

임의로 뽑은 한 명이 여자인 사건을 A , 라켓 A 를 선호하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

06

임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하는 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면 A^c 은 임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하지 않는 학생인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{50 - (14 + 6)}{50} = \frac{3}{5}$$

또 $A^c \cap B$ 는 임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하지 않는 남학생인 사건이므로

$$P(A^c \cap B) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

07

첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A , 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B 라 하면
첫 번째에 검은 공이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

첫 번째에 검은 공이 나왔을 때, 두 번째에도 검은 공이 나올 확률은

$$P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\text{답 } \frac{7}{15}$$

08

A 가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A , B 가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B 라 하면

A 가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

A 가 당첨 제비를 뽑았을 때, B 도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(B|A) = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$\text{답 } \frac{1}{45}$$

09

시합에서 불펜 투수 중 오른손 투수가 나오는 사건을 A , A 선수가 불펜 투수와 대결에서 안타를 치는 사건을 E 라 하자.

(i) 오른손 투수가 나오고 안타를 칠 확률

$$P(A) = 0.4, P(E|A) = 0.3 \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

(ii) 왼손 투수가 나오고 안타를 칠 확률

$$P(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6, P(E|A^c) = 0.25 \text{ 이므로}$$

$$P(A^c \cap E) = P(A^c)P(E|A^c) = 0.6 \times 0.25 = 0.15$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= 0.12 + 0.15 = 0.27 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 0.27$$

10

제품을 하나 골랐을 때, 공장 A 에서 생산된 제품인 사건을 A , 공장 B 에서 생산된 제품인 사건을 B , 불량품인 사건을 E 라 하자.

(i) 공장 A 에서 생산된 제품이 불량품일 확률

$$P(A) = 0.7, P(E|A) = 0.02 \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = 0.7 \times 0.02 = 0.014$$

(ii) 공장 B 에서 생산된 제품이 불량품일 확률

$$P(B) = 0.3, P(E|B) = 0.05 \text{ 이므로}$$

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B) = 0.3 \times 0.05 = 0.015$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= 0.014 + 0.015 = 0.029 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 0.029$$

11

첫 번째에 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 A , 두 번째에 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 B 라 하자.

(i) 첫 번째와 두 번째에 모두 검은 공을 꺼낼 확률

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

(ii) 첫 번째에 흰 공을 꺼내고, 두 번째에 검은 공을 꺼낼 확률

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

(i), (ii)에서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

12

상자 A 를 택하는 사건을 A , 상자 B 를 택하는 사건을 B , 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나오는 사건을 E 라 하자.

(i) 상자 A 에서 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

(ii) 상자 B 에서 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률

$$\begin{aligned} P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}} = \frac{9}{17}$$

$$\text{답 } \frac{9}{17}$$

13

동전을 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$$A = \{(H, H), (H, T)\}, B = \{(H, H), (T, H)\},$$

$$C = \{(H, H)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{(H, H)\}, B \cap C = \{(H, H)\}, A \cap C = \{(H, H)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(B \cap C) = \frac{1}{4}, P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$\neg, P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

즉 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

$$\neg, P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$$

즉 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

$$\text{㉔}, P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$$

즉 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 $\neg$ 이다.

답 $\neg$

14

서로 다른 2개의 정사면체를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

밑면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (4, 1)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2)\}$$

$$B \cap C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (4, 1)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, P(B \cap C) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이고, 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

답 A와 B: 독립, B와 C: 종속

15

$$P(A^c) = 1 - P(A) \text{이므로 } 2P(A) = 1 - P(A)$$

$$3P(A) = 1 \quad \therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{에서}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}$$

16

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)}$$

$$= P(B) = \frac{3}{8} \text{에서}$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{답 } \frac{1}{8}$$

17

$$P(A^c) = 1 - P(A) \text{이므로 } \frac{2}{3} = 1 - P(A)$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{3}{4} = 1 - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 에서

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

18

두 학생 A, B 가 정답을 맞히는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

(1)(i) A 만 정답을 맞힐 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

(ii) B 만 정답을 맞힐 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

(2) A, B 중 적어도 한 사람이 정답을 맞히는 사건은 A, B 모두 정답을 맞히지 못하는 사건의 여사건이다.

A, B 모두 정답을 맞히지 못할 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{답 } (1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{7}{8}$$

19

기계 A 에서 불량품이 나오는 사건을 A , 기계 B 에서 불량품이 나오는 사건을 B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

이때 기계 A 에서 나온 제품만 불량품일 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{1}{3}(1 - p)$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3}(1 - p) = \frac{2}{9} \text{ 이므로 } 1 - p = \frac{2}{3}$$

$$\therefore p = \frac{1}{3}$$

$$\text{답 } \frac{1}{3}$$

20

양궁 선수가 활을 한 번 쏘아 10점 과녁을 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$ 이고, 맞히지 못할 확률은 $\frac{1}{5}$ 이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{48}{125}$$

$$\text{답 } \frac{48}{125}$$

21

학생이 문제를 맞힐 확률은 $\frac{2}{3}$ 이고, 문제를 맞히지 못할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{16}{27}$$

$$\text{답 } \frac{16}{27}$$

22

가영이가 온라인 게임에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 온라인 게임에서 이기지 못할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(i) 8번 이길 확률은

$${}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{45}{1024}$$

(ii) 9번 이길 확률은

$${}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{512}$$

(iii) 10번 이길 확률은

$${}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1024}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{45}{1024} + \frac{5}{512} + \frac{1}{1024} = \frac{7}{128}$$

$$\text{답 } \frac{7}{128}$$

23

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

(i) 서로 다른 2개의 동전을 던질 때 2개 모두 앞면이 나오고, 한 개의 주사위를 3번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{4} \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- (ii) 서로 다른 2개의 동전을 던질 때 뒷면이 1개 이상 나오고, 한 개의 주사위를 2번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{3}{4} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

참고 서로 다른 2개의 동전을 던질 때, 2개 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2개 모두 앞면이 나오지 않는 사건은 2개 모두 앞면이 나오는 사건의 여사건이므로 그 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

24

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

- (i) 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 소수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{2}{6} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

- (ii) 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 짝수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{3}{6} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

25

한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 r 라 하면 6의 약수 이외의 눈이 나오는 횟수는 $4-r$ 이다.

이때 5점을 얻으려면

$$2 \times r + (-1) \times (4-r) = 5, 3r - 4 = 5$$

$$3r = 9 \quad \therefore r = 3$$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$$

답 $\frac{32}{81}$

26

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 r 라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $5-r$ 이다.

이때 점수의 합이 6점 이하하려면

$$2 \times r + 1 \times (5-r) \leq 6, r + 5 \leq 6$$

$$\therefore r \leq 1$$

이때 r 는 5 이하의 음이 아닌 정수이므로

$$r=0 \text{ 또는 } r=1$$

따라서 동전을 5번 던져서 앞면이 0번 또는 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

답 $\frac{3}{16}$

연습문제

p. 107 ~ 111

1

$$P(A|B) = P(B|A) \text{ 이므로 } \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore P(A) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ 이므로}$$

$$1 = P(A) + P(A) - \frac{1}{4}, 2P(A) = \frac{5}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{8}$$

답 ③

2

임의로 선택한 학생이 진로 활동 B를 선택한 학생인 사건을 A, 1학년인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{9}{20}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

다른 풀이

임의로 한 명을 선택하였더니 진로 활동 B를 선택한 학생이었을 때, 이 학생이 1학년일 확률은 진로 활동 B를 선택한 학생 전체를 새로운 표본공간으로 생각하고, 그 중에서 1학년이 뽑힐 확률과 같으므로 구하는 확률은 $\frac{5}{9}$ 이다.

3

꺼낸 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 흰 공인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

4

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

두 눈의 수의 곱이 짝수인 경우는 두 눈의 수가 모두 홀수가 아닌 경우이므로

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

두 눈의 수의 곱이 짝수이면서 두 눈의 수의 합이 짝수인 경우는 두 눈의 수가 모두 짝수인 경우이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

답 ④

5

첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면 첫 번째에 검은 공이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{7}{11}$$

첫 번째에 검은 공이 나왔을 때, 두 번째에도 검은 공이 나올 확률은

$$P(B|A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{11} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{55}$$

답 $\frac{21}{55}$

6

한 개의 주사위를 던질 때, 5의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고,

그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$ 이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

답 ①

7

A 팀이 적어도 2번 이기는 경우는 A 팀이 2번 또는 3번 이기는 경우이므로 그 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^1 + {}_3C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{48}{125} + \frac{64}{125} = \frac{112}{125}$$

따라서 $p=125$, $q=112$ 이므로

$$p+q=125+112=237$$

답 237

8

상자 A를 선택하는 사건을 A, 상자 B를 선택하는 사건을 B, 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공인 사건을 E라 하자.

(i) 상자 A를 선택하여 꺼낸 공이 검은 공일 확률

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{20}$$

(ii) 상자 B를 선택하여 꺼낸 공이 검은 공일 확률

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{20}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

답 ③

참고 두 사건 A, E에 대하여

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= P(A)P(E|A) + P(A^c)P(E|A^c) \end{aligned}$$

9

갑과 을이 꺼낸 카드가 △가 그려진 카드인 사건을 각각 A, B라 하면 갑이 꺼낸 카드가 △가 그려진 카드일 확률은

$$P(A) = \frac{n}{n+4}$$

갑이 꺼낸 카드가 △가 그려진 카드일 때, 을이 꺼낸 카드가 △가 그려진 카드일 확률은

$$P(B|A) = \frac{n-1}{n+3}$$

이때 갑과 을이 꺼낸 카드가 모두 △가 그려진 카드일 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{n}{n+4} \times \frac{n-1}{n+3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{3}, 3n(n-1) = (n+3)(n+4)$$

$$3n^2 - 3n = n^2 + 7n + 12, 2n^2 - 10n - 12 = 0$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0, (n+1)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 6 (\because n \text{은 자연수})$$

답 6

10

갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 갑과 을이 모두 흰 공을 꺼낼 확률

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

..... ①

(ii) 갑이 빨간 공을 꺼내고 을이 흰 공을 꺼낼 확률

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

..... ②

(i), (ii)에서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{5}{14} + \frac{15}{56} = \frac{5}{8}$$

..... ③

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$$

..... ④

답 $\frac{4}{7}$

채점 기준

채점 기준	비율
① 갑과 을이 모두 흰 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	20%
② 갑이 빨간 공을 꺼내고 을이 흰 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	20%
③ 을이 흰 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	50%
④ 을이 꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 갑이 꺼낸 공도 흰 공일 확률을 구할 수 있다.	10%

11

표본공간을 S라 하면

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\therefore A \cap B = \{2\} \text{이므로 } A \cap B \neq \emptyset$$

즉 두 사건 A, B는 서로 배반이 아니다.

$$\therefore A \cap C = \{2, 6\} \text{이므로 } P(A \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(A)P(C) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{5}$$

즉 $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

$$\therefore B \cap C = \{2, 3\} \text{이므로 } P(B \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(B)P(C) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

즉 $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ 이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

12

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\text{이때 } P(A|B) = \frac{1}{3} \text{이므로 } P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \\ = P(A) - P(A)P(B)$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{4} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

답 ⑤

다른 풀이

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 A 와 B^c 도 서로 독립이다.

$$\text{이때 } P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{1}{3}P(B^c) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(B^c) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

참고 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c 과 B , A 와 B^c , A^c 과 B^c 도 각각 서로 독립이다.

13

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

한 개의 동전을 7번 던져서 앞면이 나온 횟수를 r 라 하면 앞면이 뒷면보다 3번 더 많이 나오므로 뒷면이 나오는 횟수는 $r-3$ 이다.

$$\text{즉 } r + (r-3) = 7 \text{이므로}$$

$$2r - 3 = 7 \quad \therefore r = 5$$

따라서 동전을 7번 던져서 앞면이 5번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}^7C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$$

답 ②

14

한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{3} \text{이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 } \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$p_1 = {}^4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

또 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고,

뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$p_2 = {}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$\text{따라서 } p_1 p_2 = \frac{8}{27} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{p_1 p_2} = 9$$

답 9

15

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 눈의 수의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

한 개의 주사위를 2번 던질 때, $a \times b$ 가 4의 배수인 사건을 A , $a + b \leq 7$ 인 사건을 B 라 하자.

(i) $a \times b$ 가 4의 배수인 경우는

$$(1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1),$$

$$(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4),$$

$$(6, 2), (6, 4), (6, 6)$$

의 15가지이므로

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(ii) $a \times b$ 가 4의 배수이면서 $a + b \leq 7$ 인 경우는

$$(1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$$

의 7가지이므로

$$P(A \cap B) = \frac{7}{36}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{15}$$

답 ②

16

주머니 A를 선택하는 사건을 A , 주머니 B를 선택하는 사건을 B , 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 E 라 하자.

(i) 주머니 A를 선택하여 꺼낸 공이 흰 공일 확률

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{21}{50} = \frac{21}{100}$$

(ii) 주머니 B를 선택하여 꺼낸 공이 흰 공일 확률

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{14}{50} = \frac{7}{50}$$

(i), (ii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ = \frac{21}{100} + \frac{7}{50} = \frac{7}{20}$$

꺼낸 공이 흰 공일 때, 이 공이 주머니 A에서 꺼낸 공일 확률 p 는

$$p = P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{7}{20}} = \frac{3}{5}$$

꺼낸 공이 흰 공일 때, 이 공이 주머니 B에서 꺼낸 공일 확률 q 는

$$q = P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{7}{20}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore p - q = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

17

임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로 축구를 선택한 남학생 수는

$$100 \times \frac{2}{5} = 40(\text{명})$$

100명의 학생 중에서 축구를 선택한 학생 수는 70명, 야구를 선택한 학생 수는 30명이므로 학생들이 선택한 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

성별 \ 종목	여학생	남학생	합계
축구	30	40	70
야구	10	20	30
합계	40	60	100

임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

답 ②

18

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 크려면 앞면이 4회 이상 나와야 한다.

(i) 앞면이 4회, 뒷면이 2회 나올 확률은

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

(ii) 앞면이 5회, 뒷면이 1회 나올 확률은

$${}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$$

(iii) 앞면이 6회, 뒷면이 0회 나올 확률은

$${}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

따라서 $p = 32$, $q = 11$ 이므로

$$p + q = 32 + 11 = 43$$

답 43

19

한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이고, 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상이라면 4번의 시행 중 6의 약수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

(i) 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

(ii) 6의 약수의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$$

(iii) 6의 약수의 눈이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{27} + \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{8}{9}$$

답 ④

20

A 팀이 5번째 경기에서 3승을 하는 사건을 A, A 팀이 B 팀을 2번 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

A 팀이 5번째 경기에서 3승을 하려면 5번째 경기인 B 팀과의 경기에서 이겨야 한다. 이때 A 팀이 5번째 경기에서 3승을 하는 경우와 각각의 확률은 다음 표와 같다.

B	C	B	C	B	확률
승	승	패	패	승	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$
승	패	승	패	승	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
승	패	패	승	승	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$
패	패	승	승	승	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$
패	승	패	승	승	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$
패	승	승	패	승	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{36} = \frac{13}{72}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{13}{72}} = \frac{8}{13}$$

답 ⑤

21

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{이므로}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A^c)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(A^c)}$$

$$= \frac{P(B)\{1 - P(A)\}}{1 - P(A)}$$

$$= P(B)$$

$$\therefore P(B|A) = P(B|A^c)$$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{이므로}$$

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)\{1 - P(A)\}}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A)$$

$$\therefore P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 0 \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B) = 0 \quad \therefore B \subset A$$

즉 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{이므로}$$

$$P(A|B^c)\{1 - P(B^c|A^c)\}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \left\{ 1 - \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} \right\}$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)}$$

$$\times \frac{P(A^c) - \{P(A^c) - P(A^c \cap B)\}}{P(A^c)}$$

$$= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{P(B^c)} \times \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$$

$$= \frac{P(A)\{1 - P(B)\}}{P(B^c)} \times \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A^c)}$$

$$= \frac{P(A)P(B^c)}{P(B^c)} \times \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(A^c)}$$

$$= P(A) \times \frac{P(B)\{1 - P(A)\}}{P(A^c)}$$

$$= P(A) \times \frac{P(B)P(A^c)}{P(A^c)}$$

$$= P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A|B^c)\{1 - P(B^c|A^c)\}$$

ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$

이때 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 이므로 $P(A)P(B) \neq 0$

즉 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이

ㄱ, ㄴ, ㄷ을 다음과 같이 해결할 수 있다.

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)}$$

$$= P(B)$$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^c 과 B도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$\therefore P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(B)P(A^c)}{P(A^c)}$$

$$= P(B)$$

$$\therefore P(B|A) = P(B|A^c)$$

ㄴ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c 과 B 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ \therefore P(A^c|B) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^c)P(B)}{P(B)} \\ &= P(A^c) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

ㄷ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ \text{두 사건 } A, B \text{가 서로 독립이면 두 사건 } A \text{와 } B^c, A^c \text{과 } B^c \text{도 서로 독립이므로} \\ P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ \therefore P(A|B^c) \{1 - P(B^c|A^c)\} \\ &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \times \left\{1 - \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)}\right\} \\ &= \frac{P(A)P(B^c)}{P(B^c)} \times \left\{1 - \frac{P(A^c)P(B^c)}{P(A^c)}\right\} \\ &= P(A) \{1 - P(B^c)\} \\ &= P(A)P(B) \\ \therefore P(A \cap B) &= P(A|B^c) \{1 - P(B^c|A^c)\} \end{aligned}$$

22

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_2 + {}_4C_2}{{}_7C_2} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{56}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르고, 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{56} + \frac{1}{7} = \frac{17}{56}$$

답 ④

23

Step by Step

직선 OP' 의 기울기를 구한다.



점 P' 의 좌표를 구한다.



직선 OP' 이 곡선 $y = x^2 - 0.5x + 1$ 에 접할 확률을 구한다.

직선 OP' 의 방정식을 $y = mx$ ($m > 0$)라 하자.

직선 $y = mx$ 가 곡선 $y = x^2 - 0.5x + 1$ 에 접하려면

$$x^2 - 0.5x + 1 = mx \text{에서 } 2x^2 - x + 2 = 2mx$$

$$2x^2 - (2m+1)x + 2 = 0$$

이차방정식 $2x^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2m+1)^2 - 16 = 0, 4m^2 + 4m - 15 = 0$$

$$(2m+5)(2m-3) = 0 \quad \therefore m = \frac{3}{2} (\because m > 0)$$

주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 r 라

하면 3의 배수의 눈이 나오지 않는 횟수는 $5-r$ 이므로

$$m = \frac{5-r}{r} = \frac{3}{2}, 3r = 10 - 2r \quad \therefore r = 2$$

이때 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{3}$ 이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로

구하는 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

답 $\frac{80}{243}$

Lecture

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 의 위치 관계는 이차방정식 $f(x) = g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

- (1) $D > 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) $D = 0 \Rightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
- (3) $D < 0 \Rightarrow$ 만나지 않는다.

Level Up 연습문제

p.112

1

(나), (다)에서 1개의 동전을 6번 던진 후 점 P 는 x 축의 방향으로 6만큼 평행이동하므로 $a = 6$

이때 $0 \leq b \leq 6$ 이므로 $a + b$ 가 3의 배수가 되도록 하는 b 의 값은 $b = 0, 3, 6$

(i) $a = 6, b = 0$ 인 경우

앞면이 6번, 뒷면이 0번 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

(ii) $a=6, b=3$ 인 경우

앞면이 3번, 뒷면이 3번 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

(iii) $a=6, b=6$ 인 경우

앞면이 0번, 뒷면이 6번 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{64} + \frac{5}{16} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

따라서 $p=32, q=11$ 이므로

$$p+q=32+11=43$$

답 43

2

시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 사건을 A , 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을 B 라 하자.

주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9이므로 이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 꺼낸 2개의 공의 색깔에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (①, ②) 또는 (②, ①)이어야 하므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (①, ③)이고 이 2개의 공 중 ①을 주머니에 다시 넣거나 꺼낸 2개의 공이 (②, ③)이고 이 2개의 공 중 ②를 주머니에 다시 넣어야 하므로

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

(i), (ii)에서

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

따라서 $p=3, q=2$ 이므로

$$p+q=3+2=5$$

답 5

3

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

3개의 H와 4개의 T를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는

$${}_5C_3 = 10$$

즉 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35-10) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{25}{128}$$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

4개의 H와 3개의 T를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{17}{64}$$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

(나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} & {}_7C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_7C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_7C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{21}{128} + \frac{7}{128} + \frac{1}{128} = \frac{29}{128} \end{aligned}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{25}{128} + \frac{17}{64} + \frac{29}{128} = \frac{11}{16}$$

답 ①

참고

(1) 3개의 H와 4개의 T를 일렬로 나열할 때, H가 이웃하지 않는 경우의 수는 먼저 4개의 T를 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 H를 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5C_3 = 10$

(2) 4개의 H와 3개의 T를 일렬로 나열할 때, H가 이웃하지 않는 경우는 HTHHTHTH의 1가지뿐이다.

1 확률분포 (1)

확인 문제

p. 116 ~ 132

01

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a+1}{9}$	$\frac{2a+1}{9}$	$\frac{3a+1}{9}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a+1}{9} + \frac{2a+1}{9} + \frac{3a+1}{9} = 1$$

$$\frac{2a+1}{3} = 1, 2a+1=3 \quad \therefore a=1$$

답 1

02

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{12}$	$\frac{a}{20}$	$\frac{a}{30}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{12} + \frac{a}{20} + \frac{a}{30} = 1$$

$$\frac{5}{6}a = 1 \quad \therefore a = \frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

03

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{6} + 2a + \frac{1}{3} = 1$$

$$3a + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

(2) $P(X=2) = \frac{1}{6}, P(X=3) = \frac{1}{3}$ 이므로

$$P(X=2 \text{ 또는 } X=3) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$

04

확률의 총합은 1이므로

$$a + 3a + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$4a + \frac{5}{9} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{9}$$

$$P(X=-2) = \frac{1}{9}, P(X=0) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(-2 \leq X \leq 0) = P(X=-2) + P(X=0)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

05

(1) 확률변수 X 는 배드민턴 팀에서 임의로 3명의 대표 선수를 선발할 때, 선발되는 남자 선수의 수이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.이때 8명의 선수 중에서 임의로 3명의 대표 선수를 선발하는 경우의 수는 ${}_8C_3$ 이고, 선발된 선수 중에서 남자 선수가 x 명인 경우의 수는 ${}_3C_x \times {}_5C_{3-x}$ 이므로 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_5C_{3-x}}{{}_8C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

확률변수 X 의 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_5C_3}}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_5C_2}}{{}_8C_3} = \frac{15}{28}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_1}}{{}_8C_3} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_5C_0}}{{}_8C_3} = \frac{1}{56}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) $P(1 \leq X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2)$

$$= \frac{15}{28} + \frac{15}{56} = \frac{45}{56}$$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{45}{56}$

06

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + a^2 = 1$$

$$4a^2 + 4a - 3 = 0, (2a+3)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 \leq a \leq 1)$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{2} - 2^2 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

☞ 평균: 2, 분산: $\frac{3}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

07

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{5} + a + \frac{3}{10} + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$E(X) = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$0 \times \frac{1}{5} + 1 \times a + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times b = \frac{3}{2}$$

$$a + \frac{3}{5} + 3b = \frac{3}{2} \quad \therefore a + 3b = \frac{9}{10} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{10}, b = \frac{1}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{33}{10}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{33}{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{20}$$

☞ $\frac{21}{20}$

08

(1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

앞면이 나오는 동전의 개수가 0인 경우는

(T, T, T)의 1가지

앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 경우는

(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지

앞면이 나오는 동전의 개수가 2인 경우는

(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)의 3가지

앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 경우는

(H, H, H)의 1가지

즉 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, P(X=1) = \frac{3}{8}, P(X=2) = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$(2) E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

☞ (1) 풀이 참조

(2) 평균: $\frac{3}{2}$, 분산: $\frac{3}{4}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

09

확률변수 X 는 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 검은 공의 개수이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_0}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_0 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

☞ $\frac{9}{25}$

10

세 개의 공을 꺼낼 때 받을 수 있는 금액을 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 100, 200, 300이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=100) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=200) = \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=300) = \frac{{}_4C_3 \times {}_2C_0}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100	200	300	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\therefore E(X) = 100 \times \frac{1}{5} + 200 \times \frac{3}{5} + 300 \times \frac{1}{5} = 200$$

따라서 구하는 기댓값은 200원이다.

☞ 200원

11

게임에서 받을 수 있는 상금의 금액을 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=50) = \frac{1}{4}, P(X=100) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=150) = \frac{1}{4}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 50 \times \frac{1}{4} + 100 \times \frac{1}{4} + 150 \times \frac{1}{4} = 75$$

따라서 구하는 기댓값은 75원이다.

☞ 75원

12

$$E(X) = 10, V(X) = 3 \text{이므로}$$

$$E(Y) = 25 \text{에서 } E(aX+b) = aE(X) + b = 25$$

$$\therefore 10a + b = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(Y) = 12 \text{에서}$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X) = 12$$

$$3a^2 = 12, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$a = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 20 + b = 25 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore ab = 2 \times 5 = 10$$

☞ 10

13

$$E(Y) = 10 \text{에서}$$

$$E(2X-2) = 2E(X) - 2 = 10$$

$$2E(X) = 12 \quad \therefore E(X) = 6$$

$$V(Y) = 8 \text{에서}$$

$$V(2X-2) = 2^2 V(X) = 8$$

$$4V(X) = 8 \quad \therefore V(X) = 2$$

$$\text{☞ } E(X) = 6, V(X) = 2$$

14

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$E(X) = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times 0 + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{22}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

따라서 확률변수 $3X+1$ 의 평균과 분산은

$$E(3X+1) = 3E(X) + 1 = 3 \times \frac{8}{3} + 1 = 9$$

$$V(3X+1) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{2}{9} = 2$$

☞ 평균: 9, 분산: 2

15

확률의 총합은 1이므로

$$a + 2a + 3a = 1$$

$$6a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

확률변수 X 의 평균, 분산, 표준편차는

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서 확률변수 $\frac{1}{a}X$, 즉 $6X$ 의 평균, 분산, 표준편차는

$$E(6X) = 6E(X) = 6 \times \frac{4}{3} = 8$$

$$V(6X) = 6^2 V(X) = 36 \times \frac{5}{9} = 20$$

$$\sigma(6X) = |6| \sigma(X) = 6 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$$

☞ 평균: 8, 분산: 20, 표준편차: $2\sqrt{5}$

16

확률변수 X 는 두 명의 대표를 뽑을 때, 뽑힌 여학생 대표의 수이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_0}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

따라서 확률변수 $Y=5X+8$ 의 평균과 분산은

$$E(Y) = E(5X+8) = 5E(X) + 8 = 5 \times \frac{6}{5} + 8 = 14$$

$$V(Y) = V(5X+8) = 5^2 V(X) = 25 \times \frac{9}{25} = 9$$

☞ 평균: 14, 분산: 9

17

확률변수 X 는 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 흰 공의 개수이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_0}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{8}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

따라서 확률변수 $Y=7X+2$ 의 분산은

$$V(Y) = V(7X+2) = 7^2 V(X) = 49 \times \frac{20}{49} = 20$$

☞ 20

18

(1) 씨앗 1개가 발아할 확률이 $\frac{3}{10}$ 이므로 확률변수 X 는

이항분포 $B\left(4, \frac{3}{10}\right)$ 을 따른다.

$$(2) P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(3) P(X \geq 2)$$

$$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= {}_4C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{3}{10}\right)^4$$

$$= 6 \times \frac{441}{10^4} + 4 \times \frac{189}{10^4} + \frac{81}{10^4}$$

$$= \frac{3483}{10000}$$

$$\text{☞ (1) } B\left(4, \frac{3}{10}\right)$$

$$(2) P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(3) \frac{3483}{10000}$$

19

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{6} = \frac{n}{6} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$V(X) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}n$$

이때 $V(X)=5$ 이므로

$$\frac{5}{36}n = 5 \quad \therefore n = 36$$

$n=36$ 을 ㉠에 대입하면 $E(X)=6$

$$\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 5 + 6^2 = 41$$

☞ 41

20

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{7} = \frac{n}{7}$$

$$V(X) = n \times \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{49}n \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 X 의 평균이 1이므로

$$\frac{n}{7} = 1 \quad \therefore n = 7$$

$n=7$ 을 ㉠에 대입하면

$$V(X) = \frac{6}{7}$$

$$\therefore V(nX) = V(7X) = 7^2 V(X) = 49 \times \frac{6}{7} = 42$$

답 42

21

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = np = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 18 - 4^2 = 2 \text{이므로}$$

$$V(X) = np(1-p) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(1-p) = 2, 1-p = \frac{1}{2} \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{2}n = 4 \quad \therefore n = 8$$

즉 확률변수 X 가 이항분포 $B(8, \frac{1}{2})$ 를 따르므로

$$P(X=6) = {}_8C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

따라서 $a=64, b=7$ 이므로

$$a+b=64+7=71$$

답 71

22

3점 숫을 성공할 확률이 $\frac{4}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분

포 $B(10, \frac{4}{5})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 10 \times \frac{4}{5} = 8$$

$$V(X) = 10 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{답 평균: } 8, \text{ 분산: } \frac{8}{5}, \text{ 표준편차: } \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

23

정사면체를 한 번 던져서 바닥에 1이 적힌 면이 놓일 확률이 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(16, \frac{1}{4})$ 를 따른다.

$$E(X) = 16 \times \frac{1}{4} = 4, V(X) = 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 3 \text{이므로}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 3 + 4^2 = 19$$

답 19

24

두 개의 동전을 동시에 한 번 던져서 2개 모두 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(4, \frac{1}{4})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1, V(X) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

따라서 확률변수 $Y=2X+5$ 의 평균과 분산은

$$E(Y) = E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

$$V(Y) = V(2X+5) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{3}{4} = 3$$

답 평균: 7, 분산: 3

25

한 개의 주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(36, \frac{1}{2})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 36 \times \frac{1}{2} = 18, V(X) = 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 9$$

따라서 확률변수 $Y=2X+1$ 의 평균과 분산은

$$E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2 \times 18 + 1 = 37$$

$$V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X) = 4 \times 9 = 36$$

이므로

$$E(Y^2) = V(Y) + \{E(Y)\}^2 = 36 + 37^2 = 1405$$

답 1405

연습문제

p. 133 ~ 135

1

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{7}$	$\frac{a+1}{7}$	$\frac{a+2}{7}$	$\frac{a+3}{7}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{7} + \frac{a+1}{7} + \frac{a+2}{7} + \frac{a+3}{7} = 1$$

$$\frac{4a+6}{7} = 1, 4a+6=7 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X < 2) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \frac{1}{28} + \frac{5}{28} = \frac{3}{14}\end{aligned}$$

답 ①

2

뽑은 3개의 텀블러 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X 라 하자.

1개의 텀블러가 불량품일 확률이 $\frac{1}{10}$ 이므로 확률변수 X

는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= {}_3C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^2 \\ &= \frac{729}{10^3} + 3 \times \frac{81}{10^3} \\ &= \frac{243}{250}\end{aligned}$$

답 $\frac{243}{250}$

3

$E(X)=3, V(X)=4$ 이므로

$E(Y)=9$ 에서 $E(aX+b)=aE(X)+b=9$

$$\therefore 3a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$V(Y)=16$ 에서 $V(aX+b)=a^2V(X)=16$

$$4a^2=16, a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$a=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$6+b=9 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore ab=2 \times 3=6$$

답 ④

4

Step by Step

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타낸다.



확률의 총합이 1임과 주어진 조건을 이용하여 a, b 에 대한 관계식을 세운다.



두 식을 연립하여 a, b 의 값을 구하고 $5(a-b)$ 의 값을 구한다.

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$2a$	a	$b+1$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$2a+a+(b+1)=1 \quad \therefore 3a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2P(X=0)=2P(X=1)+P(X=2)$ 에서

$$4a=2a+(b+1) \quad \therefore 2a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{5}, b=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore 5(a-b)=5 \times \left\{ \frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{5} \right) \right\} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

답 4

5

확률변수 X 는 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공에 적힌 두 수의 합이므로 X 가 가질 수 있는 값은 2, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=6) = \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{21}$$

$$P(X=7) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{21}$$

$$P(X=8) = \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{21}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

$E(X)$

$$\begin{aligned}&= 2 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{2}{7} + 5 \times \frac{2}{7} + 6 \times \frac{1}{21} + 7 \times \frac{4}{21} + 8 \times \frac{1}{21} \\ &= \frac{34}{7}\end{aligned}$$

이므로

$$E(7X-2) = 7E(X) - 2 = 7 \times \frac{34}{7} - 2 = 32$$

답 32

6

$P(X=0)=a, P(X=1)=b$ 라 하면

$$P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)=a$$

$$P(X=1)=P(X=3)=b$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+a+b+a=1$$

$$\therefore 3a+2b=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$E(X^2)=\frac{35}{6} \text{에서}$$

$$0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b + 4^2 \times a = \frac{35}{6}$$

$$20a+10b=\frac{35}{6}$$

$$\therefore 24a+12b=7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{6}, b=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(X=0)=\frac{1}{6}$$

답 ④

7

확률변수 X 는 이항분포 $B(18, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$E(X)=18 \times \frac{1}{3}=6$$

$$V(X)=18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=4$$

이때

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2 \\ =4+6^2=40$$

이므로

$$E((X+2)^2)=E(X^2+4X+4) \\ =E(X^2)+4E(X)+4 \\ =40+4 \times 6+4 \\ =68$$

답 ④

8

풍선을 맞추는 횟수를 확률변수 X 라 하자.

현주가 풍선을 맞힐 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수 X 는 이

항분포 $B(24, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=24 \times \frac{1}{6}=4$$

한편 얻을 수 있는 상금을 확률변수 Y 라 하면

$$Y=1000X-500(24-X)=1500X-12000$$

이므로

$$E(Y)=E(1500X-12000) \\ =1500E(X)-12000 \\ =1500 \times 4-12000 \\ =-6000$$

따라서 구하는 기댓값은 -6000 원이다.

답 -6000원

다른 풀이

풍선을 맞힐 확률이 $\frac{1}{6}$, 맞이지 못할 확률이 $\frac{5}{6}$ 이므로 한 번의 게임에서 얻을 수 있는 금액의 기댓값은

$$1000 \times \frac{1}{6} - 500 \times \frac{5}{6} = -250(\text{원})$$

따라서 24번의 게임에서 얻을 수 있는 금액의 기댓값은 $-250 \times 24 = -6000(\text{원})$

9

$$E(2X)=12 \text{에서 } 2E(X)=12$$

$$\therefore E(X)=6$$

확률변수 X 는 이항분포 $B(15, p)$ 를 따르므로

$$E(X)=15p=6 \quad \therefore p=\frac{2}{5}$$

$$\therefore V(X)=15 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

$$V(aX)=10 \text{에서}$$

$$a^2V(X)=10$$

$$\frac{18}{5}a^2=10, a^2=\frac{25}{9}$$

$$\therefore a=\frac{5}{3} (\because a>0)$$

답 $\frac{5}{3}$

10

흰 공의 개수를 x 라 하면

흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{x}{20}$ 이다.

..... ①

확률변수 X 는 이항분포 $B(16, \frac{x}{20})$ 를 따르므로

$$E(X)=16 \times \frac{x}{20} = \frac{4}{5}x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 X 의 평균이 4이므로

$$\frac{4}{5}x=4 \quad \therefore x=5$$

따라서 흰 공의 개수는 5이다.

..... ③

답 5

채점 기준	비율
① 흰 공의 개수를 x 라 하고 흰 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	30%
② $E(X)$ 를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ 흰 공의 개수를 구할 수 있다.	30%

11

a, b 의 값을 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$a-b=-3$ 일 때, $(1, 4)$ 의 1가지

$a-b=-2$ 일 때, $(1, 3), (2, 4)$ 의 2가지

$a-b=-1$ 일 때, $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 의 3가지

$a-b=0$ 일 때, $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ 의 4가지

$a-b=1$ 일 때, $(2, 1), (3, 2), (4, 3)$ 의 3가지

$a-b=2$ 일 때, $(3, 1), (4, 2)$ 의 2가지

$a-b=3$ 일 때, $(4, 1)$ 의 1가지

즉 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=-3)=\frac{1}{16}, P(X=-2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},$$

$$P(X=-1)=\frac{3}{16}, P(X=0)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=1)=\frac{3}{16}, P(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},$$

$$P(X=3)=\frac{1}{16}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= -3 \times \frac{1}{16} + (-2) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{16} \\ &\quad + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-3)^2 \times \frac{1}{16} + (-2)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{16} \\ &\quad + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{16} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{2} - 0^2 = \frac{5}{2}$$

따라서 확률변수 $Y=2X+1$ 의 분산은

$$V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{5}{2} = 10$$

답 10

12

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}, P(X=1)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}, P(X=3)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9},$$

$$P(X=4)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{9} + 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{20}{3} - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{140}{81}$$

답 ①

참고 문제에서 두 자리 자연수를 5로 나눈 나머지가

0일 때는 일의 자리의 숫자가 5

1일 때는 일의 자리의 숫자가 1, 6

2일 때는 일의 자리의 숫자가 2, 7

3일 때는 일의 자리의 숫자가 3, 8

4일 때는 일의 자리의 숫자가 4, 9

이어야 한다.

13

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 원소 중에서 3의 배수의 집합을 S_0 , 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 집합을 S_1 , 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 집합을 S_2 라 하면

$$S_0 = \{3, 6\}, S_1 = \{1, 4, 7\}, S_2 = \{2, 5\}$$

(i) 세 집합 S_0, S_1, S_2 에서 각각 하나씩 택하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 2 = 12$

(ii) 집합 S_1 에서 세 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

(i), (ii)에서 세 원소의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는 $12 + 1 = 13$

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 원소 중 서로 다른 세 개의 원소를 택하여 부분집합을 만들 때, 세 원소의 합이 3의 배수일 확률이 $\frac{13}{35}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(50, \frac{13}{35}\right)$ 을 따른다.

$$V(X) = 50 \times \frac{13}{35} \times \frac{22}{35} = \frac{572}{49} \text{이므로}$$

$$V(7X) = 7^2 V(X) = 49 \times \frac{572}{49} = 572$$

답 ④

14

확률변수 X 는 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

즉 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이므로 X 의 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

이때 확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각 값의 확률은

$$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{16}$$

$$P(Y=1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$$\therefore E(Y) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{16} = \frac{13}{8}$$

답 ②

1

주사위를 한 번 던져서 2 이하의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

2 이하의 눈이 Y 번 나왔을 때, 점 P의 좌표가 $(3Y, 15-Y)$ 이므로 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 X 는

$$X = \frac{|3 \times 3Y + 4 \times (15-Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = Y + 12$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= E(Y+12) = E(Y) + 12 \\ &= 5 + 12 = 17 \end{aligned}$$

답 ③

Lecture

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c+b+a=1$$

$$\therefore 2a+2b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c + 7 \times b + 9 \times a \\ &= 10a + 10b + 5c \\ &= 5(2a + 2b + c) \\ &= 5 \times 1 = 5 \quad (\because \textcircled{7}) \end{aligned}$$

이때 $V(X) = \frac{31}{5}$ 이므로

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = \frac{31}{5} + 5^2 = \frac{156}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^2) &= 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a \\ &= 82a + 58b + 25c = \frac{156}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3 \times b + 5 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) \\ &\quad + 7 \times b + 9 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) \\ &= 10a + 10b + 5c \\ &= 5(2a + 2b + c) \\ &= 5 \times 1 = 5 \quad (\because \textcircled{7}) \end{aligned}$$

$$E(Y^2)$$

$$=1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b + 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right)$$

$$=82a + 58b + 25c + \frac{8}{5}$$

$$=\frac{156}{5} + \frac{8}{5} = \frac{164}{5} \quad (\because \textcircled{D})$$

$$\therefore \text{이므로 } V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{164}{5} - 5^2 = \frac{39}{5}$$

$$\therefore 10 \times V(Y) = 10 \times \frac{39}{5} = 78$$

답 78

참고 확률변수 X 가 갖는 값이 $X=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로 $E(X)=5$
또 확률변수 Y 가 갖는 값이 $Y=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로 $E(Y)=5$

3

안경을 쓰고 있는 학생일 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로 확률변수 X 는

이항분포 $B\left(50, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 50 \times \frac{2}{5} = 20, V(X) = 50 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 12$$

이때 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=k) = {}_{50}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{50-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 50)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{50} k^2 P(X=k)$$

$$= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$$

$$+ 3^2 \times P(X=3) + \dots + 50^2 \times P(X=50)$$

$$= E(X^2)$$

$$= V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$= 12 + 20^2 = 412$$

답 412

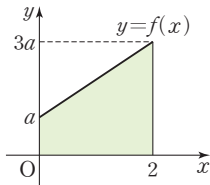
2 확률분포 (2)

확인 문제

p. 139 ~ 151

01

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times (a+3a) \times 2 = 1$$

$$4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

02

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (3+5) \times b = 1$$

$$4b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{4} & (2 \leq x \leq 5) \end{cases}$$

$$\text{즉 } f(2) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$2a = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

03

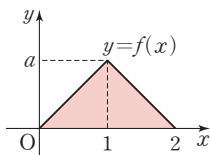
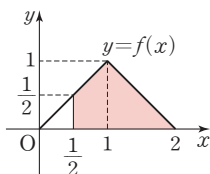
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a = 1$$

$$\therefore a = 1$$

확률 $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right)$ 는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{8}$

04

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (a+2a) \times 1 = 1$$

$$\frac{3}{2}a = 1 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

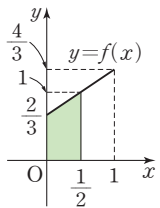
확률 $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 은 함수 $y=f(x)$

의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$,

$x=\frac{1}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으

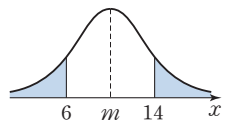
므로

$$\begin{aligned} P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{12}$ 

05

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고



$P(X \leq 6) = P(X \geq 14)$ 이므로

$$m = \frac{6+14}{2} = 10$$

$$\text{이때 } V\left(\frac{1}{2}X\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X) = 9 \text{이므로}$$

$$V(X) = 36 \quad \therefore \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{36} = 6$$

$$\therefore m + \sigma = 10 + 6 = 16$$

답 16

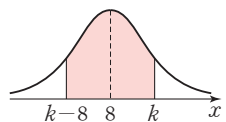
06

정규분포 $N(8, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=8$ 에 대하여 대칭이므로 확률 $P(k-8 \leq X \leq k)$

$$\text{가 최대가 되려면 } \frac{(k-8)+k}{2} = 8$$

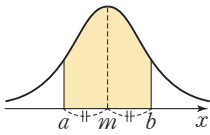
$$k-4=8 \quad \therefore k=12$$

답 12



참고 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, X 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 $b-a$ 의 값이 일정할 때, 확률 $P(a \leq X \leq b)$ 가 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\frac{a+b}{2} = m$$



07

$Z = \frac{X-27}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} (1) P(X \leq 23) &= P\left(Z \leq \frac{23-27}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(29 \leq X \leq 33) &= P\left(\frac{29-27}{4} \leq Z \leq \frac{33-27}{4}\right) \\ &= P(0.5 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417 \end{aligned}$$

☞ (1) 0.1587 (2) 0.2417

08

$Z = \frac{X-8}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq k) = 0.15 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-8}{2}\right) = 0.15$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-8}{2}\right) = 0.15$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-8}{2}\right) = 0.15$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-8}{2}\right) = 0.35$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.35 \text{이므로}$$

$$\frac{k-8}{2} = 1.04 \quad \therefore k = 10.08$$

☞ 10.08

09

일주일 동안의 독서 시간을 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X 는 정규분포 $N(41, 6^2)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{X-41}{6} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} (1) P(29 \leq X \leq 53) &= P\left(\frac{29-41}{6} \leq Z \leq \frac{53-41}{6}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4772 + 0.4772 = 0.9544 \end{aligned}$$

따라서 일주일 동안의 독서 시간이 29분 이상 53분 이하인 학생은 전체의 95.44 %이다.

$$\begin{aligned} (2) P(X \geq 47) &= P\left(Z \geq \frac{47-41}{6}\right) = P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

따라서 일주일 동안의 독서 시간이 47분 이상인 학생은 $500 \times 0.1587 = 79.35$, 즉 약 79명이다.

☞ (1) 95.44 % (2) 79명

10

남학생들의 키를 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(170, 5^2)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{X-170}{5} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(166 \leq X \leq 176) &= P\left(\frac{166-170}{5} \leq Z \leq \frac{176-170}{5}\right) \\ &= P(-0.8 \leq Z \leq 1.2) \\ &= P(-0.8 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.2) \\ &= 0.288 + 0.385 = 0.673 \end{aligned}$$

따라서 키가 166 cm 이상 176 cm 이하인 남학생은 전체의 67.3 %이다.

☞ 67.3 %

11

수학 성적을 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{X-70}{10} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

상위 20등 이내에 들기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-70}{10}\right) = 0.02$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{10}\right) = 0.02$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{10}\right) = 0.02$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{10}\right) = 0.48$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{k-70}{10} = 2 \quad \therefore k = 90$$

따라서 상위 20등 이내에 들기 위한 최저 점수는 90점이다.

☞ 90점

12

자격 시험의 점수를 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(65, 9^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-65}{9}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

평점 A를 받기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = 0.07 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-65}{9}\right) = 0.07$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-65}{9}\right) = 0.07$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-65}{9}\right) = 0.07$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-65}{9}\right) = 0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\frac{k-65}{9} = 1.5 \quad \therefore k = 78.5$$

따라서 평점 A를 받기 위한 최저 점수는 78.5점이다.

☞ 78.5점

13

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-20}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(16 \leq X \leq 26)$$

$$= P\left(\frac{16-20}{4} \leq Z \leq \frac{26-20}{4}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.3413 + 0.4332$$

$$= 0.7745$$

☞ 0.7745

14

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(432, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 432 \times \frac{1}{4} = 108$$

$$V(X) = 432 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 81$$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(108, 9^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-108}{9}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 117) = P\left(Z \leq \frac{117-108}{9}\right)$$

$$= P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413$$

$$= 0.8413$$

☞ 0.8413

15

한 개의 주사위를 던져서 4의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-200}{10}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(190 \leq X \leq 220)$$

$$= P\left(\frac{190-200}{10} \leq Z \leq \frac{220-200}{10}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.3413 + 0.4772$$

$$= 0.8185$$

답 0.8185

16

혈액형이 O형인 사람의 수를 확률변수 X 라 하자.

혈액형이 O형일 확률이 0.25이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(300, 0.25)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 300 \times 0.25 = 75$$

$$V(X) = 300 \times 0.25 \times 0.75 = 56.25$$

이때 300은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(75, 7.5^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-75}{7.5}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X \leq 90) = P\left(Z \leq \frac{90-75}{7.5}\right)$$

$$= P(Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

답 0.9772

17

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 450 \times \frac{2}{3} = 300$$

$$V(X) = 450 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{X-300}{10}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(300 \leq X \leq k) = 0.38 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{300-300}{10} \leq Z \leq \frac{k-300}{10}\right) = 0.38$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-300}{10}\right) = 0.38$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.38$ 이므로

$$\frac{k-300}{10} = 1.2 \quad \therefore k = 312$$

답 312

연습문제

p. 152 ~ 155

1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x 축 및 직선 $x=2a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

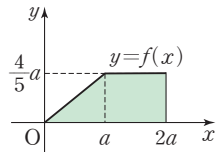
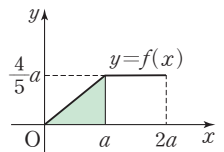
$$\frac{1}{2} \times (a+2a) \times \frac{4}{5}a = 1$$

$$\frac{6}{5}a^2 = 1 \quad \therefore a^2 = \frac{5}{6}$$

확률 $P(0 \leq X \leq a)$ 는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq a) &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a^2 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{1}{3}$

2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times a = 1$$

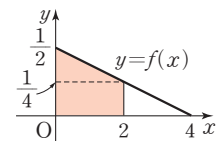
$$2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

확률 $P(0 \leq X \leq 2)$ 는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 2 = \frac{3}{4} \quad \therefore b = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 8(a+b) = 8 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 10$$



답 10

3

$Z = \frac{X-20}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 15) &= P\left(Z \leq \frac{15-20}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.25) \end{aligned}$$

$Z = \frac{Y-m}{8}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y \leq 16) &= P\left(Z \leq \frac{16-m}{8}\right) \\ P(X \leq 15) &= P(Y \leq 16) \text{에서} \\ P(Z \leq -1.25) &= P\left(Z \leq \frac{16-m}{8}\right) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } -1.25 = \frac{16-m}{8} \text{이므로}$$

$$-10 = 16 - m \quad \therefore m = 26$$

답 26

4

$Z = \frac{X-60}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(52 \leq X \leq 62) &= P\left(\frac{52-60}{4} \leq Z \leq \frac{62-60}{4}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4772 + 0.1915 \\ &= 0.6687 \end{aligned}$$

답 ②

5

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$P(0 \leq X \leq a) + P\left(a \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$\text{이때 } 4P(0 \leq X \leq a) = P\left(a \leq X \leq \frac{3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$P(0 \leq X \leq a) + 4P(0 \leq X \leq a) = 1$$

$$5P(0 \leq X \leq a) = 1 \quad \therefore P(0 \leq X \leq a) = \frac{1}{5}$$

$$\text{즉 } a \times 1 = \frac{1}{5} \text{이므로 } a = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

6

ㄱ. 정규분포곡선에서 그래프의 대칭축이 오른쪽에 위치할수록 평균이 커지므로 $m_A < m_B$

ㄴ. 두 정규분포곡선 B, C는 대칭축이 서로 같으므로 $m_B = m_C$

ㄷ. 두 정규분포곡선 A, B는 평행이동하면 서로 겹쳐지므로 $\sigma_A = \sigma_B$

ㄹ. 정규분포곡선 C의 가운데 부분의 높이가 정규분포곡선 B보다 더 낮으므로 $\sigma_B < \sigma_C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

7

$Z = \frac{X-m}{2\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-m}{2\sigma}\right)$$

$Z = \frac{Y-2m}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(Y \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k-2m}{\sigma}\right)$$

$$P(X \geq k) = P(Y \leq k) \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-m}{2\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-2m}{\sigma}\right)$$

$$\therefore P\left(Z \geq \frac{k-m}{2\sigma}\right) = P\left(Z \geq -\frac{k-2m}{\sigma}\right)$$

$$\text{즉 } \frac{k-m}{2\sigma} = -\frac{k-2m}{\sigma} \text{이므로}$$

$$k-m = -2k+4m, 3k=5m \quad \therefore k=\frac{5}{3}m$$

$$\text{이때 } P(X \leq 15) = 0.5 \text{이므로 } m=15$$

$$\therefore k = \frac{5}{3}m = \frac{5}{3} \times 15 = 25$$

답 ②

8

$Z = \frac{X-m}{8}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 36) = 0.0668 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{36-m}{8}\right) = 0.0668$$

$$P(Z \leq 0) - P\left(\frac{36-m}{8} \leq Z \leq 0\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-36}{8}\right) = 0.0668$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-36}{8}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{m-36}{8} = 1.5 \quad \therefore m = 48$$

답 48

9

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$

$$V(X) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}n$$

즉 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{n}{4}, \frac{3}{16}n\right)$ 을

따르므로 $\frac{n}{4} = 192, \frac{3}{16}n = \sigma^2$

$$\frac{n}{4} = 192 \text{에서 } n = 768$$

$$n = 768 \text{을 } \frac{3}{16}n = \sigma^2 \text{에 대입하면}$$

$$\sigma^2 = 144 \quad \therefore \sigma = 12 (\because \sigma > 0)$$

$$\therefore n + \sigma = 768 + 12 = 780$$

답 780

10

배의 무게를 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(750, 100^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-750}{100}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

..... ①

배의 무게가 850 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 850) &= P\left(Z \geq \frac{850-750}{100}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 = 0.16 \end{aligned}$$

..... ②

따라서 최상품인 배의 개수는

$$500 \times 0.16 = 80(\text{개})$$

..... ③

답 80개

채점 기준	비율
① 배의 무게를 확률변수 X 라 하고 X 를 표준화할 수 있다.	30%
② 배의 무게가 850 g 이상일 확률을 구할 수 있다.	40%
③ 최상품인 배의 개수를 구할 수 있다.	30%

11

응시자의 총점을 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(340, 20^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-340}{20}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

1차 합격자의 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{48}{300} = 0.16 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-340}{20}\right) = 0.16$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-340}{20}\right) = 0.16$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-340}{20}\right) = 0.16$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-340}{20}\right) = 0.34$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$ 이므로

$$\frac{k-340}{20} = 1 \quad \therefore k = 360$$

따라서 1차 합격자의 최저 점수는 360점이다.

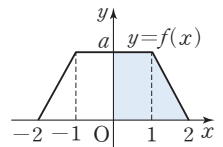
답 360점

12

(나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, $P(-2 \leq X \leq 2) = 1$ 이므로

$$P(-2 \leq X \leq 0) = P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \quad \text{..... ㉠}$$

(가)에서 확률 $P(0 \leq X \leq 2)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\frac{1}{2} \times (1+2) \times a = \frac{1}{2} (\because \text{㉠})$$

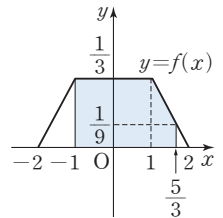
$$\frac{3}{2}a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

확률 $P\left(-1 \leq X \leq \frac{5}{3}\right)$ 는

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축

및 두 직선 $x=-1, x=\frac{5}{3}$ 로 둘러

싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P\left(-1 \leq X \leq \frac{5}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{5}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{27} = \frac{22}{27}$$

따라서 $p=27, q=22$ 이므로

$$p+q=27+22=49$$

답 49

13

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(m \leq X \leq m+12) - P(X \leq m-12) = 0.3664 \text{에서}$$

$$P(m \leq X \leq m+12) - P(X \leq m-12)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{m+12-m}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{m-12-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq -\frac{12}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.3664 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) = P(Z \geq 0)$$

$$= 0.5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이므로 $\textcircled{7} + \textcircled{8}$ 을 하면

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.8664$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이

$$\text{므로 } \frac{12}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 8$$

답 ③

14

Step by Step

$P(Y \leq m+4) = 0.3085$ 를 만족시키는
 m, σ 의 관계식을 구한다.



$P(X \leq 8) + P(Y \leq 8) = 1$ 을 만족시키는
 m, σ 의 관계식을 구한다.



$P(X \leq \sigma)$ 의 값을 구한다.

$Z = \frac{Y-2m}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(Y \leq m+4) = P\left(Z \leq \frac{m+4-2m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{4-m}{\sigma}\right)$$

$$P(Y \leq m+4) = 0.3085 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \leq \frac{4-m}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$P\left(Z \geq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.1915$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이

므로

$$\frac{m-4}{\sigma} = 0.5 \quad \therefore \sigma = 2m-8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $Z = \frac{X-m}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 8) + P(Y \leq 8) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{8-m}{2}\right) + P\left(Z \leq \frac{8-2m}{\sigma}\right) = 1$$

$\textcircled{1}$ 을 위의 식에 대입하면

$$P\left(Z \leq \frac{8-m}{2}\right) + P\left(Z \leq \frac{8-2m}{2m-8}\right) = 1$$

$$P\left(Z \leq \frac{8-m}{2}\right) + P(Z \leq -1) = 1$$

$$\therefore P\left(Z \geq \frac{m-8}{2}\right) + P(Z \leq -1) = 1$$

$$\text{즉 } \frac{m-8}{2} = -1 \text{이므로 } m=6$$

$m=6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\sigma = 12 - 8 = 4$$

$$\therefore P(X \leq \sigma) = P(X \leq 4)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{4-6}{2}\right)$$

$$= P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

답 ④

15

$E(X) = 30, \sigma(X) = 10$ 이고 $Y = aX - 10$ 이므로

$$E(Y) = E(aX - 10) = aE(X) - 10 = 30a - 10$$

$$\sigma(Y) = \sigma(aX - 10) = a\sigma(X) = 10a$$

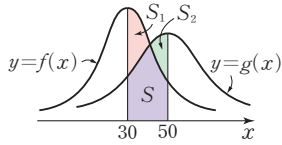
이때 $10a = 20$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore E(Y) = 30 \times 2 - 10 = 50$$

즉 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(30, 10^2)$,

$N(50, 20^2)$ 을 따른다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=30$, $x=50$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면



$$S_1 = P(30 \leq X \leq 50) - S$$

$$S_2 = P(30 \leq Y \leq 50) - S$$

$Z = \frac{X-30}{10}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(30 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{30-30}{10} \leq Z \leq \frac{50-30}{10}\right) \\ = P(0 \leq Z \leq 2)$$

$Z = \frac{Y-50}{20}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(30 \leq Y \leq 50) = P\left(\frac{30-50}{20} \leq Z \leq \frac{50-50}{20}\right) \\ = P(-1 \leq Z \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 - S_2 &= P(30 \leq X \leq 50) - P(30 \leq Y \leq 50) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(-1 \leq Z \leq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

답 0.1359

16

소형 미술품의 무게를 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(40, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-40}{5}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 50) &= P\left(Z \geq \frac{50-40}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

이 공장에서 제작된 미술품 10000개 중에서 규격을 벗어난 작품의 개수를 확률변수 Y 라 하자.

규격을 벗어난 작품일 확률이 0.02이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B(10000, 0.02)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 10000 \times 0.02 = 200$$

$$V(Y) = 10000 \times 0.02 \times 0.98 = 196$$

이때 10000은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 14^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{Y-200}{14}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 214) &= P\left(Z \geq \frac{214-200}{14}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 = 0.16 \end{aligned}$$

답 0.16

Level Up 연습문제

p. 156

1

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따르므로 확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고 m 의 값에서 멀어질수록 함숫값은 작아진다.

(가)에서 $f(10) > f(20)$ 이므로

오른쪽 그림에서

$$|m-10| < |m-20|$$

$$m-10 < 20-m, 2m < 30$$

$$\therefore m < 15$$

(나)에서 $f(4) < f(22)$ 이므로

오른쪽 그림에서

$$|m-4| > |m-22|$$

$$m-4 > 22-m, 2m > 26$$

$$\therefore m > 13$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 13 < m < 15$$

이때 m 은 자연수이므로 $m=14$

따라서 $Z = \frac{X-14}{5}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

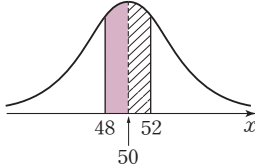
$$\begin{aligned} P(17 \leq X \leq 18) &= P\left(\frac{17-14}{5} \leq Z \leq \frac{18-14}{5}\right) \\ &= P(0.6 \leq Z \leq 0.8) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.8) - P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ &= 0.288 - 0.226 = 0.062 \end{aligned}$$

답 ③

2

$f(100-x)=f(x)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=50$ 에 대하여 대칭이므로 $m=50$

ㄱ. 확률변수 X 는 평균이 50인 정규분포를 따르므로 X 의 확률밀도함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $x=50$ 에 대하여 대칭이다.



$$\begin{aligned}\therefore g(48) &= P(48 \leq X \leq 50) \\ &= P(50 \leq X \leq 52) \\ &= g(50)\end{aligned}$$

ㄴ. 함수 $g(x)=P(x \leq X \leq x+2)$ 의 값이 최대가 되려면

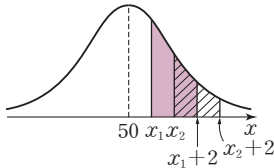
$$\frac{x+(x+2)}{2}=50$$

$$x+1=50 \quad \therefore x=49$$

즉 함수 $g(x)$ 는 $x=49$ 에서 최댓값을 갖는다.

ㄷ. 다음 그림과 같이 $50 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$g(x_1) > g(x_2)$$



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고 $f(100-x)=f(x)$ 에 x 대신 $50-x$ 를 대입하면 $f(50+x)=f(50-x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=50$ 에 대하여 대칭이다.

다른 풀이

ㄱ의 풀이를 다음과 같이 표준화하여 구할 수 있다.

ㄱ. 확률변수 X 가 정규분포 $N(50, 2^2)$ 을 따르므로

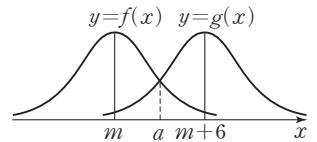
$$Z = \frac{X-50}{2} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}g(48) &= P(48 \leq X \leq 50) \\ &= P\left(\frac{48-50}{2} \leq Z \leq \frac{50-50}{2}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1) \\ g(50) &= P(50 \leq X \leq 52) \\ &= P\left(\frac{50-50}{2} \leq Z \leq \frac{52-50}{2}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) \\ \therefore g(48) &= g(50)\end{aligned}$$

3

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 같으므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$



의 그래프는 평행이동하면 서로 겹쳐질 수 있다.

$f(a)=g(a)$ 에서

$$|a-m| = |a-(m+6)|$$

$$a-m = m+6-a, 2a-2m=6$$

$$\therefore a-m=3$$

..... ㉠

$Z = \frac{X-m}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-m}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5) \quad (\because \text{㉠})$$

$Z = \frac{Y-(m+6)}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(Y \leq a+1) = P\left(Z \leq \frac{a-m-5}{2}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore P(X \geq a) + P(Y \leq a+1)$$

$$= P(Z \geq 1.5) + P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \geq 1.5) + P(Z \geq 1)$$

$$= \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)\}$$

$$+ \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)\}$$

$$= (0.5 - 0.4332) + (0.5 - 0.3413)$$

$$= 0.2255$$

답 ④

3 통계적 추정

확인 문제

p. 159 ~ 178

01

- ㄱ. 투표한 모든 학생에 대한 정확한 결과가 필요하므로 전수조사가 적합하다.
 ㄴ. 모든 유리의 강도를 조사하면 사용할 수 있는 유리가 모두 없어지므로 표본조사가 적합하다.
 ㄷ. 모든 소비자에게 음료수 맛의 선호도를 물어보기 어려우므로 표본조사가 적합하다.
 ㄹ. 모든 과일의 당도를 검사하면 판매할 수 있는 과일이 모두 없어지므로 표본조사가 적합하다.
 ㅁ. A 학교 학생들의 가족 수는 전체 학생을 대상으로 파악해야 하므로 전수조사가 적합하다.
 따라서 전수조사가 적합한 것은 ㄱ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㅁ

02

3장의 카드를 복원추출하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{10}\Pi_3 = 10^3 = 1000 \quad \therefore a = 1000$$

3장의 카드를 동시에 추출하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_3 = 120 \quad \therefore b = 120$$

$$\therefore a - b = 1000 - 120 = 880$$

답 880

03

크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는 n 개의 공 중에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_n\Pi_2 = n^2 = 900 \quad \therefore n = 30$$

크기가 2인 표본을 동시에 추출하는 경우의 수는 n 개, 즉 30개의 공 중에서 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{30}C_2 = 435 \quad \therefore a = 435$$

$$\therefore n + a = 30 + 435 = 465$$

답 465

04

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라 하면

$$m = E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = V(X) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\bar{X}) = m = 2$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{답 } E(\bar{X}) = 2, V(\bar{X}) = \frac{1}{4}$$

05

확률의 총합은 1이므로

$$0.3 + 0.4 + a = 1 \quad \therefore a = 0.3$$

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라 하면

$$m = E(X) = 1 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = 3$$

$$\sigma^2 = V(X) = 1^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.4 + 5^2 \times 0.3 - 3^2 = 2.4$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$E(\bar{X}) = m = 3, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2.4}{3} = 0.8$$

답 평균: 3, 분산: 0.8

06

카드에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라 하면

$$m = E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} = 3$$

$$\sigma^2 = V(X) = 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{6} - 3^2 = 2$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\bar{X}) = m = 3, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2}{2} = 1$$

답 평균: 3, 분산: 1

07

공에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라 하면

$$m = E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\sigma^2 = V(X) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\bar{X}) = m = \frac{5}{3}, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{5}{9}}{2} = \frac{5}{18}$$

$$\therefore E(3\bar{X}+1) = 3E(\bar{X}) + 1 = 3 \times \frac{5}{3} + 1 = 6$$

$$V(3\bar{X}+1) = 3^2 V(\bar{X}) = 9 \times \frac{5}{18} = \frac{5}{2}$$

$$\text{답 } E(3\bar{X}+1) = 6, V(3\bar{X}+1) = \frac{5}{2}$$

08

모집단이 정규분포 $N(8, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4
이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(8, \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(8, 2^2)$
을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-8}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 11) = P\left(Z \leq \frac{11-8}{2}\right) = P(Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$$

답 0.9332

09

모집단이 정규분포 $N(175, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기
가 25이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(175, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉
 $N(175, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-175}{2}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(177 \leq \bar{X} \leq 179) = P\left(\frac{177-175}{2} \leq Z \leq \frac{179-175}{2}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

답 0.1359

10

모집단이 정규분포 $N(50, \sigma^2)$ 을 따르므로 임의로 추출
한 16명의 통학 시간의 평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{\sigma^2}{16}\right)$
을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X}-50}{\frac{\sigma}{\sqrt{16}}} = \frac{\bar{X}-50}{\frac{\sigma}{4}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준}$$

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$P(50 \leq \bar{X} \leq 56) = 0.4332$ 에서

$$P\left(\frac{50-50}{\frac{\sigma}{4}} \leq Z \leq \frac{56-50}{\frac{\sigma}{4}}\right) = 0.4332$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{24}{\sigma}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{24}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 16$$

답 16

11

모집단이 정규분포 $N(250, 20^2)$ 을 따르므로 임의로 선
택한 비누 n 개의 무게의 평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(250, \frac{20^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X}-250}{\frac{20}{\sqrt{n}}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$P(242 \leq \bar{X} \leq 258) \leq 0.9544$ 에서

$$P\left(\frac{242-250}{\frac{20}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{258-250}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) \leq 0.9544$$

$$P\left(-\frac{2\sqrt{n}}{5} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{5}\right) \leq 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{5}\right) \leq 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{5}\right) \leq 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{n}}{5} \leq 2, \sqrt{n} \leq 5 \quad \therefore n \leq 25$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 25이다.

답 25

12

학생 100명 중에서 걸어서 등교하는 학생의 비율이 $\hat{p}$ 이
고, 모비율 $p=0.2$, 표본의 크기 $n=100$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.2$$

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{0.2 \times 0.8}{100} = 0.0016$$

$$\text{답 } E(\hat{p}) = 0.2, V(\hat{p}) = 0.0016$$

13

$$E(\hat{p}) = p = 0.6$$

즉 시민 100명 중에서 신규 시립 병원 건립에 찬성하는 시민의 비율이 $\hat{p}$ 이고, 모비율 $p=0.6$, 표본의 크기 $n=100$ 이므로

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{0.6 \times 0.4}{100} = 0.0024$$

$$\therefore 10000\{p + V(\hat{p})\} = 10000 \times (0.6 + 0.0024) = 6024$$

☞ 6024

14

학생 100명 중에서 안경을 쓰고 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.5$, 표본의 크기 $n=100$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.5$$

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{0.5 \times 0.5}{100} = 0.0025$$

즉 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.5, 0.05^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{0.05}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(0.45 \leq \hat{p} \leq 0.6) &= P\left(\frac{0.45 - 0.5}{0.05} \leq Z \leq \frac{0.6 - 0.5}{0.05}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.341 + 0.477 \\ &= 0.818 \end{aligned}$$

☞ 0.818

15

표본평균 $\bar{x}=50$, 표본의 크기 $n=49$, 모표준편차 $\sigma=7$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$50 - 1.96 \times \frac{7}{\sqrt{49}} \leq m \leq 50 + 1.96 \times \frac{7}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore 48.04 \leq m \leq 51.96$$

☞ $48.04 \leq m \leq 51.96$

16

표본평균 $\bar{x}=950$, 표본의 크기 $n=36$ 이고, 36은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 100을 이용한다.

따라서 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$950 - 2.58 \times \frac{100}{\sqrt{36}} \leq m \leq 950 + 2.58 \times \frac{100}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore 907 \leq m \leq 993$$

☞ $907 \leq m \leq 993$

17

(1) 모표준편차가 4이고, $b-a$ 는 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이이므로 $b-a=3.92$ 에서

$$2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 3.92$$

$$\sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

(2) 표본평균 $\bar{x}=60$, 표본의 크기 $n=16$, 모표준편차 $\sigma=4$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$60 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{16}} \leq m \leq 60 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 58.04 \leq m \leq 61.96$$

$$\therefore a = 58.04, b = 61.96$$

☞ (1) 16 (2) $a=58.04, b=61.96$

18

표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차가 5이고, $b-a$ 는 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이이므로 $b-a \leq 1.29$ 에서

$$2 \times 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1.29$$

$$\sqrt{n} \geq 20 \quad \therefore n \geq 400$$

따라서 표본의 최소 크기는 400이다.

☞ 400

19

표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차가 10 g이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차가 2 g 이하이므로

$$1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 2, \sqrt{n} \geq 9.8$$

$$\therefore n \geq 96.04$$

따라서 적어도 97개의 아령을 추출해야 한다.

☞ 97개

20

표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차가 0.25 kg이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}\bar{x} - 2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}} &\leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}} \\ -2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}} &\leq m - \bar{x} \leq 2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}} \\ \therefore |m - \bar{x}| &\leq 2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

이때 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차이가 0.05 kg 이하이므로

$$2.58 \times \frac{0.25}{\sqrt{n}} \leq 0.05, \sqrt{n} \geq 12.9$$

$$\therefore n \geq 166.41$$

따라서 적어도 167마리의 오리를 추출해야 한다.

답 167마리

21

표본의 크기를 n , 새로운 과자 봉지에 호감을 갖는 고등학생의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p} = \frac{225}{300} = 0.75, \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25, n = 300$$

이때 300은 충분히 크므로 전체 고등학생 중에서 새로운 과자 봉지에 호감을 갖는 고등학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}0.75 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{300}} &\leq p \\ &\leq 0.75 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{300}}\end{aligned}$$

$$\therefore 0.701 \leq p \leq 0.799$$

답 0.701 ≤ p ≤ 0.799

22

표본의 크기를 n , 새로운 브랜드를 선호하는 여성의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p} = \frac{320}{400} = 0.8, \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2, n = 400$$

이때 400은 충분히 크므로 전체 여성 중에서 새로운 브랜드를 선호하는 여성의 비율 p 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$0.8 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{400}} \leq p \leq 0.8 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{400}}$$

$$\therefore 0.7484 \leq p \leq 0.8516$$

답 0.7484 ≤ p ≤ 0.8516

23

공장에서 생산되는 부품의 불량률의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p} = 0.1, \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.9$$

표본의 크기가 n 이므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}}$$

$$-2.58 \times \frac{0.3}{\sqrt{n}} \leq p - \hat{p} \leq 2.58 \times \frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |p - \hat{p}| \leq 2.58 \times \frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

이때 모비율 p 과 표본비율 $\hat{p}$ 의 차이가 0.06 이하이므로

$$2.58 \times \frac{0.3}{\sqrt{n}} \leq 0.06, \sqrt{n} \geq 12.9$$

$$\therefore n \geq 166.41$$

따라서 n 의 최솟값은 167이다.

답 167

24

새로운 옥수수 품종의 발아율의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p} = 0.5, \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.5$$

표본의 크기가 n 이므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

이때 신뢰구간의 길이가 0.2 이하이므로

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.2, \sqrt{n} \geq 10$$

$$\therefore n \geq 100$$

따라서 n 의 최솟값은 100이다.

답 100

연습문제

p. 179 ~ 183

1

모집단에서 첫 번째 뽑은 수를 X_1 , 두 번째 뽑은 수를 X_2 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$X_1 \backslash X_2$	1	2	5
1	1	1.5	3
2	1.5	2	3.5
5	3	3.5	5

따라서 표본평균 $\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

2

모평균을 m 이라 하면

$$m = E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = 2$$

$$\therefore E(\bar{X}) = m = 2$$

답 ⑤

3

모표준편차 $\sigma = 5$, 표본의 크기 $n = 49$ 이고, 표본평균이 $\bar{x}$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \bar{x} - \frac{7}{5} \leq m \leq \bar{x} + \frac{7}{5}$$

이때 $a \leq m \leq \frac{6}{5}a$ 이므로

$$a = \bar{x} - \frac{7}{5}, \frac{6}{5}a = \bar{x} + \frac{7}{5}$$

$$a = \bar{x} - \frac{7}{5} \text{을 } \frac{6}{5}a = \bar{x} + \frac{7}{5} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{6}{5}\left(\bar{x} - \frac{7}{5}\right) = \bar{x} + \frac{7}{5}, \frac{1}{5}\bar{x} = \frac{77}{25}$$

$$\therefore \bar{x} = 15.4$$

답 ②

4

ㄴ. 신뢰구간의 길이는 신뢰도, 표본의 크기에 따라 결정되고, 모평균 m 의 크기와 상관없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5

$Z = \frac{X-30}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq 34) = P\left(Z \geq \frac{34-30}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \leq -2)$$

또 모집단이 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따르고 표본의 크기

가 16이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(30, \frac{2^2}{16}\right)$, 즉

$N\left(30, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-30}{\frac{1}{2}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-30}{\frac{1}{2}}\right) = P(Z \leq 2(a-30))$$

이때 $P(X \geq 34) = P(\bar{X} \leq a)$ 이므로

$$-2 = 2(a-30), a-30 = -1$$

$$\therefore a = 29$$

답 ⑤

6

모집단이 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가

4이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉

$N(50, 5^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-50}{5}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\bar{X} \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

답 ①

7

학생 100명 중에서 지난 주말에 봉사 활동을 한 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p = 0.9$, 표본의 크기 $n = 100$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.9$$

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{0.9 \times 0.1}{100} = 0.0009$$

즉 표본비율 $\hat{p}$ 은 정규분포 $N(0.9, 0.03^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\hat{p}-0.9}{0.03}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(0.81 \leq \hat{p} \leq 0.96) = P\left(\frac{0.81-0.9}{0.03} \leq Z \leq \frac{0.96-0.9}{0.03}\right)$$

$$= P(-3 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(-3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 3) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.4987 + 0.4772$$

$$= 0.9759$$

답 ④

8

양과 64개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\bar{x}$, 표본의 크기 $n=64$, 모표준편차 $\sigma=16$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore \bar{x} - 3.92 \leq m \leq \bar{x} + 3.92$$

이때 $\bar{x} - 3.92 = 240.12$, $\bar{x} + 3.92 = a$ 이므로

$$\bar{x} = 240.12 + 3.92 = 244.04$$

$$a = \bar{x} + 3.92 = 244.04 + 3.92 = 247.96$$

$$\therefore \bar{x} + a = 244.04 + 247.96 = 492$$

답 ③

9

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면

$$\bar{x} = \frac{10 \times 4 + 11 \times 2 + 12 \times 2 + 13 \times 1}{9} = 11$$

즉 표본평균 $\bar{x}=11$, 표본의 크기 $n=9$, 모표준편차 $\sigma=1.5$ 이므로 이 지역에서 생산되는 굴의 당도의 평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$11 - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{9}} \leq m \leq 11 + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 10.02 \leq m \leq 11.98$$

답 10.02 ≤ m ≤ 11.98

10

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이가 11.76이므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.76 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3$$

이때 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq m + 5.88) &= P\left(Z \leq \frac{m + 5.88 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{5.88}{3}\right) \\ &= P(Z \leq 1.96) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 0.5 + 0.475 \\ &= 0.975 \end{aligned}$$

답 0.975

11

모집단이 정규분포 $N(m, 3^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{3^2}{n}\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - m| \leq 0.84) &= P(-0.84 \leq \bar{X} - m \leq 0.84) \\ &= P\left(-\frac{0.84}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{0.84}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P(-0.28\sqrt{n} \leq Z \leq 0.28\sqrt{n}) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 0.28\sqrt{n}) \end{aligned}$$

즉 $2P(0 \leq Z \leq 0.28\sqrt{n}) \geq 0.95$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq 0.28\sqrt{n}) \geq 0.475$$

$$0.28\sqrt{n} \geq 1.96, \sqrt{n} \geq 7$$

$$\therefore n \geq 49$$

따라서 n 의 최소값은 49이다.

답 49

12

표본의 크기를 n , 학생 100명 중에서 최근 1년 이내에 현혈을 한 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p} = \frac{30}{100} = 0.3, \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.7, n = 100$$

이때 100은 충분히 크므로 이 지역 전체 고등학생 중 최근 1년 이내에 현혈을 한 학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.3 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{100}} \leq p \leq 0.3 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{100}}$$

$$\text{즉 } \sqrt{a} = \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{100}} \text{이므로}$$

$$a = \frac{0.3 \times 0.7}{100} = 0.0021$$

답 ①

13

Step by Step

모비율 p 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을
표본의 크기 n 과 표본비율 $\hat{p}$ 에 대한 식으로 나타낸다.

↓
 $\hat{p}$ 의 값을 구한다.

↓
 n 의 값을 구한다.

K 고등학교 학생 n 명 중에서 나눔 포털을 활용하여 봉사

활동을 하는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 K 고등학교 전체 학생 중에서 나눔 포털을 활용하여 봉사 활동을 하는 학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$a + b = 2\hat{p} = 0.4 \text{ 이므로 } \hat{p} = 0.2$$

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{n}} = 0.2064 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2 \times 2.58 \times 0.4}{\sqrt{n}} = 0.2064, \sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

답 ①

14

모집단에서 복원추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2) 라

$$\text{하면 } \bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$X_1 + X_2 = 3$$

$$\text{즉 } \bar{X} = \frac{3}{2} \text{인 경우는 } (1, 2), (2, 1) \text{이므로}$$

$$P\left(\bar{X} = \frac{3}{2}\right) = a \times 2a + 2a \times a = 4a^2 = \frac{4}{25}$$

$$a^2 = \frac{1}{25} \quad \therefore a = \frac{1}{5} \quad (\because a \text{는 양수})$$

$a = \frac{1}{5}$ 을 주어진 표에 대입하여 표를 완성하면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라 하면

$$m = E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\sigma^2 = V(X) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{2}{5} - \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{14}{25}}{2} = \frac{7}{25}$$

$$\therefore V(5\bar{X}) = 5^2 V(\bar{X}) = 25 \times \frac{7}{25} = 7$$

답 7

15

A 고등학교 학생의 몸무게는 정규분포 $N(60, 6^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(60, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(60, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 60}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 A 고등학교 학생 중에서 임의추출한 9명이 답송할 때, 경고음이 울릴 확률은

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{558}{9}\right) = P(\bar{X} \geq 62) = P\left(Z \geq \frac{62 - 60}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

답 0.1587

16

비누의 무게는 정규분포 $N(250, 20^2)$ 을 따르고 표본의

크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(250, \frac{20^2}{n}\right)$

을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 250}{\frac{20}{\sqrt{n}}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(242 \leq \bar{X} \leq 258)$$

$$= P\left(\frac{242 - 250}{\frac{20}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{258 - 250}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P(-0.4\sqrt{n} \leq Z \leq 0.4\sqrt{n})$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 0.4\sqrt{n})$$

이때 $P(242 \leq \bar{X} \leq 258) \leq 0.9544$ 이므로

$$2P(0 \leq Z \leq 0.4\sqrt{n}) \leq 0.9544$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 0.4\sqrt{n}) \leq 0.4772$$

주어진 표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$0.4\sqrt{n} \leq 2, \sqrt{n} \leq 5$$

$$\therefore n \leq 25$$

따라서 n 의 최댓값은 25이다.

답 ②

17

모집단이 정규분포 $N(30, 3^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 9

이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(30, \frac{3^2}{9}\right)$, 즉

$N(30, 1^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 30}{1} = \bar{X} - 30 \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정}$$

규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 32) = P(Z \leq 32 - 30) = P(Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

..... ①

또 모집단이 정규분포 $N(50, \sigma^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{\sigma^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(50, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{Y} - 50}{\frac{\sigma}{4}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{Y} \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54 - 50}{\frac{\sigma}{4}}\right) = P\left(Z \geq \frac{16}{\sigma}\right) \dots\dots ②$$

이때 $P(\bar{X} \leq 32) + P(\bar{Y} \geq 54) = 1$ 이므로

$$0.9772 + P\left(Z \geq \frac{16}{\sigma}\right) = 1, P\left(Z \geq \frac{16}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{16}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{16}{\sigma}\right) = 0.4772$$

주어진 표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{16}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 8 \quad \dots\dots ③$$

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{Y} \leq 48) &= P\left(Z \leq \frac{48 - 50}{\frac{8}{4}}\right) = P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

답 0.1587

채점 기준	비율
① 확률 $P(\bar{X} \leq 32)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 확률 $P(\bar{Y} \geq 54)$ 를 σ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ σ 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ 확률 $P(\bar{Y} \leq 48)$ 을 구할 수 있다.	20%

18

표본평균 $\bar{x} = 70$, 표본의 크기 $n = 25$, 모표준편차가 σ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$70 - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \leq m \leq 70 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore 70 - 0.392\sigma \leq m \leq 70 + 0.392\sigma$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이므로

$$b = 70 + 0.392\sigma$$

표본평균 $\bar{x} = 72$, 표본의 크기 $n = 25$, 모표준편차가 σ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$72 - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \leq m \leq 72 + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore 72 - 0.516\sigma \leq m \leq 72 + 0.516\sigma$$

이 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 이므로

$$d = 72 + 0.516\sigma$$

이때 $d - b = 3.24$ 이므로

$$(72 + 0.516\sigma) - (70 + 0.392\sigma) = 3.24$$

$$2 + 0.124\sigma = 3.24, 0.124\sigma = 1.24$$

$$\therefore \sigma = 10$$

답 10

Level Up 연습문제

p. 184

1

확률변수 X 의 표준편차를 σ 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(220, \sigma^2)$ 을 따르므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(220, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 215) = P\left(Z \leq \frac{215 - 220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq -\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$\text{즉 } 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.1587 \text{이므로}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이때 주어진 표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{5\sqrt{n}}{\sigma} = 1 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \quad \dots\dots ⑦$$

또 (나)에서 확률변수 Y 의 표준편차는 $\frac{3}{2}\sigma$ 이므로 확률변수 Y 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$ 을 따르므로 표본평균

$$\bar{Y} \text{는 정규분포 } N\left(240, \frac{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2}{9n}\right), \text{ 즉 } N\left(240, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

을 따른다.

이때 ㉠에서 $\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

즉 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{Y} - 240}{\frac{5}{2}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \geq 235) &= P\left(Z \geq \frac{235 - 240}{\frac{5}{2}}\right) \\ &= P(Z \geq -2) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

답 ⑤

2

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기 $n=49$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \bar{x} - 0.28\sigma \leq m \leq \bar{x} + 0.28\sigma$$

이때 $1.73 \leq m \leq 1.87$ 이므로

$$\bar{x} - 0.28\sigma = 1.73 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\bar{x} + 0.28\sigma = 1.87 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2\bar{x} = 3.6 \quad \therefore \bar{x} = 1.8$$

㉡-㉠을 하면

$$0.56\sigma = 0.14 \quad \therefore \sigma = 0.25$$

따라서 $k = \frac{\sigma}{x} = \frac{0.25}{1.8} = \frac{5}{36}$ 이므로

$$180k = 180 \times \frac{5}{36} = 25$$

답 25

3

n 명 중에서 이 영화를 재관람한 사람의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 전체 인원 중에서 이 영화를 재관람한 사람의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이때 $0.0706 \leq p \leq 0.1294$ 이므로

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.0706 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.1294 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2\hat{p} = 0.2 \quad \therefore \hat{p} = 0.1$$

$\hat{p} = 0.1$ 을 ㉠에 대입하면

$$0.1 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}} = 0.0706$$

$$\frac{0.588}{\sqrt{n}} = 0.0294, \sqrt{n} = 20$$

$$\therefore n = 400$$

이때 $\hat{p} = \frac{m}{n}$ 이므로

$$0.1 = \frac{m}{400} \quad \therefore m = 40$$

$$\therefore m + n = 40 + 400 = 440$$

답 440